О хаотизации одномерного газа, состоящего из взаимодействующих частиц

П. А. Нагаев
Механико-математический факультет
Московский Государственный Университет им. Ломоносова
117192, Россия, Москва, Воробьевы горы, 1
E-mail: panagaev@yandex.ru

Получено 17 октября 2007 г.

В работе исследуется задача о движении двух материальных точек одинаковой массы по единичному отрезку. В частности, при помощи метода Пуанкаре доказано, что в случае, когда движение происходит в некотором потенциальном поле, не удается найти дополнительных к полной энергии первых интегралов. Также найдены условия на вид потенциала, при которых система двух частиц становится устойчивой в первом приближении.

Цитата: П. А. Нагаев, О хаотизации одномерного газа, состоящего из взаимодействующих частиц, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 4, с. 393–399.

Ключевые слова: неинтегрируемость, уравнения движения, биллиард

P. A. Nagaev

On the chaotization of one-dimensional gas consisting of interactive particles

We investigate the problem of motion of two identical particles on the unit segment. Particularly it was proved using the Poincaré method that in case of motion in any potential field one can find no additional first integrals except the full energy. We also found some conditions on the type potential under which the two-particles system is stable as the first approximation.

Citation: P. A. Nagaev, On the chaotization of one-dimensional gas consisting of interactive particles, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, No. 4, с. 393–399.

Keywords: nonintegrability, motion equations, billiard
MSC 2000: 70F99

1. Одномерный газ

Рассмотрим систему n одинаковых частиц единичной массы, помещенных на прямолинейном отрезке единичной длины. Они движутся по инерции, попеременно упруго сталкиваясь друг с другом и с концами отрезка. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты этих точек, $p_1, \ldots, p_n$ — их импульсы (или, что то же самое, скорости, так как масса каждой частицы считается единичной). Будем считать, что $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$.

Эта динамическая система гамильтонова, поскольку удары предполагаются абсолютно упругими. Хорошо известным способом (см. напр. [1]) эту систему можно представить как биллиард Биркгофа в аффинной камере Вейля C_n. Согласно работе [2], биллиарды в любой камере Вейля регуляризуемы и вполне интегрируемы. Регуляризуемость означает, что попадающие в ребра траектории имеют естественное продолжение, непрерывно зависящее от начальных данных. Полная интегрируемость биллиарда в n-мерной области означает наличие n функционально независимых первых интегралов, попарные скобки Пуассона которых равны нулю.

Полная интегрируемость рассматриваемого одномерного газа почти очевидна. Дело в том, что при упругом столкновении двух одинаковых частиц происходит простой обмен их скоростей: частицы как бы «проходят» сквозь друг друга, не изменяя своих скоростей. Это позволяет сразу же выписать полный набор коммутирующих законов сохранения:

$$\begin{gathered} F_2 = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 \\ F_4 = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_n^4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{2n} = p_1^{2n} + p_2^{2n} + \ldots + p_n^{2n} \end{gathered}$$

Эти однородные многочлены, очевидно, функционально независимы:

$$\frac{\partial(F_2, F_4, \ldots, F_{2n})}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0$$

Ясно, что F_2 — это удвоенная кинетическая энергия системы.

При $n = 2$ в качестве независимых первых интегралов можно взять $H = (p_1^2 + p_2^2)/2$ и $F = p_1^2 p_2^2 = (F_2^2 - F_4)/2$.

Для больших значений n эта система рассматривалась в работе Хлавки [3]. Установлено, что бóльшую часть времени частицы почти равномерно заполняют отрезок $[0, 1]$. Это утверждение сформулировано точно с указанием соответствующих оценок. Аналогичное наблюдение (но без оценок) содержится в работе [4].

Однако еще Пуанкаре было отмечено [5], что при $n \to \infty$ газ необратимо стремится равномерно заполнить отрезок $[0, 1]$. Усиление этого результата содержится в работе [6].

Мы рассматриваем более общую задачу, когда частицы взаимодействуют между собой. Это взаимное влияние частиц описывается потенциалом V парного взаимодействия. Например, V может быть ньютоновским потенциалом или потенциалом Леннарда–Джонса (который описывает межмолекулярные силы).

Будет показано, что уже при $n = 2$ такая система не будет интегрируемой: кроме интеграла энергии она не будет допускать другого интеграла, полиномиального по импульсам. Причина кроется в разрушении большого числа резонансных инвариантных торов биллиардной задачи двух частиц на отрезке при добавлении парного взаимодействия.

Задача двух взаимодействующих тел на прямой, очевидно, интегрируема. Однако при добавлении третьего тела в общем случае не хватает еще одного интеграла, независимого от интегралов энергии и импульса. Как показывают численные расчеты из работы [7] динамика трех гравитирующих тел на прямой является хаотичной.

2. Две взаимодействующие частицы на отрезке

Итак, рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} + \varepsilon H_1(x) \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $x_i \in [0, 1]$ — координаты точки, $p = (p_1, p_2)$ — соответствующие импульсы, $\varepsilon H_1(x) = H_1(x_1 - x_2)$ — аналитическая возмущающая функция — потенциальная энергия системы.

Изучим вопрос об интегрируемости данной системы, то есть о наличии у нее дополнительного к интегралу энергии первого интеграла. Известно, что при $\varepsilon = 0$ система с гамильтонианом (2.1) имеет первый интеграл вида $F = p_1^2 p_2^2$.

В случае $\varepsilon \neq 0$ вопрос об интегрируемости может быть решен с помощью метода Пуанкаре, использующего принцип усреднения. Для этого рассмотрим периодические решения невозмущенной системы (2.1) и усредним по ним возмущающую функцию $H_1(x)$. Если усредненная функция не будет равна тождественно нулю, то из теорем об неинтегрируемости [8] гамильтоновых систем можно сделать вывод о неинтегрируемости системы с гамильтонианом (2.1).

Прежде, чем приступить к доказательству неинтегрируемости, сделаем несколько замечаний, упрощающих дальнейшие выкладки.

Условия исходной задачи о движении двух частиц внутри отрезка можно переформулировать в терминах движения материальной точки внутри равнобедренного треугольника. Действительно, координатам точки на плоскости будут соответствовать координаты частиц на отрезке, а ударам о стороны треугольника — столкновения частиц друг с другом и с краями отрезка. Ввиду того, что частицы сталкиваются друг с другом абсолютно упруго, а также ввиду зависимости $H_1(x)$ лишь от разности $x_1 - x_2$, задачу о движении точки внутри равнобедренного треугольника можно свести к задаче о движении точки внутри квадрата (т.е. по тору). Таким образом, различные периодические траектории невозмущенной задачи соответствуют различным типам условно-периодических движений по тору.

Условимся периодические траектории обозначать $\left\{\frac{p}{q}, a\right\}$, где $\frac{p}{q}$ — отношение частот условно-периодического движения на торе и $(p, q) = 1$ (в дальнейшем будем предполагать, что $p \leqslant q$, иначе введем новые координаты $X_i = x_j, i \neq j$), a — значение координаты x_1 (можно считать, что в начальный момент значение координаты x_2 равно нулю). Величина a параметризует замкнутые траектории невозмущенной системы, заполняющие резонансный инвариантный тор. В дальнейшем также будем обозначать первообразную H_1 как U, т.е. $U' = H_1$.

Теперь можно сформулировать основное утверждение.

Теорема 1. $F(a) = \int_{\left\{\frac{p}{q}, a\right\}} H_1(x)dl \neq 0$ *для всех* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *и* $a \in (0, 1)$, *где* $H_1(x)$ — *степенная функция, потенциал Ньютона либо потенциал Леннарда–Джонса.*

Доказательство. Параметризуем траекторию координатой $x_1 = t$. Выбирая одно из двух возможных движений, получаем следующую параметризацию $2p + 2q$ отрезков периодической траектории

$$\left.\begin{array}{l} y = (-1)^r \left(-\dfrac{(t-a)p+r}{q}\right) \\[2ex] y = (-1)^{q-r}\left(1+\dfrac{(t-a)p+r}{q}\right) \end{array}\right. \quad t \in [0, a-\tfrac{r}{p}), \quad r = 0, \ldots, p-1$$

$$\left.\begin{array}{l} y = (-1)^r \left(\dfrac{(t-a)p+r}{q}\right) \\[2ex] y = (-1)^{q-r}\left(1-\dfrac{(t-a)p+r}{q}\right) \end{array}\right. \quad t \in [a-\tfrac{r}{p}, 1), \quad r = 0, \ldots, p-1$$

$$\left.\begin{array}{l} y = (-1)^r \left(\dfrac{(t-a)p+r}{q}\right) \\[2ex] y = (-1)^{q-r}\left(1-\dfrac{(t-a)p+r}{q}\right) \end{array}\right. \quad t \in [0, 1), \quad r = p, \ldots, q-1$$

Вводя обозначения $c_1 = \left(\frac{p}{q} - 1\right)^{-1}$ и $c_2 = \left(-\frac{p}{q} - 1\right)^{-1}$, перепишем интеграл $F(a)$ в виде

$$F(a) = \sum_{r=0}^{p-1}(-1)^{q-r}\left[\int\limits_0^{a-\frac{r}{p}} H_1\left(\frac{p(x-a)+r}{q} + 1 - x\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a-\frac{r}{p}}^{1} H_1\left(-\frac{p(x-a)+r}{q} + 1 - x\right)dx\right] + \sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r\left[\int\limits_0^{a-\frac{r}{p}} H_1\left(-\frac{p(x-a)+r}{q} - x\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a-\frac{r}{p}}^{1} H_1\left(\frac{p(x-a)+r}{q} - x\right)dx\right] + \sum_{r=p}^{q-1}\left[\int\limits_0^1 (-1)^r H_1\left(\frac{p(x-a)+r}{q} - x\right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{q-r} H_1\left(-\frac{p(x-a)+r}{q} + 1 - x\right)dx\right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{p-1}(-1)^{q-r}\left[c_1 U\left(1 - a + \frac{r}{p}\right) - c_1 U\left(1 + \frac{r - pa}{q}\right) + \right.$$

$$\left. + c_2 U\left(\frac{p(a-1)-r}{q}\right) - c_2 U\left(1 - a + \frac{r}{p}\right)\right] + \sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r\left[c_1 U\left(\frac{p(1-a)+r}{q} - 1\right) - c_1 U\left(\frac{r}{p} - a\right) + \right.$$

$$+ c_2U\left(\frac{r}{p} - a\right) - c_2U\left(\frac{pa-r}{q}\right)\right] + \sum_{r=p}^{q-1}\left[(-1)^r c_1\left(U\left(\frac{p(1-a)+r}{q} - 1\right) - U\left(\frac{r-pa}{q}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^{q-r}c_2\left(U\left(\frac{p(a-1)-r}{q}\right) - U\left(\frac{pa-r}{q} + 1\right)\right)\right].$$

Положим $t_r = \dfrac{pa-r}{q}$. Тогда вышестоящее выражение перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}F(a) = \sum_{r=0}^{p-1}(-1)^{q-r}\Big[c_1U\left(1-\frac{qt_r}{p}\right) - c_1U\left(1-t_r\right) + \\ + c_2U\left(t_r - \frac{p}{q}\right) - c_2U\left(1-\frac{qt_r}{p}\right)\Big] + \\ + \sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r\Big[c_1U\left(\frac{p}{q} - 1 - t_r\right) - c_1U\left(-\frac{qt_r}{p}\right) + \\ + c_2U\left(-\frac{qt_r}{p}\right) - c_2U\left(t_r\right)\Big] + \\ + \sum_{r=p}^{q-1}\Big[(-1)^r c_1\left(U\left(\frac{p}{q} - 1 - t_r\right) - U\left(-t_r\right)\right) + \\ + (-1)^{q-r}c_2\left(U\left(t_r - \frac{p}{q}\right) - U\left(t_r - 1\right)\right)\Big].\end{aligned}$$

Так как движение происходит внутри единичного квадрата, и точки сторон квадрата, в которых происходят удары, отстоят друг от друга на расстояния $\frac{1}{q}$, то

$$U(t_r) = U(t_r + 1),$$
$$\sum_{r=0}^{q-1} U(t_r) = \sum_{r=0}^{q-1} U\left(t_r + \frac{p}{q}\right).$$

Следовательно, $F(a)$ можно записать при различных p и q следующим образом:

1. q — четное:

$$F(a) = 2\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^r\left[c_1U\left(-t_r\right) + c_2U\left(t_r\right)\right];$$

2. q — нечетное, p — четное:

$$F(a) = 2\sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r\left[c_1U\left(-t_r\right) - c_2U\left(t_r\right)\right] + 2(c_2 - c_1)\sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r U\left(-\frac{q}{p}t_r\right);$$

3. q — нечетное, p — нечетное:

$$F(a) = -2\sum_{r=p}^{q-1}(-1)^r\left[c_1U\left(-t_r\right) + c_2U\left(t_r\right)\right] + 2(c_2 - c_1)\sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r U\left(-\frac{q}{p}t_r\right).$$

Проверим утверждение теоремы для траекторий первого случая (при четном q). Для этого достаточно доказать, что коэффициент при члене первого порядка в разложении $F(a)$ в ряд Тейлора не равен нулю. Значение этого коэффициента равно

$$f_1 = \frac{2p}{p^2 - q^2} \sum_{r=0}^{q-1} (-1)^r \left[(p+q) U'(-t_r) - (p-q) U'(t_r) \right].$$

Рассмотрим значения f_1 при различных потенциалах.

а) $U' = x^k$:

$$f_1 = c_1 \left[(pa)^k - (pa-1)^k + (pa-2)^k - \ldots - (pa-q+1)^k \right]$$

Данное выражение — многочлен, имеющий не более $k-1$ корня. Следовательно, $f_1 \neq 0$.

б) $U' = 1/x$:

$$f_1 = c_2 \left[\frac{1}{pa} - \frac{1}{pa-1} + \frac{1}{pa-2} - \ldots - \frac{1}{pa-q+1} \right]$$

Рассмотрим $F_1(pa) = f_1(pa)/c_2$. При $[pa] = 1(mod 2)$ функция $F_1(pa)$ меньше нуля. Это следует из отрицательности выражений вида $\frac{1}{pa} - \frac{1}{pa-1}$. Далее можно заметить, что $F_1(pa) = -F_1(pa - 1) + \frac{1}{pa} - \frac{1}{pa-q}$. То есть, при $[pa] = 0(mod 2)$ отсюда следует, что $F_1(pa) > 0$.

в) $U' = k_1/x^{11} + k_2/x^5$ (U — потенциал Леннарда–Джонса):

$$f_1 = c_3 \sum_{r=0}^{q-1} (-1)^r \left[\frac{k_1 q^2 (p+q)}{(pa-r)^6} + k_2 (p-q) \right] \frac{1}{(pa-r)^5}.$$

Схема доказательства похожа на доказательство случая б). за тем исключением, что при некоторых соотношениях k_2/k_1 появляется конечное число нулевых значений функции f_1, что не нарушает утверждение теоремы.

Таким образом, возмущения не компенсируются во время движения по периодическим траекториям. Значит, вопрос об интегрируемости исходной задачи в случае ненулевого потенциала должен быть решен отрицательно. ■

Свойством траекторий движения механической системы с гамильтонианом (2.1) является их устойчивость в первом приближении при выполнении некоторых дополнительных условий.

Утверждение 1. *Предположим, что $\varepsilon \ll 1$. Траектории движения механической системы с гамильтонианом*

$$H = \frac{p^2}{2} + \varepsilon H_1(x, p)$$

устойчивы в первом приближении тогда и только тогда, когда

$$det \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_i \partial p_i} \right) \leqslant 0, \quad tr \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_i \partial p_i} \right) \leqslant 0.$$

Доказательство. Прежде, чем приступить к доказательству утверждения теоремы сделаем одно замечание, касающееся негладкости траекторий. Траектории можно сделать гладкими, если перейти к рассмотрению данной задачи на торе. Более подробное описание корректности данного перехода содержится в [1].

Рассмотрим уравнения в вариациях исходных уравнений движения $\dot{\xi} = A\xi$, где $A = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}\right)$. Далее составим характеристическое уравнение $A - \lambda E = 0$. После необходимых упрощений оно приобретает вид

$$\lambda^4 - \varepsilon\, tr \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_i \partial p_i}\right) \lambda^2 + \varepsilon^2 det \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_i \partial p_i}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Для того, чтобы корни уравнения (2.2) лежали а левой полуплоскости, то есть траектории движения системы (2.1) были устойчивы в первом приближении, необходимо и достаточно выполнения условий, указанных в утверждении теоремы. ■

В качестве примера можно рассмотреть симметричную периодическую траекторию, которая перпендикулярна сторонам треугольника. Понятно, что при добавлении возмущения условия устойчивости, описанные в формулировке теоремы, не нарушаются. Отсюда следует устойчивость траектории в первом приближении.

Однако, если мы исследуем систему на предмет устойчивости в некотором более общем смысле, то оказывается, что в целом траектории системы неустойчивы. Наглядное доказательство этого факта содержится в [1]. Оно основано на выпрямлении траекторий. То есть, в точке упругого удара о стенку биллиарда мы можем продолжить траекторию по непрерывности, симметрично отобразив внутренность биллиарда относительно этой стенки. Понятно, что при сколь угодно малом возмущении траектории системы расходятся на довольно большие расстояния.

Список литературы

[1] Kozlov V., Treshchev D. *Billiards. A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*, Transl. of Math. Monographs. V. 89, AMS, 1991.

[2] Пидкуйко, С. И. Вполне интегрируемые системы бильярдного типа, *УМН*, 1977, т. 32, вып. 1, с. 157–158.

[3] Hlawka E. Mathematische Modelle der kinetischen Gastheorie, Rheinisch-Westfälische Academie der Wissenschaften, *Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften*, V. 240. Westdeutscher Verlag, Opladen, 1974. pp. 361–545.

[4] Bunimovich, L. Kinematics, equilibrium, and shape in Hamiltonian systems: The “LAB” effect, *CHAOS*, 2003, vol. 13, № 3, pp. 903–912.

[5] Poincaré, H. Reflections sur la théorie cinétique des gaz, *J. Phys. théoret. et appl.*, 1906, vol. 5, pp. 369–403.

[6] Kozlov V. V. Kinetics of collisionless continuous medium, *Regul Chaotic Dyn.*, 2001, vol. 6, № 3, pp. 235–251.

[7] Mikkola S., Hietarinta J. Numerical investigation of the one-dimensional Newtonian three-body problem, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 1989, vol. 46, pp. 1–18.

[8] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995.