

Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений в вязко-эластичной трубке

Н. А. Кудряшов, Д. И. Синельщиков, И. Л. Чернявский

Московский инженерно-физический институт
115409, Россия, Москва, Каширское шоссе, 31
kudryashov@mephi.ru

Получено 30 ноября 2007 г.

Рассмотрена квази-одномерная модель течения жидкости в вязко-эластичной трубке. Предложена замкнутая система нелинейных уравнений для описания возмущений давления и радиуса при течении жидкости в вязко-эластичной трубке. Для анализа системы использованы техника метода многих масштабов и метод возмущений. Математическая модель исследовалась при больших числах Рейнольдса. В уравнении движения стенки трубки учтена кубическая поправка к закону Гука. Построены семейства нелинейных эволюционных уравнений для описания возмущений основных характеристик течения. Найдены точные решения некоторых нелинейных эволюционных уравнений.

Ключевые слова: вязко-эластичная трубка, нелинейные эволюционные уравнения, метод многих масштабов, точные решения

N. A. Kudryashov, D. I. Sinelshchikov, I. L. Chernyavsky Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube

A quasi-one-dimensional model of flow of a liquid in a viscoelastic tube is considered. A closed system of the nonlinear equations for the description of perturbations of pressure and radius is propose at flow of a liquid in a is viscoelastic tube. For the analysis of system technique of the multiscale method and the perturbation theory is used. The mathematical model was investigated in case of the large Reynolds numbers. In the equation of movement of a wall of a tube the cubic correction to Hooke's law is considered. Families of the nonlinear evolutionary equations for the description of perturbations of the basic characteristics of flow are obtained. Exact solutions of some nonlinear evolution equations are found.

Keywords: viscoelastic tube, nonlinear evolution equations, multiscale method, exact solutions
Mathematical Subject Classifications: 74D10, 35Q35, 34A05

1. Введение

Изучение нелинейных волновых процессов в вязко-эластичных трубках представляет интерес, поскольку такие трубки отражают некоторые особенности сосудов кровеносной системы и понимание волновых процессов в них может способствовать прогнозированию развития некоторых заболеваний [1–4].

Известно, что сосуды кровеносной системы выполняют проводящую и демпфирующую функцию [1, 5]. Проводящая функция отвечает за транспорт крови, обогащенной кислородом, а демпфирующая функция приводит к сглаживанию импульсов давления. Заболевания сердечно-сосудистой системы приводят к нарушению как первой, так и второй функций. Нарушением демпфирующей функции является атеросклероз, когда импульсы давления плохо сглаживаются из-за структурных изменений стенок сосудов, что приводит к повышению кровяного давления (гипертонии) и дополнительным разрушениям сосудов. Поэтому представляет интерес построение и анализ модели, учитывающей механические свойства стенок сосуда.

При построении и анализе моделей гемодинамики возникает ряд трудностей. Первая особенность связана с необходимостью учета нелинейных эффектов, возникающих при течении крови. С точки зрения реологии, кровь — это суспензия частиц в водном растворе [1, 6]. Другая сложность состоит в том, что необходимо учитывать многослойную структуру стенки сосуда и ее нелинейные вязкоупругие свойства. Третья трудность связана с тем, что в литературе представлено недостаточно данных по физическим параметрам, характеризующим модели гемодинамики, например вязкость стенки артерии и коэффициент нелинейной упругости.

Целью данной работы является анализ математической модели течения жидкости в вязко-эластичной трубке и вывод нелинейных эволюционных уравнений для описания пульсовых волн в вязко-эластичных трубках с учетом квадратичной и кубической поправки к закону Гука в уравнении состояния. Применение метода многих масштабов позволяет разделить и классифицировать влияние механических свойств системы на эволюцию пульсовых волн. При выводе нелинейных эволюционных уравнений учитывается малость некоторых параметров, входящих в уравнения движения стенки трубки, по сравнению с характерными длинами волн.

В данной работе рассматривается течение при больших числах Рейнольдса.

2. Система уравнений для описания волн в вязко-эластичных трубках

Экспериментальные исследования показывают, что, если скорость сдвига достаточно велика, кровь ведет себя как ньютоновская жидкость [1]. Поэтому большинство исследователей при моделировании течения крови используют уравнение Навье–Стокса [2, 3, 5, 7–10]. В качестве дополнительного упрощения предполагается, что течение крови происходит в цилиндрической трубке.

В данной работе рассматривается квази-одномерная модель движения жидкости в трубке, которая содержит в себе все основные физические характеристики системы кровь–стенка сосуда. Существенным моментом этой модели является так называемое «гидравлическое приближение» [9, 11], при котором предполагается, что осевая компонента скорости течения жидкости много больше, чем радиальная, а на границе выполнено условие равенства нулю компонент скорости. Данное приближение позволяет усреднить уравнения Навье–Стокса и уравнения непрерывности по поперечному сечению сосуда [9, 11].

Система уравнений для описания течения жидкости в вязко-эластичной трубке состоит из уравнения непрерывности и осевой компоненты двумерного уравнения Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{\partial(ur)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \nu_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $v = v(r, x, t)$ — радиальная, $u = u(r, x, t)$ — осевая компоненты скорости течения; ν_0 — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность жидкости, $P = P(x, t)$ — давление жидкости.

Предположим, что профиль осевой компоненты скорости по радиусу имеет вид обобщенного течения Гагена–Пуазейля [4]:

$$u(r, x, t) = \frac{s+2}{s} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^s \right] u_a(x, t), \quad u_a(x, t) = \frac{2}{R^2} \int_0^{R(x,t)} u(r, x, t) r \, dr.$$

Здесь s — показатель крутизны профиля, $R = R(x, t)$ — радиус трубки. Усредняя уравнения сохранения массы и импульса жидкости (2.1) по поперечному сечению трубки, аналогично [9] приходим к одномерным уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su_a)}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu_0 \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - 2\nu_0 (s+2) \frac{u_a}{R^2}. \quad (2.3)$$

Здесь $u_a = u_a(x, t)$ — средняя по сечению осевая компонента скорости, $S = S(x, t)$ — площадь поперечного сечения трубки. Далее индекс u скорости опускаем, полагая $u_a \equiv u$. Поскольку $S(x, t) = \pi R(x, t)^2$, то уравнение (2.2) преобразуется к виду

$$R_t + uR_x + 1/2 Ru_x = 0. \quad (2.4)$$

Учитывая малые возмущения радиуса трубки $\eta(x, t)$

$$R(x, t) = R_0 + \eta(x, t), \quad R_0 = const, \quad \|\eta\| \ll R_0,$$

из (2.4) получаем уравнение

$$\eta_t + 1/2 R_0 u_x + 1/2 \eta u_x + u \eta_x = 0. \quad (2.5)$$

Далее уравнения (2.3), (2.5) вместе с уравнением движения стенки трубки используются для описания течения жидкости в вязко-эластичной трубке.

3. Зависимость, связывающая давление в сосуде с его радиусом

Стенка кровеносного сосуда имеет сложную структуру и состоит из различных типов тканей с различными механическими характеристиками, одновременно сочетая в себе упругие свойства твердых тел с вязкими свойствами жидкостей. Причем строение различных слоев в стенке значительно меняется в зависимости от калибра и функции артерии. При построении математической модели будем учитывать наиболее существенные физические особенности системы. Важным фактором для демпфирования высокочастотных колебаний в потоке крови является вязко-эластичность стенки [5]. Также представляет интерес учет нелинейной упругости стенки артерии.

Необходимость учета этих свойств стенки отмечалась в работах [1, 12–14]. Будем предполагать, что стенка трубки однородна, изотропна, несжимаема и состоит из вязко-эластичного материала. Деформация трубки характеризуется изменением ее радиуса, который зависит от координаты и времени; деформации стенки предполагаются малыми по сравнению с радиусом трубки, а характерные длины волн много больше равновесного радиуса. Уравнение, связывающее давление с радиусом трубки, можно представить в виде [15]:

$$P - P_e = \rho_w h_0 \eta_{tt} - k h_0 \eta_{xx} - \chi h_0 \eta_{txx} + \mu \eta_t + \frac{\varkappa h_0}{R_0} \eta + \frac{\varkappa_3 h_0}{R_0^2} \eta^2 + \frac{\varkappa_4 h_0}{R_0^3} \eta^3. \quad (3.1)$$

$$\varkappa_3 \equiv \varkappa_1 R_0 - 2\varkappa, \quad \varkappa_4 \equiv \varkappa_2 R_0^2 - 2\varkappa_1 R_0 + 3\varkappa$$

Здесь ρ_w — объемная плотность стенки трубки, h_0 — толщина невозмущенной стенки, k — коэффициент, характеризующий продольные напряжения стенки, χ — коэффициент вязкости материала трубки (аналогичный динамической вязкости жидкости), μ — коэффициент пропорциональности силы сопротивления среды при движении стенки трубки, \varkappa — коэффициент линейной упругости, характеризующий растяжение элемента трубки, \varkappa_1 — коэффициент нелинейной упругости (квадратичная добавка к закону Гука), \varkappa_2 — коэффициент при кубической добавке к закону Гука.

Ниже ограничимся анализом нелинейных волн в длинноволновом приближении и при больших числах Рейнольдса, которое справедливо для крупных и средних артерий [7, 16].

В этом случае для описания квази-одномерного течения жидкости в аксиально-симметричной вязко-эластичной трубке из (2.3), (2.5) и (3.1) имеем замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} \eta_t + 1/2 R_0 u_x + 1/2 \eta u_x + u \eta_x &= 0 \\ u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} P_x &= 0 \\ P &= \rho_w h_0 \eta_{tt} - k h_0 \eta_{xx} - \chi h_0 \eta_{txx} + \mu \eta_t + \\ &+ \frac{\varkappa h_0}{R_0} \eta + \frac{\varkappa_2 h_0}{R_0^2} \eta^2 + \frac{\varkappa_4 h_0}{R_0^3} \eta^3 + P_e. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} t &= \frac{l}{c_0} t', \quad x = l x', \quad u = c_0 u', \quad \eta = \frac{R_0}{2} \eta', \\ P &= P_0 P' + P_0, \quad P_0 = P_e. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь l — характерная длина волн давления,

$$c_0 = \sqrt{\frac{\varkappa h_0}{2\rho}} = \sqrt{\frac{E h_0}{2\rho R_0(1 - \sigma^2)}} \quad (3.4)$$

— скорость Моенса–Кортевега, E — модуль Юнга стенки артерии, σ — коэффициент Пуассона.

Система уравнений (3.2) в безразмерных переменных (штрихи опущены) имеет вид:

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x + \frac{1}{2} \eta u_x + u \eta_x &= 0, \\ u_t + u u_x + \frac{1}{\alpha} P_x &= 0, \\ P &= \gamma \eta_{tt} - \beta \eta_{xx} + \lambda \eta_t - \delta \eta_{txx} + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2 + \alpha_2 \eta^3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho c_0^2}{P_0}, \quad \beta = \frac{kh_0 R_0}{2P_0 l^2}, \quad \gamma = \frac{\rho_w h_0 R_0 c_0^2}{2P_0 l^2}, \\ \delta &= \frac{\chi h_0 R_0 c_0}{2P_0 l^3}, \quad \lambda = \frac{\mu R_0 c_0}{2P_0 l}, \quad \alpha_1 = \frac{\varkappa_1 h_0 R_0}{4P_0} - \alpha, \\ \alpha_2 &= \frac{\varkappa_2 h_0 R_0^2}{8P_0} - \frac{\varkappa_1 h_0 R_0}{4P_0} + \frac{3}{4}\alpha. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Система уравнений (3.5) далее используется для вывода нелинейных эволюционных уравнений, описывающих распространение возмущений в вязко-эластичной трубке.

4. Нелинейные эволюционные уравнения с учетом квадратичной поправки к закону Гука

Остановимся на выводе семейства нелинейных эволюционных уравнений, учитывая малость параметров, входящих в уравнение состояния, по сравнению с характерными длинами волн. При этом будем предполагать, что в уравнении (3.5) коэффициент $\alpha_2 = 0$.

В системе уравнений (3.5) имеются малые параметры $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon_1 = a_0/R_0$, $\varepsilon_2 = R_0/l$), где a_0 — характерная амплитуда возмущений радиуса. Все коэффициенты (3.6), характеризующие механические свойства стенки трубки, кроме коэффициента α , также являются малыми. Значение этих параметров зависит от калибра артерии. Для исследования системы (3.5) воспользуемся асимптотическими методами. Большинство нелинейных эволюционных уравнений можно получить, используя технику метода многих масштабов и метод возмущений, которые позволяют выделить характерные длины и времена волновых процессов и учесть влияние коэффициентов (3.6) при анализе возмущений.

Поскольку скорость пульсовых волн велика, по сравнению со скоростью течения жидкости, удобно перейти к переменным «медленного времени», выделив направление распространения волны. В качестве параметра ε выберем наименьший из ε_1 и ε_2 . Будем искать решение системы уравнений (3.5), используя переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon^m(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{m+1} t, \quad m > 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{m+1} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в (3.5) и сокращая на ε^m в первых двух уравнениях, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \eta_\tau - \eta_\xi + u_\xi + \frac{1}{2} \eta u_\xi + u \eta_\xi &= 0, \\ \varepsilon u_\tau - u_\xi + u u_\xi + \frac{1}{\alpha} P_\xi &= 0, \\ P &= \varepsilon^{2m+2} \gamma \eta_{\tau\tau} - \varepsilon^{2m+1} 2\gamma \eta_{\tau\xi} + \varepsilon^{2m} (\gamma - \beta) \eta_{\xi\xi} + \varepsilon^{m+1} \lambda \eta_\tau - \\ &- \varepsilon^m \lambda \eta_\xi - \varepsilon^{3m+1} \delta \eta_{\tau\xi\xi} + \varepsilon^{3m} \delta \eta_{\xi\xi\xi} + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Представим решение системы (4.2) в виде разложения по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots, \\ \eta &= \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + \dots, \\ P &= \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \dots \end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.2) и приравнявая коэффициенты при ε , получаем уравнения

$$-\eta_{1\xi} + u_{1\xi} = 0, \quad -u_{1\xi} + \frac{1}{\alpha} P_{1\xi} = 0, \quad P_1 = \alpha \eta_1.$$

Откуда находим

$$u_1(\xi, \tau) = \eta_1(\xi, \tau) + \psi(\tau), \quad P_1(\xi, \tau) = \alpha \eta_1(\xi, \tau), \quad (4.4)$$

где $\psi(\tau)$ — произвольная функция. Нас интересуют только те решения, которые при $\xi \rightarrow \pm\infty$ обращаются в ноль, поэтому полагаем $\psi(\tau) = 0$.

Подставляя (4.3) в (4.2) и приравнявая коэффициенты при ε^2 , получаем уравнения

$$\eta_{1\tau} - \eta_{2\xi} + u_{2\xi} + \frac{1}{2}\eta_1 u_{1\xi} + u_1 \eta_{1\xi} = 0,$$

$$u_{1\tau} - u_{2\xi} + u_1 u_{1\xi} + \frac{1}{\alpha} P_{2\xi} = 0,$$

$$P_2 = \alpha \eta_2 + \alpha_1 \eta_1^2 + \varepsilon^{2m-1}(\gamma - \beta) \eta_{1\xi\xi} + \varepsilon^{3m-1} \delta \eta_{1\xi\xi\xi} - \varepsilon^{m-1} \lambda \eta_{1\xi}.$$

Откуда с учетом соотношений (4.4) находим

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \eta_1 \eta_{1\xi} + \varepsilon^{2m-1} \left(\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}\right) + \varepsilon^{3m-1} \left(\frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi}\right) = \varepsilon^{m-1} \left(\frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi}\right). \quad (4.5)$$

Рассмотрим специальные случаи значений параметров, входящих в уравнение (4.5). Далее, если малость коэффициентов $\frac{\lambda}{\alpha}$, $\frac{\gamma - \beta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha}$ специально не оговаривается, то полагаем их порядка единицы ($O(1)$).

1. При $m = 1$ основное уравнение (4.5) переходит в уравнение Бюргерса

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \eta_1 \eta_{1\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}. \quad (4.6)$$

Воспользовавшись соотношениями (3.6), можно выразить безразмерные коэффициенты уравнения (4.6) через физические параметры модели. Коэффициент при второй производной в уравнении (4.6) имеет вид

$$\frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{R_0}{4\rho l c_0} \mu.$$

Таким образом, затухание волны, описываемой уравнением (4.6), пропорционально коэффициенту сопротивления среды при движении стенки сосуда.

Приближенное решение исходной системы уравнений (3.5), с учетом (4.1), (4.3) и (4.4), выражается через решения уравнения Бюргерса следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ u(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon u_1(\xi, \tau) \simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ P(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon P_1(\xi, \tau) = \varepsilon \alpha \eta_1(\xi, \tau), \\ \xi &= \varepsilon(x - t), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \end{aligned}$$

Уравнение Бюргерса (4.6) в настоящее время хорошо изучено. Преобразованием Коула—Хопфа [17, 18] уравнение (4.6) приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$u = -\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial \ln Z}{\partial x}, \quad Z_t = \frac{\lambda}{2\alpha} Z_{xx}.$$

Решая многочисленные задачи для линейного уравнения теплопроводности по формуле Коула–Хопфа, получаем решения уравнения Бюргерса.

2. При $m = \frac{1}{2}$, $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon)$ из (4.5) получаем уравнение Кортевега де Вриза

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \eta_1 \eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} = 0. \quad (4.7)$$

Используя (3.4) и (3.6), коэффициент при дисперсионном члене можно представить в виде

$$\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{l}\right)^2 \left[\frac{h_0}{R_0} \frac{\rho_w}{\rho} - 2(1 - \sigma^2) \frac{\sigma_{xx}}{E} \right].$$

Таким образом, значение коэффициента дисперсии определяется отношением плотностей стенки и жидкости и отношением продольного напряжения стенки к ее модулю упругости.

Условие $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon)$ на безразмерный коэффициент в уравнении (4.5) означает случай, когда силами сопротивления среды можно пренебречь и основным фактором при распространении пульсовых волн являются упругие свойства стенки сосуда.

Приближенное решение исходной системы уравнений (3.5) определяется из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ u(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon u_1(\xi, \tau) \simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ P(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon P_1(\xi, \tau) = \varepsilon \alpha \eta_1(\xi, \tau), \\ \xi &= \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t. \end{aligned}$$

Уравнение (4.7) было получено в 1895 Кортевегом и де Вризом для описания длинных волн на воде [19] и относится к классу точно решаемых уравнений. Свойства уравнения Кортевега–де Вриза хорошо изучены. Решение задачи Коши для него находится методом обратной задачи рассеяния [20, 21].

3. Для $m = \frac{1}{3}$, $\frac{\lambda}{2\alpha} = O(\varepsilon)$, $\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} = O(\varepsilon^{2/3})$ уравнение (4.5) переходит в уравнение четвертого порядка

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \eta_1 \eta_{1\xi} + \frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.8)$$

Используя (3.4) и (3.6), получим, что коэффициент при четвертой производной имеет вид

$$\frac{\delta}{2\alpha} = \frac{h_0 R_0}{4\rho l^3 c_0} \chi.$$

Таким образом, затухание амплитуды волны, описываемой уравнением (4.8), пропорционально коэффициенту вязкости материала трубки.

Условия $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon)$, $\frac{\gamma - \beta}{\alpha} = O(\varepsilon^{2/3})$ реализуются, когда определяющую роль играют вязкие свойства стенки сосуда, а эффекты, связанные с сопротивлением среды и упругими свойствами стенки трубки, пренебрежимо малы.

Приближенное решение исходной системы уравнений (3.5) выражается формулами

$$\begin{aligned}\eta(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ u(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon u_1(\xi, \tau) \simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ P(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon P_1(\xi, \tau) = \varepsilon \alpha \eta_1(\xi, \tau), \\ \xi &= \varepsilon^{1/3}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{4/3}t.\end{aligned}$$

Уравнение (4.8) было получено и проанализировано в работе [15]. Оно не является точно решаемым, но с помощью метода простейших уравнений [22] для него можно найти некоторый набор частных решений.

4. В случае $m = 1/2$, $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon^{1/2})$ получаем уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi}. \quad (4.9)$$

Условие $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon^{1/2})$ соответствует тому, что в качестве основных факторов при распространении пульсовых волн выделяются упругие свойства стенки сосуда и сопротивление среды, при доминировании упругих сил.

Приближенное решение исходной системы уравнений (3.5) выражается через решения уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза в виде

$$\begin{aligned}\eta(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ u(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon u_1(\xi, \tau) \simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ P(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon P_1(\xi, \tau) = \varepsilon \alpha \eta_1(\xi, \tau), \\ \xi &= \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t.\end{aligned}$$

Уравнение (4.9) также хорошо изучено. Оно является обобщением уравнения Кортевега де Вриза и возникает при учете диссипативных процессов. Уравнение (4.9) не относится к классу точно решаемых уравнений, но для него также известен некоторый набор частных решений [21, 23].

5. При $m = 1/3$, $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon)$, $\frac{\gamma - \beta}{\alpha} = O(\varepsilon^{1/3})$ имеем уравнение четвертого порядка в виде

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{\delta}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (4.10)$$

Здесь в качестве основных факторов при распространении возмущений выделяются упругие и вязкие свойства стенки сосуда.

Приближенное решение исходной системы уравнений (3.5) выражается формулами

$$\begin{aligned}\eta(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ u(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon u_1(\xi, \tau) \simeq \varepsilon \eta_1(\xi, \tau), \\ P(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon^3 P_1(\xi, \tau) = \varepsilon \alpha \eta_1(\xi, \tau), \\ \xi &= \varepsilon^{1/3}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{4/3}t.\end{aligned}$$

6. Для $m = 1/3$, $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon^{2/3})$, $\frac{\gamma - \beta}{\alpha} = O(\varepsilon^{2/3})$ основное уравнение (4.5) переходит в уравнение четвертого порядка

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{\delta}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi}. \quad (4.11)$$

Здесь в качестве основных факторов при распространении пульсовых волн выделяются вязкие свойства стенки сосуда и сопротивление среды.

Приближенное решение исходной системы уравнений (3.5) определяется из соотношений

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon\eta_1(\xi, \tau), \\ u(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon u_1(\xi, \tau) \simeq \varepsilon\eta_1(\xi, \tau), \\ P(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon P_1(\xi, \tau) = \varepsilon\alpha\eta_1(\xi, \tau), \\ \xi &= \varepsilon^{1/3}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{4/3}t. \end{aligned}$$

7. В случае $m = 1/3$, $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon^{2/3})$, $\frac{\gamma - \beta}{\alpha} = O(\varepsilon^{1/3})$ получаем уравнение четвертого порядка, являющееся обобщением уравнения Курамото–Сивашинского:

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\eta_1\eta_{1\xi} - \frac{\lambda}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{\delta}{2\alpha}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (4.12)$$

При выводе (4.12) учитываются все основные факторы, влияющие на распространение возмущений в стенке сосуда.

Приближенное решение исходной системы уравнений (3.5) выражается через решения уравнения (4.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon\eta_1(\xi, \tau), \\ u(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon u_1(\xi, \tau) \simeq \varepsilon\eta_1(\xi, \tau), \\ P(\xi, \tau) &\simeq \varepsilon P_1(\xi, \tau) = \varepsilon\alpha\eta_1(\xi, \tau), \\ \xi &= \varepsilon^{1/3}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{4/3}t. \end{aligned}$$

Уравнение (4.12) не является точно решаемым, но для него известны решения в виде периодических и уединенных волн [23–25]. Уравнения (4.11), (4.10) являются частными случаями уравнения (4.12) и обладают аналогичными свойствами.

5. Нелинейные эволюционные уравнения с учетом кубической поправки к закону Гука

Рассмотрим нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений, возникающих в артериях среднего и крупного калибра, с учетом кубической поправки к закону Гука в уравнении движения стенки ($\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ в (3.1)).

Для получения семейства нелинейных эволюционных уравнений используем систему уравнений

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x + \frac{1}{2}\eta u_x + u\eta_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\alpha}P_x &= 0, \\ P &= \gamma\eta_{tt} - \beta\eta_{xx} + \lambda\eta_t - \delta\eta_{txx} + \alpha\eta + \alpha_1\eta^2 + \alpha_2\eta^3. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Переходя в (5.1) к переменным «медленного времени», выделяя направления распространения волны

$$\begin{aligned}\xi &= \varepsilon^m(x-t), \quad \tau = \varepsilon^{m+2}t, \quad m > 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{m+2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (5.2)$$

и сокращая на ε^m в первых двух уравнениях, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \eta_\tau - \eta_\xi + u_\xi + \frac{1}{2} \eta u_\xi + u \eta_\xi &= 0, \\ \varepsilon^2 u_\tau - u_\xi + u u_\xi + \frac{1}{\alpha} P_\xi &= 0, \\ P &= \varepsilon^{2(m+2)} \gamma \eta_{\tau\tau} - \varepsilon^{2m+2} 2\gamma \eta_{\tau\xi} + \varepsilon^{2m} (\gamma - \beta) \eta_{\xi\xi} + \varepsilon^{m+2} \lambda \eta_\tau - \\ &\quad - \varepsilon^m \lambda \eta_\xi - \varepsilon^{3m+2} \delta \eta_{\tau\xi\xi} + \varepsilon^{3m} \delta \eta_{\xi\xi\xi} + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2 + \alpha_2 \eta^3.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Решение системы (5.3) будем искать в виде

$$\begin{aligned}u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots, \\ \eta &= \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + \dots, \\ P &= \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \dots\end{aligned}\quad (5.4)$$

Учитывая соотношения (5.4), в первом приближении получаем

$$-\eta_1 \xi + u_1 \xi = 0, \quad -u_1 \xi + \frac{1}{\alpha} P_1 \xi = 0, \quad P_1 = \alpha \eta_1.$$

Интегрируя один раз по ξ , находим

$$u_1(\xi, \tau) = \eta_1(\xi, \tau) \quad P_1(\xi, \tau) = \alpha \eta_1(\xi, \tau).\quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) в (5.3), во втором приближении получаем уравнения

$$\begin{aligned}-\eta_2 \xi + u_2 \xi + \frac{1}{2} \eta_1 u_1 \xi + u_1 \eta_1 \xi &= 0, \\ -u_2 \xi + u_1 u_1 \xi + \frac{1}{\alpha} P_2 \xi &= 0, \\ P_2 &= \alpha \eta_2 + \alpha_1 \eta_1^2.\end{aligned}$$

Откуда при $5\alpha + 4\alpha_1 \simeq 0$ с учетом (5.5) имеем соотношения

$$\begin{aligned}u_2(\xi, \tau) &= \eta_2(\xi, \tau) - \frac{3}{4} \eta_1^2(\xi, \tau), \\ P_2(\xi, \tau) &= \alpha \eta_2(\xi, \tau) + \alpha_1 \eta_1^2(\xi, \tau).\end{aligned}\quad (5.6)$$

В выражениях (5.5) и (5.6) произвольная функция от τ не учитывается, так как интересуемся решениями, которые при $\xi \rightarrow \pm\infty$ обращаются в ноль.

Учитывая соотношения (5.4) из системы (5.3), в третьем приближении находим

$$\begin{aligned}\eta_{1\tau} - \eta_{3\xi} + u_{3\xi} + \frac{1}{2} \eta_2 u_{1\xi} + \frac{1}{2} \eta_1 u_{2\xi} + u_1 \eta_{2\xi} + u_2 \eta_{1\xi} &= 0, \\ u_{1\tau} - u_{3\xi} + u_1 u_{2\xi} + u_2 u_{1\xi} + \frac{1}{\alpha} P_{3\xi} &= 0, \\ P_3 &= \alpha \eta_3 + 2\alpha_1 \eta_1 \eta_2 + \alpha_2 \eta_1^3 + \varepsilon^{2m-2} (\gamma - \beta) \eta_{1\xi\xi} + \varepsilon^{3m-2} \delta \eta_{1\xi\xi\xi} - \varepsilon^{m-2} \lambda \eta_{1\xi}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Подставляя соотношения (5.5) и (5.6) в (5.7), приходим к уравнению

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8}\right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} + \varepsilon^{2m-2} \left(\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi}\right) + \varepsilon^{3m-2} \left(\frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi}\right) = \varepsilon^{m-2} \left(\frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}\right). \quad (5.8)$$

Рассмотрим специальные случаи значений параметров уравнения (5.8).

1. В случае $m = 2$ уравнение (5.8) переходит в модифицированное уравнение Бюргерса

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8}\right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}. \quad (5.9)$$

Порядок полюса решения уравнения (5.9) равен $3/2$, и, следовательно, уравнение не имеет свойства Пенлеве. В переменных бегущей волны $\eta_1(x, t) = y(z)$, $z = x - C_0 t$ уравнение (5.9) (после интегрирования по z) имеет вид:

$$\frac{1}{3} \kappa y^3 - \nu y_z - C_0 y = 0, \quad \kappa = \frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2\alpha}. \quad (5.10)$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю. Решение уравнения (5.10) имеет вид

$$y(z) = \pm \sqrt{\frac{3C_0}{e^{\frac{2C_0(z+3\nu C_1)}{\nu}} + \kappa}}.$$

2. При $m = 1$, $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon^2)$ получаем модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза:

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8}\right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} = 0. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) имеет солитонные решения. Задача Коши для него решается методом обратной задачи рассеяния [21, 26].

3. Для $m = \frac{2}{3}$, $\frac{\lambda}{\alpha} = O(\varepsilon^{5/3})$, $\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} = O(\varepsilon^1)$ основное уравнение переходит в уравнение четвертого порядка

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8}\right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} + \frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) в переменных бегущей волны $\eta_1(x, t) = y(z)$, $z = x - C_0 t$ после интегрирования по z принимает вид

$$\frac{1}{3} \kappa y^3 + \nu y_{zzz} - C_0 y = 0, \quad \kappa = \frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8}, \quad \nu = \frac{\delta}{2\alpha}. \quad (5.13)$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю. Проверим уравнение на свойство Пенлеве [21]. Полагая $y = a_0/(z - z_0)^p$, получаем $p = 3/2$, $a_0 = \pm \frac{3}{2} \left(\frac{35\nu}{2\kappa}\right)^{1/2}$. Так как p не целое, то уравнение (5.12) не является точно решаемым. Однако (5.12) имеет некоторый набор частных решений, которые могут быть получены с помощью метода простейших уравнений [22, 27].

Произведя в уравнении (5.13) замену $y(z) = v(z)^{\frac{1}{2}}$, получим:

$$-C_0 v^3 + \frac{k}{3} v^4 + \frac{3\nu}{8} v_z^3 - \frac{3\nu}{4} v v_z v_{zz} + \frac{1\nu}{2} v^2 v_{zzz} = 0. \quad (5.14)$$

Будем искать решение уравнения (5.14) в виде:

$$v(z) = a_0 + a_1 w(z) + a_2 w(z)^2 + a_3 w(z)^3, \quad (5.15)$$

где функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$w_z = -w^2 + Aw + B. \quad (5.16)$$

Подставляя (5.16) и (5.15) в уравнение (5.14) находим коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1^2}{3a_0}, \quad a_3 = \frac{a_1^3}{27a_0^2}, \quad A = -\frac{6a_0}{a_1}, \quad B = -\frac{9a_0^2}{a_1^2}, \\ k &= \frac{105 C_0 a_1^6}{52 a_0 (-63 a_0 + a_1^2) (a_1^4 - 126 a_1^2 a_0 - 7938 a_0^2)}, \\ \nu &= \frac{2 C_0 a_1^9}{1053 a_0^3 (-63 a_0 + a_1^2) (a_1^4 - 126 a_1^2 a_0 - 7938 a_0^2)}, \\ a_0 &\neq \frac{a_1^2}{63}, \frac{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a_1^2}{63}. \end{aligned}$$

Точное решение уравнения (5.12) имеет вид:

$$\eta(\xi, \tau) = \frac{1}{3\sqrt{3}a_0} \left(\frac{a_1}{\xi - C_0\tau + C_1} \right)^{3/2}.$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная.

4. В случае $m = 1$, $\frac{\lambda}{2\alpha} = O(\varepsilon^1)$ из (5.8) получаем модифицированное уравнение Бюргерса—Кортевега де Вриза

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8} \right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}. \quad (5.17)$$

Уравнение (5.17) является обобщением модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза (5.11) на случай учета диссипации. Оно не является точно решаемым, но имеет частные решения [27].

5. При $m = \frac{2}{3}$, $\frac{\lambda}{2\alpha} = O(\varepsilon^{4/3})$, $\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} = O(\varepsilon^1)$ уравнение (5.8) переходит в уравнение четвертого порядка

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8} \right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} + \frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}. \quad (5.18)$$

6. Для $m = \frac{2}{3}$, $\frac{\lambda}{2\alpha} = O(\varepsilon^{5/3})$, $\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} = O(\varepsilon^{2/3})$ уравнение (5.8) принимает вид

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8} \right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (5.19)$$

7. В случае $m = \frac{2}{3}$, $\frac{\lambda}{2\alpha} = O(\varepsilon^{4/3})$, $\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} = O(\varepsilon^{2/3})$ из уравнения (5.8) получаем уравнение четвертого порядка в виде

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8} \right) \eta_1^2 \eta_{1\xi} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}. \quad (5.20)$$

Для поиска точных решений уравнения (5.20) воспользуемся методом простейших уравнений [22, 27]. Переходя к переменным бегущей волны $\eta_1(x, t) = y(z)$, $z = x - C_0 t$ и интегрируя один раз по z , получим

$$-C_0 y + \frac{1}{3} \kappa y^3 + \mu y_z + \theta y_{zz} + \nu y_{zzz} = 0, \quad (5.21)$$

$$\kappa = \frac{3\alpha_2}{2\alpha} - \frac{15}{8}, \quad \mu = -\frac{\lambda}{2\alpha}, \quad \theta = \frac{\gamma - \beta}{2\alpha}, \quad \nu = \frac{\delta}{2\alpha}.$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю.

Уравнение (5.21) можно привести к виду [21, 27]

$$-C_0 y + \frac{1}{3} \kappa' y^3 + y_z + \theta' y_{zz} + y_{zzz} = 0, \quad (5.22)$$

$$\kappa' = \frac{\kappa \sqrt{\nu}}{\mu \sqrt{\mu}}, \quad \theta' = \frac{\theta}{\mu \sqrt{\mu \nu}}.$$

Произведя в (5.22) замену $y(z) = v(z)^{\frac{1}{2}}$, получим

$$-C_0 v^3 + \frac{\kappa'}{3} v^4 + \frac{1}{2} v^2 v_z - \frac{\theta'}{4} v v_z^2 + \frac{\theta'}{2} v^2 v_{zz} + \frac{3}{8} v_z^3 - \frac{3}{4} v v_z v_{zz} + \frac{1}{2} v^2 v_{zzz} = 0. \quad (5.23)$$

Решение уравнения (5.23) будем искать в виде

$$v(z) = a_0 + a_1 w(z) + a_2 w(z)^2 + a_3 w(z)^3, \quad (5.24)$$

где функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$w_z = -w^2 + B. \quad (5.25)$$

Общее решение уравнения (5.25) представляется формулой

$$w(z) = \sqrt{B} \operatorname{th}\{\sqrt{B}(z + C_1)\}. \quad (5.26)$$

Подставляя (5.24), (5.25) в уравнение (5.23), находим коэффициенты

$$\begin{aligned} \theta' &= \pm \frac{\sqrt{55}}{11}, \quad B = \frac{5}{11}, \quad a_3 = \frac{315}{8\kappa'}, \quad a_2 = \mp \frac{63\sqrt{55}}{88\kappa'}, \\ a_1 &= -\frac{1323}{88\kappa'}, \quad a_0 = \pm \frac{567\sqrt{55}}{968\kappa'}, \quad C_0 = \pm \frac{21\sqrt{55}}{121}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{315}{8\kappa'}, \quad a_2 = \mp \frac{315\sqrt{2}}{16\kappa'}, \\ a_1 &= -\frac{315}{16\kappa'}, \quad a_0 = \pm \frac{315\sqrt{2}}{32\kappa'}, \quad C_0 = \pm 2\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \pm \frac{15\sqrt{71}}{71}, \quad B = \frac{1}{71}, \quad a_3 = \frac{315}{8\kappa'}, \quad a_2 = \mp \frac{945\sqrt{71}}{568\kappa'}, \\ a_1 &= -\frac{945}{568\kappa'}, \quad a_0 = \mp \frac{315\sqrt{71}}{40328\kappa'}, \quad C_0 = \mp \frac{105\sqrt{71}}{5041}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \pm \frac{45\sqrt{374}}{374}, \quad B = \frac{1}{374}, \quad a_3 = \frac{315}{8\kappa'}, \quad a_2 = \mp \frac{2835\sqrt{374}}{2992\kappa'}, \\ a_1 &= -\frac{4725}{2992\kappa'}, \quad a_0 = \pm \frac{7875\sqrt{374}}{1119008\kappa'}, \quad C_0 = \pm \frac{105\sqrt{374}}{34969}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Используя формулу (5.26) и учитывая соотношения (5.24), (5.27), получаем точное решение уравнения (5.22):

$$\begin{aligned} y(z) &= \left(\frac{63\sqrt{55}}{968\kappa'} \left[\pm 9 - 21 \operatorname{th} \left\{ \frac{\sqrt{55}}{11}(z + C_1) \right\} \right. \right. \\ &\left. \left. \mp 5 \operatorname{th}^2 \left\{ \frac{\sqrt{55}}{11}(z + C_1) \right\} + 25 \operatorname{th}^3 \left\{ \frac{\sqrt{55}}{11}(z + C_1) \right\} \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

График зависимости решения (5.31) от z и параметра ν при $C_1 = 1$ изображен на рис. 1.

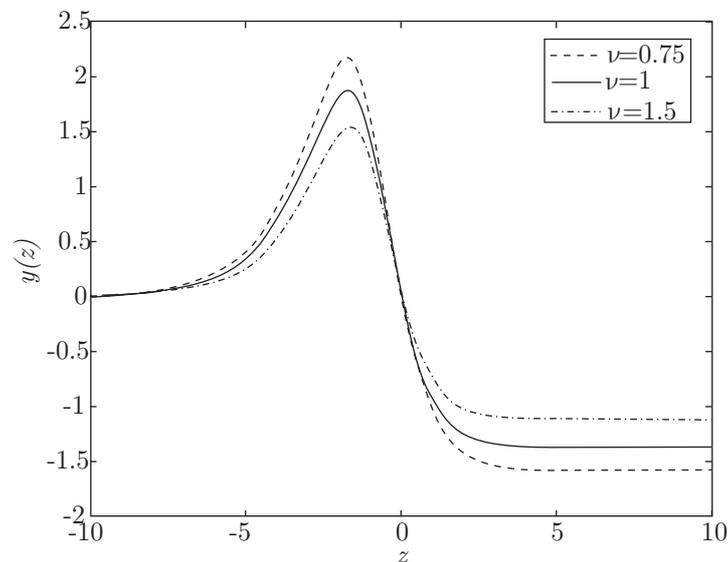


Рис. 1. Зависимость решения (5.31) уравнения (5.20) от переменной бегущей волны

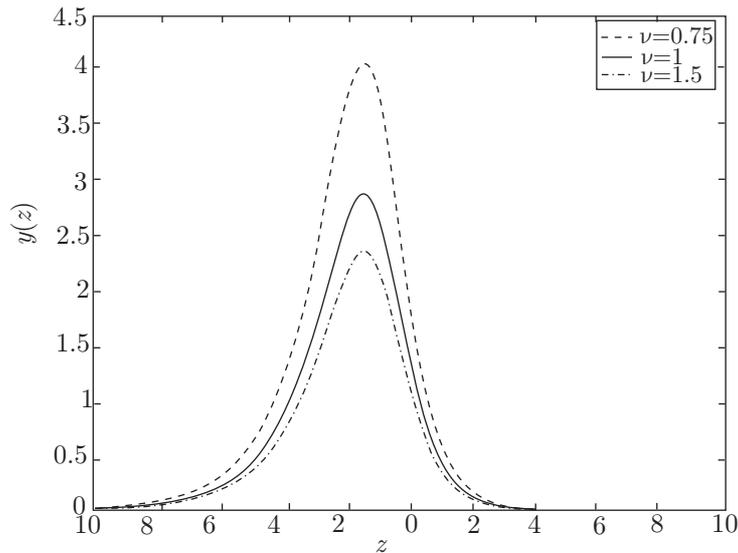


Рис. 2. Зависимость решения (5.32) уравнения (5.20) от переменной бегущей волны

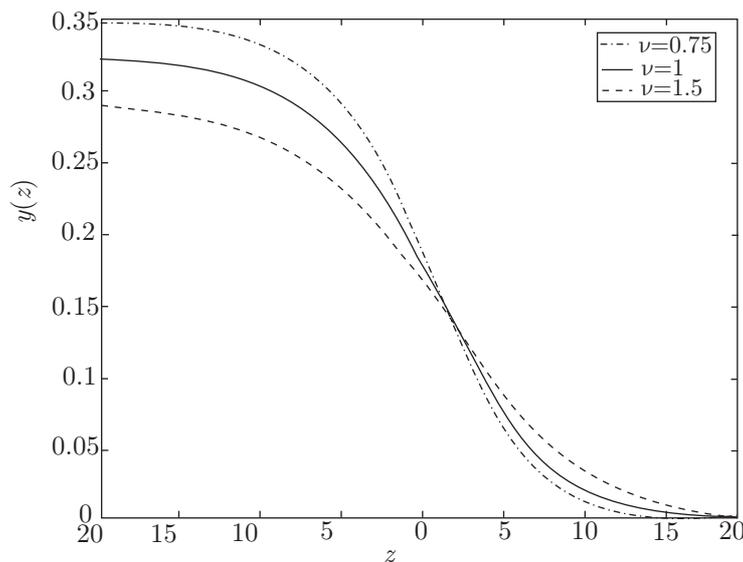


Рис. 3. Зависимость решения (5.33) уравнения (5.20) от переменной бегущей волны

Аналогично с помощью формул (5.28) и (5.26) приходим к семейству решений уравнения (5.22):

$$y(z) = \left(\frac{315\sqrt{2}}{32\kappa'} \left[\operatorname{th} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (z + C_1) \right\} \pm 1 \right] \left[\operatorname{th} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (z + C_1) \right\} \mp 1 \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.32)$$

Решение (5.32) является уединенной волной. Зависимость решения (5.32) от z при $C_1 = 1$ иллюстрируется на рис. 2.

Из рис. 1, рис. 2 видно, что с ростом вязкости стенки сосуда амплитуда волны убывает.

Подставляя (5.29), (5.30) в формулу (5.24) и учитывая соотношение (5.26), получаем два семейства решений уравнения (5.22):

$$y(z) = \left(\frac{315\sqrt{71}}{40328\kappa'} \left[\mp 1 + 3 \operatorname{th} \left\{ \frac{\sqrt{71}}{71}(z + C_1) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. \mp 3 \operatorname{th}^2 \left\{ \frac{\sqrt{71}}{71}(z + C_1) \right\} + \operatorname{th}^3 \left\{ \frac{\sqrt{71}}{71}(z + C_1) \right\} \right] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.33)$$

$$y(z) = \left(\frac{315\sqrt{374}}{1119008\kappa'} \left[\mp 25 + 15 \operatorname{th} \left\{ \frac{\sqrt{374}}{374}(z + C_1) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. \mp 9 \operatorname{th}^2 \left\{ \frac{\sqrt{374}}{374}(z + C_1) \right\} + \operatorname{th}^3 \left\{ \frac{\sqrt{374}}{374}(z + C_1) \right\} \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.34)$$

Решения (5.33), (5.34) представляют собой волновой фронт. График зависимости решения (5.33) уравнения (5.20) от z и параметра ν при $C_1 = 1$ иллюстрируется на рис. 3. Из рис. 3 видно, что с ростом коэффициента вязкости стенки сосуда профиль волны сглаживается и ее амплитуда убывает.

6. Заключение

В данной работе изучалось распространение возмущений в вязко-эластичной трубке. Рассмотрено приближение невязкой, несжимаемой жидкости. С помощью метода многих масштабов и теории возмущений получен набор эволюционных уравнений для описания распространения волн давления (4.6)–(4.12), (5.9)–(5.20).

Предложенная модель позволяет проанализировать различные случаи значений малости физических параметров, входящих в математическую модель, и получить отвечающие им различные типы нелинейных эволюционных уравнений, встречающихся при описании волн.

В момент времени t порядка $\varepsilon^{-4/3}$ распространение нелинейных волн, в зависимости от физических свойств стенки трубки, подчиняется одному из уравнений (4.8), (4.10)–(4.12). На этом этапе характерно расплывание (демпфирование) волны. Главным фактором при этом становятся вязкие свойства стенки. Наиболее общим уравнением, сочетающим в себе характерные свойства стенки сосуда, является обобщенное уравнение (4.12). На втором этапе ($t \sim \varepsilon^{-3/2}$) распространение пульсовых волн подчиняется либо уравнению Кортевега–де Вриза, либо уравнению Бюргерса–Кортевега–де Вриза. В случае когда силами сопротивления среды можно пренебречь, нелинейные волны распространяются без искажения формы (уравнение Кортевега–де Вриза). Определяющим фактором здесь являются чисто упругие свойства стенки сосуда. Если принять во внимание диссипативные процессы, то распространение возмущений описывается уравнением Бюргерса–Кортевега–де Вриза. Основными факторами при этом являются упругие свойства стенки и сопротивление среды при движении стенки. На третьем этапе ($t \sim \varepsilon^{-2}$) распространение возмущений происходит в соответствии с уравнением Бюргерса. Основным фактором на этом этапе является сопротивление среды при движении стенки.

В случае учета кубической поправки к закону Гука на начальном этапе (характерное время t порядка $\varepsilon^{-5/3}$) распространение нелинейных волн описывается одним из уравнений (5.12),

(5.18)–(5.20). На этом этапе характерно распыление (демпфирование) волны. Определяющим фактором при этом являются вязкие свойства стенки. На втором этапе ($t \sim \varepsilon^{-3}$) распространение пульсовых волн подчиняется либо модифицированному уравнению Кортевега де Вриза, либо модифицированному уравнению Бюргерса–Кортевега де Вриза. Здесь в основном проявляются упругие свойства стенки и сопротивление среды при ее движении. На третьем этапе ($t \sim \varepsilon^{-4}$) распространение возмущений описывается модифицированным уравнением Бюргерса. Основное влияние на этом этапе оказывает сопротивление среды при движении стенки.

Список литературы

- [1] Fung Y.C. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. N.Y. etc: Springer, 1993.
- [2] Demiray H. On some nonlinear waves in fluid-filled viscoelastic tubes: weakly dispersive case. *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation*. 2005, v. 10, No. 4, pp. 425–440.
- [3] Cascaval R.C. Variable coefficient KdV equations and waves in elastic tubes. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Evolution Equations*. 2003, v. 234, 12 pp.
- [4] Quarteroni A., Tuveri M., Veneziani A. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods. *Comp. Vis. Science*. 2000, v. 2, No. 4, pp. 163–197.
- [5] Педли Т. *Гидродинамика крупных кровеносных сосудов*. М.: Мир, 1983.
- [6] Антонов В.Ф., Черныш А.М., Пасечник В.И., Вознесенский С.А., Козлова Е.К. *Биофизика*. М.: Гуманитарный изд. центр ВЛАДОС, 2006.
- [7] Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One dimensional models for blood flow in arteries, *J. Eng. Math.* 2003, v. 47, No. 3–4, pp. 251–276.
- [8] Čanic S., Mikeli A. Effective equations modeling the flow of a viscous incompressible fluid through a long elastic tube arising in the study of blood flow through small arteries, *SIAM J. Appl. Dynam. Systems*. 2003, v. 2, No. 3, pp. 431–463.
- [9] Ottesen J.T. Valveless pumping in a fluid-filled closed elastic tube-system: one-dimensional theory with experimental validation, *J. Math. Biol.* 2003, v. 46, No. 4, pp. 309–332.
- [10] Payne S.J. Analysis of the effects of gravity and wall thickness in a model of blood flow through axisymmetric vessels, *J. Medical and Biological Engineering and Computing*. 2004, v. 42, pp. 799–806.
- [11] Demiray H. Nonlinear waves in a viscous fluid contained in a viscoelastic tube, *ZAMP*, 2001, v. 52, pp. 899–911.
- [12] Регирер С.А. Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения *Гидродинамика кровообращения*. М.: Мир, 1971, с. 242–258.
- [13] Miekisz S. Non-linear theory of viscous flow in elastic tubes, *Phys. Med. Biol.* 1961, v. 6, No. 1, pp. 103–109.
- [14] Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Элементарная модель сосуда со стенкой, чувствительной к механическим стимулам, *Биофизика*. 2002, т. 47, №5, с. 908–913.
- [15] Кудряшов Н.А., Чернявский И.Л. Нелинейные волны при течении жидкости в вязко-эластичной трубке, *Изв. РАН. МЖГ*, 2006, №1, с. 54–67.
- [16] Pontrelli G. A multiscale approach for modelling wave propagation in an arterial segment, *Comput. Methods in Biomech. and Biomed. Eng.* 2004, v. 7, №2, pp. 79–89.
- [17] Hopf E. The partial differential equation $u_t + u u_x = u_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math.* 1951, v. 3, №3, pp. 201–230.

- [18] Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* 1950, v. 9, №3, pp. 225–236.
- [19] Korteweg D.J., De Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on new type of long waves, *Phill. Mag.* 1895, v. 39, pp. 422–443.
- [20] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* 1967, V. 19, No. 19, pp. 1095–1097.
- [21] Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*. Москва-Ижевск: ИКИ, 2004.
- [22] Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons and Fractals*. 2005, v. 24, No 5, pp. 1217–1231.
- [23] Kudryashov N. A.. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1988, v. 52, No. 3, pp. 361–365.
- [24] Kudryashov N. A.. Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Physics Letters A*. 1990, v. 147(5–6), pp. 287–291.
- [25] Kudryashov N.A., Zargaryan E.D. Solitary waves in active-dissipative dispersive media, *J. Phys. A. Math. and Gen.* 1996, v. 29, pp. 8067–8077.
- [26] Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. М.: Мир, 1987.
- [27] Kudryashov N.A., Demina M.V. Polygons of differential equations for finding exact solution, *Chaos, Solitons and Fractals*. 2007, v. 33, No. 5, pp. 1480–1496.