УДК 531.36

Метод определения параметров безотрывного движения волчка на гладкой плоскости

Г. М. Розенблат

Московский автомобильно-дорожный институт
125319, Россия, Москва, Ленинградский проспект, 64
gr51@mail.ru

Получено 29 ноября 2007 г.

Рассматривается задача о движении осесимметричного твердого тела по горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Контакт тела с плоскостью является точечным, а сама плоскость — абсолютно гладкая. Для известного и интегрируемого случая (симметричное тело) производится вычисление силы нормальной реакции, действующей на тело во время движения, а затем исследуется ее знак. Безотрывные движения отвечают положительной силе нормальной реакции, т. к. связь в точке контакта предполагается несдерживающая. В некоторых случаях удается получить простые формулы для силы нормальной реакции (полином второго порядка), а затем выписать аналитические условия, которым должны удовлетворять начальные данные и параметры тела, обеспечивающие его безотрывное движение.

Ключевые слова: твердое тело (волчок), односторонняя связь, отрыв

G. M. Rozenblat

A method for determination of the parameters of motion of a top that moves without bouncing on a smooth plane

The problem of motion of an axisymmetric rigid body on a horizontal plane in the presence of gravity is considered. The body touches the plane at one point, and the plane is assumed to be perfectly smooth. In the already-known and integrable case of symmetric body the normal reaction force exerted by the plane onto the body is calculated and its sign is examined. The condition that the body remains in contact with the plane is that the reaction is positive because the constraint at the point of contact is assumed to be unilateral. In some cases a comparatively trivial analytical representation (a polynomial of degree two) for the reaction force is obtained which allows determination of the initial conditions and the body's parameters for the body to remain in contact with the plane.

Keywords: rigid body(tip-top), unilateral constraint, bouncing
Mathematical Subject Classifications: 37N15

1. Постановка задачи и уравнения движения для гладкой плоскости

Пусть динамически и геометрически симметричное твердое тело движется по гладкой горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Предположим, что тело ограничено выпуклой поверхностью вращения, причем ось симметрии поверхности тела совпадает с осью его динамической симметрии, на которой расположен центр тяжести тела. O_*xyz — неподвижная система координат, причем ось O_*z направлена по вертикали, против силы тяжести, а плоскость O_*xy совпадает с опорной плоскостью. Пусть G — центр масс тела, а $G\xi\eta\zeta$ — система координат, жестко связанная с телом и направленная по его главным осям инерции, причем ось $G\zeta$ направлена по оси симметрии тела.

Положение тела описываем тремя координатами $x,\ y,\ z$ его центра масс G и тремя углами Эйлера $\theta,\ \varphi,\ \psi$, где θ — угол нутации (угол между осью симметрии $G\zeta$ и вертикалью Oz), φ — угол собственного вращения, ψ — угол прецессии. В силу симметрии координата z является функцией только угла θ, т. е.

$$z = f(\theta), \tag{1.1}$$

где $f(\theta)$ будем считать известной функцией θ. Уравнение (1.1) является голономной связью в данной задаче. Таким образом, движение системы описывается пятью обобщенными координатами $\{x,\ y,\ \varphi,\ \psi,\ \theta\}$. Поэтому начальными условиями для движения тела является набор:

$$\{x(0),\quad y(0),\quad \theta(0),\quad \varphi(0),\quad \psi(0),\quad \dot{x}(0),\quad \dot{y}(0),\quad \dot{\theta}(0),\quad \dot{\varphi}(0),\quad \dot{\psi}(0)\}.$$

Внешними силами, приложенными к телу во время движения, являются: сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила нормальной реакции, направленная вертикально вверх. Поэтому имеем уравнение движения центра масс по вертикали, полагая $m = 1$ для массы тела:

$$\ddot{z} = N - g.$$

Учитывая соотношение (1.1), получим:

$$f'\ddot{\theta} + f''\dot{\theta}^2 = N - g,$$

где штрихом обозначаем дифференцирование по θ. Таким образом, имеем следующее выражение для силы нормальной реакции:

$$N = g + f'\ddot{\theta} + f''\dot{\theta}^2. \tag{1.2}$$

Для получения уравнения для $\theta(t)$ выпишем, следуя [1], функцию Лагранжа в данном случае:

$$L = \frac{1}{2}\bigl(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\bigr) + \frac{1}{2}\bigl(A + f'^2\bigr)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}C\bigl(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\bigr)^2 - gf, \tag{1.3}$$

где $A = B$ — моменты инерции тела относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, C — момент инерции относительно оси $G\zeta$. Из (1.3) видим, что x, y, φ, ψ — циклические координаты, т. е. имеем интегралы:

$$\dot{x} = p_x, \quad \dot{y} = p_y, \quad C\bigl(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\bigr) = p_2,$$

$$A\sin^2\theta\dot{\psi} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta = A\sin^2\theta\dot{\psi} + p_2\cos\theta = p_1,$$

где $p_x,\ p_y,\ p_2,\ p_1$ — константы, определяемые начальными условиями. Без ограничения общности можно предполагать $p_x = p_y = 0$, т. е. центр масс G движется только по вертикали. Используя полученные соотношения и интеграл энергии, который в данном случае имеет место, мы получим следующее уравнение для θ:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2h - 2gf - P(u)}{A + (f')^2}, \tag{1.4}$$

где $P(u) = \dfrac{(p_1 - p_2 u)^2}{A(1-u^2)}$, $u = \cos\theta$, h — константа энергии, определяемая формулой:

$$h = \frac{1}{2}\left(A + \left[f'(\theta_0)\right]^2\right)\dot\theta_0^2 + \frac{1}{2}P(u_0) + gf(\theta_0),\ u_0 = \cos\theta_0. \tag{1.5}$$

Из уравнения (1.4) следует, что область возможных движений по углу θ определяется неравенством:

$$2gf(\theta) + P(\cos\theta) \ \leqslant\ 2h. \tag{1.6}$$

Учитывая, что $x,\ y,\ \varphi,\ \psi$ — игнорируемые координаты и $\dot x(0) = \dot y(0) = 0$, мы получаем следующий набор начальных условий данной задачи:

$$\{\theta(0),\quad \dot\theta(0),\quad \dot\varphi(0),\quad \dot\psi(0)\}$$

или, т. к. $\dot\varphi$ и $\dot\psi$, в соответствии с циклическими интегралами, выражаются через $\theta,\ p_1,\ p_2$, имеем такой набор начальных условий:

$$\{\theta(0),\quad \dot\theta(0),\quad p_1,\quad p_2\}. \tag{1.7}$$

Поставим задачу: найти все такие наборы начальных условий (1.7), чтобы при всех θ, удовлетворяющих неравенству (1.6), нормальная реакция, определяемая уравнениями (1.2) и (1.4), являлась положительной величиной. Это и будет обеспечивать безотрывное движение твердого тела по плоскости. Кроме того, необходимо ответить на вопрос о том, что происходит с телом <u>после того</u>, как нормальная реакция обратилась в нуль (если такое обнуление возможно).

Замечание. Явное интегрирование уравнений движения тяжелого симметричного волчка на гладкой горизонтальной плоскости восходит к С. Д. Пуассону, А. Курно, В. Пюизё и Ф. Клейну. Подробный библиографический список приведен в [1], а также в недавно вышедшей монографии [2].

2. Формулировка и обоснование результатов

Дифференцируя (1.4) по t, мы получим $\ddot\theta$, как функцию θ. Подставляя полученное выражение $\ddot\theta(\theta)$ и $\dot\theta^2(\theta)$ из (1.4) в (1.2), имеем следующее выражение для нормальной реакции N:

$$\begin{aligned}\left(A + (f')^2\right)^2 \cdot N = \left[gA\left(A + f'^2\right) + 2Af''\left(h - gf\right)\right] + \\ + \frac{p_1 - p_2 u}{A\left(1-u^2\right)}\left[-Af''\left(p_1 - p_2 u\right) + f'\left(A + f'^2\right)\frac{\sin\theta\left(p_1 u - p_2\right)}{1-u^2}\right].\end{aligned} \tag{2.1}$$

Полагая в этом выражении $\theta = \theta_0$ и требуя, чтобы $N(\theta_0) > 0$, мы получим следующее <u>необходимое</u> условие безотрывного движения:

$$g + f_0''\dot\theta_0^2 + \frac{f_0'\sin\theta_0(p_1 - p_2u_0)(p_1u_0 - p_2)}{A^2(1-u_0^2)^2} > 0, \tag{2.2}$$

которое, конечно, не гарантирует безотрывность движения для всей области, даваемой неравенством (1.6).

Полный анализ безотрывных движений удалось сделать для сферического тела (волчок Томсона). В этом случае имеем:

$$f(\theta) = R + d\cos\theta, \quad f' = -d\sin\theta, \quad f'' = -d\cos\theta,$$

где R — радиус сферы, d — расстояние центра масс G до геометрического центра сферы.

В этом случае формула (2.1) упрощается и приобретает вид:

$$\begin{aligned}
&\left(A + d^2\sin^2\theta\right)^2 \cdot N = \lambda a_0 u^2 - a_1 u + a_0(\lambda+1),\\
&a_0 = A^2 g + d p_1 p_2, \qquad a_1 = 2h_0 dA + d\left[\lambda p_1^2 + (1+\lambda)p_2^2\right],\\
&\lambda = d^2/A, \qquad u = \cos\theta,\\
&2h_0 = 2gdu_0 + \left(A + d^2\sin^2\theta_0\right)\dot\theta_0^2 + \frac{(p_1 - p_2 u_0)^2}{A\left(1-u_0^2\right)}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Причем область возможных движений дается неравенством, которое следует из (1.6):

$$\Psi(u) = 2gdu + \frac{(p_1 - p_2 u)^2}{A(1-u^2)} - 2h_0 \leqslant 0, \quad |u| \leqslant 1. \tag{2.4}$$

Таким образом, нахождение области возможных движений сводится к исследованию кубического неравенства:

$$\Psi_1(u) = 2gAdu(1-u^2) + (p_1 - p_2 u)^2 - 2h_0 A(1-u^2) \leqslant 0, \tag{2.5}$$

а безотрывность движения обеспечивается квадратным неравенством из (2.3):

$$\Phi(u) = a_0\lambda u^2 - a_1 u + a_0(\lambda+1) \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Несложное исследование неравенства (2.5) приводит к следующему утверждению.

Утверждение 1.

1) *Пусть* $2h_0 A > p_1^2$. *Тогда уравнение* $\Psi_1(u) = 0$ *на интервале* $(-1, 1)$ *имеет два корня* u_1, u_2, *причем* $u_1 < 0$, $u_2 > 0$, *и область возможных движений задается неравенствами:*

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2.$$

2) *Пусть* $2h_0 A \leqslant p_1^2$. *Тогда уравнение* $\Psi_1(u) = 0$ *на интервале* $[-1, 1]$ *имеет два корня* u_1, u_2, *а область возможных движений задается неравенствами:*

$$\begin{aligned}
0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \leqslant 1 \qquad &\textit{при} \quad u_0 > 0,\\
-1 \leqslant u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \leqslant 0 \qquad &\textit{при} \quad u_0 < 0.
\end{aligned}$$

Исследование неравенства (2.6), обеспечивающего безотрывность движения, приводит к следующему результату.

Утверждение 2. *Пусть начальные условия* (1.7) *и параметры тела таковы, что:*

$$\Phi(u_1) > 0, \quad \Phi(u_2) > 0, \tag{2.7}$$

тогда (2.6) *выполнено во всей области допустимых движений и отрыва не происходит. А если*

$$\Phi(u_1) < 0 \text{ или } \Phi(u_2) < 0, \tag{2.8}$$

то обязательно происходит отрыв (возможно, и в начальный момент времени!). В (2.7) *и* (2.8) $\Phi(u)$ *дается формулой* (2.6)*,* u_1*,* u_2 *— корни кубического уравнения* $\Psi_1(u) = 0$ *на интервале* $[-1,\,1]$*, где* $\Psi_1(u)$ *определяется формулой из* (2.5)*.*

Доказательство утверждения 2 следует из специфического вида функции $\Phi(u)$ из (2.6). А именно точка $u = u_* = a_1/(2\lambda a_0)$ является экстремумом функции $\Phi(u)$, причем при $a_0 > 0$ это точка минимума, а при $a_0 < 0$ — это точка максимума. Корни уравнения $\Phi(u) = 0$ даются формулами:

$$u_{3,4} = u_* \pm \sqrt{u_*^2 - (\lambda+1)/\lambda}.$$

1) Если $|u_*| < \sqrt{(\lambda+1)/\lambda}$, то уравнение $\Phi(u)$ корней не имеет, и выполнение (2.7) необходимо и достаточно для безотрывности движения.

2) Если $|u_*| \geqslant \sqrt{(\lambda+1)/\lambda}$, то можно утверждать, что функция $\Phi(u)$ монотонна на интервале $[-1, 1]$ (точка $u = u_*$ перемены знака производной лежит вне интервала $[-1, 1]$!). Тогда неравенства (2.7) опять являются необходимыми и достаточными для безотрывности движения.

□

Рассмотрим теперь некоторые **частные случаи задания начальных условий**.

Утверждение 3. *Пусть начальные условия таковы, что* $p_1 = p_2 = 0, \quad \dot\theta_0 \neq 0$ *(плоско-параллельное движение тела). Обозначим*

$$\mu^2 = \dot\theta_0^2\left(A + d^2\sin^2\theta_0\right).$$

1) *Если соблюдено неравенство*

$$\left|u_0 + \frac{\mu^2}{2gd}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+\lambda}{\lambda}\right), \tag{2.9}$$

то движение происходит без отрыва.

2) *Если соблюдено неравенство*

$$\left|u_0 + \frac{\mu^2}{2gd}\right| > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+\lambda}{\lambda}\right), \tag{2.10}$$

то обязательно происходит отрыв. Причем если $u_0 < 0$*, то отрыв происходит при* $u_1 \neq u_0$*. А если* $u_0 > 0$*, то при*

$$\left|u_0 + \frac{\mu^2}{2gd}\right| < \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{1}{u_0}\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)$$

отрыв происходит при $u_1 \neq u_0$, а при

$$\left|u_0 + \frac{\mu^2}{2gd}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{1}{u_0}\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)$$

отрыв происходит при $u = u_0$, т. е. в начальный момент.

Доказательство утверждения 3 следует из исследования неравенств (2.4) и (2.6), которые в данном частном случае имеют вид:

$$\Psi(u) = 2gd\left(u - u_0 - \frac{\mu^2}{2gd}\right) \leqslant 0,$$
$$\Phi(u) = A^2 g\lambda\left[u^2 - 2u\left(u_0 + \frac{\mu^2}{2gd}\right) + \frac{1+\lambda}{\lambda}\right].$$

Объединение неравенств (2.7) и (2.8) из утверждения 2 приводит к неравенству (2.9). При выполнении же неравенства (2.10) происходит ротационное движение тела (т. е. областью возможных движений по u является весь интервал $[-1, +1]$). Кроме того, при выполнении (2.10) имеем $\Phi(-1) > 0, \Phi(+1) < 0$, т. е. происходит отрыв тела. Остальные неравенства устанавливаются непосредственной проверкой. □

Утверждение 4. *Пусть начальные условия таковы, что $\dot\theta_0 = 0$ (p_1, p_2, u_0 — произвольны). Введем безразмерные параметры q_1, q_2 по формулам:*

$$q_1 = p_1/\sqrt{2\mu_0}, \quad q_2 = p_2/\sqrt{2\mu_0}, \quad \mu_0 = gdA.$$

Обозначим $\beta_0 = \operatorname{arctg}(u_0) = \operatorname{arctg}(\cos\theta_0)$, $\beta_0 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Введем в пространстве параметров $\{q_1, q_2\}$ полярные координаты (q, φ) по формулам:

$$q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = q_1/q_2.$$

Тогда отрыва не будет при

$$0 \leqslant q^2 \leqslant \rho^2(\varphi),$$

где функция $\rho^2(\varphi)$ определяется по формулам:

$$\rho^2(\varphi) = \begin{cases} \rho_1^2(\varphi) = \dfrac{1+\varepsilon u_0}{\lambda(\varepsilon - u_0)} \cdot \left[\dfrac{\varepsilon\left(1 + 2\lambda - 2\lambda u_0^2\right) + u_0\sqrt{1 + 4\lambda\left(1-\varepsilon^2\right)\left(1+\lambda-\lambda u_0^2\right)}}{\varepsilon + u_0}\right] & \\ & \beta_0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2} - \beta_0 \\ & \pi + \beta_0 < \varphi < \dfrac{3\pi}{2} - \beta_0 \\ \rho_2^2(\varphi) = \dfrac{1+\varepsilon u_0}{\lambda(u_0 - \varepsilon)}. & \\ & \dfrac{\pi}{2} - \beta_0 < \varphi < \pi + \beta_0 \\ & \dfrac{3\pi}{2} - \beta_0 < \varphi \leqslant 2\pi \\ & 0 \leqslant \varphi < \beta_0 \end{cases}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\sin 2\varphi - u_0}{1 - u_0\sin 2\varphi}$.

Если же $q^2 > \rho^2(\varphi)$, то происходит отрыв, причем при $\rho^2 = \rho_2^2(\varphi)$ отрыв происходит в <u>*начальный*</u> *момент $(u = u_0)$, а при $\rho^2 = \rho_1^2(\varphi)$ отрыв происходит при $u \neq u_0$.*

Замечание. Результаты утверждения 4 представлены на рис. 1,2, где заштрихованы области начальных условий, при которых движение является безотрывным. Границы этих областей состоят из кривых типа 1 и типа 2 (см. рис. 1, 2), имеющих прямолинейные асимптоты: $q_1/q_2 = \operatorname{tg}\beta_0 = u_0$ и $q_1/q_2 = \operatorname{ctg}\beta_0 = 1/u_0$. При этом кривая типа 2, которая в полярных координатах имеет уравнение $\rho = \rho_2(\varphi)$, в прямоугольных координатах q_1, q_2 может быть представлена в виде:

$$(q_1 - u_0 q_2)\left(q_1 - \frac{1}{u_0} q_2\right) = +\frac{1 - u_0^2}{2\lambda u_0},$$

т. е. является гиперболой.

Кривая типа 1 напоминает гиперболу, однако в прямоугольных координатах q_1, q_2 является кривой 4-го порядка. Нетрудно видеть, что прямые $q_1 = u_0 q_2$ и $q_1 = \frac{1}{u_0} q_2$ являются асимптотами этих кривых.

Отметим также, что внутри заштрихованной области на рис. 1, 2 лежит кривая типа 3, уравнение которой

$$\rho_3^2(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon u_0}{\lambda(\varepsilon - u_0)}\left(1 - u_0^2\right)$$

или в прямоугольных координатах:

$$(q_1 - u_0 q_2)\left(q_1 - \frac{1}{u_0} q_2\right) = -\frac{\left(1 - u_0^2\right)^2}{2\lambda u_0}.$$

Это — гипербола регулярных прецессий [1].

Доказательство утверждения 4 основано на следующем факте. При $\dot{\theta}_0 = 0$ уравнение $\Psi_1(u) = 0$ заведомо имеет корень $u = u_0$, а тогда функция $\Psi_1(u)$ из (2.5) имеет вид:

$$\Psi_1(u) = 2gdA(u_0 - u)\left[u^2 - 2\nu^2 u - \left(1 + 2u_0\nu^2 - \sigma\right)\right],$$

где обозначено

$$\nu^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2u_0 p_1 p_2}{4\mu_0(1 - u_0^2)}, \quad \sigma = \frac{p_1 p_2}{\mu_0}, \quad \mu_0 = gdA.$$

Рассмотрим функцию:

$$\chi(u) = u^2 - 2\nu^2 u - \left(1 + 2u_0\nu^2 - \sigma\right).$$

Тогда при $\chi(u_0) < 0$ областью движений является интервал $u_3 \leqslant |u| \leqslant u_0$, а если $\chi(u_0) > 0$ – то интервал $u_0 \leqslant u \leqslant u_3$, где u_3 — меньший по модулю корень уравнения $\chi(u) = 0$:

$$u_3 = \nu^2 - \sqrt{\nu^4 + 1 + 2u_0\nu^2 - \sigma}.$$

Далее применяем утверждения 2, т. е. проверяем неравенства $\Phi(u_0) > 0$ и $\Phi(u_3) > 0$ для безотрывности. Нарушение одного из этих неравенств (т. е. $\Phi(u_0) < 0$ или $\Phi(u_3) < 0$) приводит к отрыву. Для сокращения выкладок удобно ввести безразмерные переменные q_1 и q_2 и полярные координаты, как это указано в формулировке. Тогда получим соотношения:

$$a_0 = \mu_0 d\left(\frac{1}{\lambda} + q^2 \sin\alpha\right),$$
$$a_1 = \mu_0 d\left[2u_0 + \frac{2q^2}{1-u_0^2}\left(1+\lambda-\lambda u_0^2 - u_0\sin\alpha\right)\right],$$
$$\nu^2 = \frac{1}{2}q^2\frac{1-u_0\sin\alpha}{1-u_0^2}, \quad \sigma = q^2\sin\alpha, \quad \alpha = 2\varphi.$$

Тогда получим:

$$\chi(u) = u^2 - 2u\left[\frac{q^2\left(1-u_0^2\sin\alpha\right)}{2\left(1-u_0^2\right)}\right] - \left[q^2\frac{u_0-\sin\alpha}{1-u_0^2}+1\right],$$
$$\chi(u_0) = -\left(1-u_0^2\right) - \frac{q^2}{1-u_0^2}\left[2u_0 - \sin\alpha\left(1+u_0^2\right)\right],$$
$$N(u) = \left(1+\lambda+\lambda u^2\right)\left[\frac{1}{\lambda}+q^2\sin\alpha\right] - u\left[2u_0 + \frac{q^2}{1-u_0^2}\left(1+\lambda-\lambda u_0^2-u_0\sin\alpha\right)\right],$$
$$N(u_0) = \left(1+\lambda-\lambda u_0^2\right)\left\{\frac{1}{\lambda}+\frac{q^2}{1-u_0^2}\left[\left(1+u_0^2\right)\sin\alpha - 2u_0\right]\right\}$$

Используя полученные выражения и высказанные выше соображения, мы получаем результат утверждения 4. Подробные выкладки здесь опускаются. □

Утверждение 5. *Пусть начальные условия таковы, что* $\dot\theta_0 = 0, \dot\psi(0) = \varepsilon, \dot\varphi(0) = \omega_0$, *где* θ, ψ, φ *— углы Эйлера. Таким образом, в начальный момент мы задаем угловую скорость собственного вращения* ω_0 *и угловую скорость прецессии* ε. *Тогда в начальный момент нормальная реакция вычисляется по формуле:*

$$\begin{aligned}\left(A+d^2\sin^2\theta_0\right)\cdot N(\theta_0) = \omega_0 u_0\varepsilon\left[\left(1+\lambda-\lambda u_0^2\right)\left(1-u_0^2\right)dCA\right] + A^2 g\left(1+\lambda-\lambda u_0^2\right) + \\ + \varepsilon^2\cdot Ad\left(1-u_0^2\right)\left[C\left(1+\lambda-\lambda u_0^2+2\lambda u_0^4\right) - Au_0\left(1+\lambda-\lambda u_0^2\right)\right].\end{aligned} \tag{2.11}$$

Из формулы (2.11) *следует, что при* $u_0\varepsilon < 0$ *всегда можно выбрать* $\omega_0 > 0$ *настолько большим, что* $N(\theta_0) < 0$, *т. е. тело сразу начинает подпрыгивать на плоскости.*

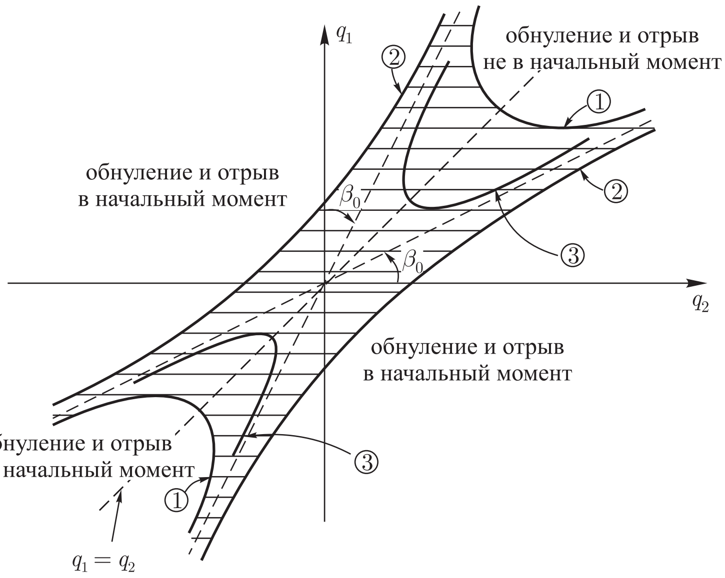
Доказательство утверждения 5 устанавливается непосредственной проверкой с использованием формул (2.3) и соотношений

$$p_1 = \left(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\left(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta\right)\right), \quad p_2 = C\left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta\right),$$

где p_1, p_2 — константы. □

Рассмотрим теперь вопрос о движении тела, которое происходит после обнуления нормальной реакции. Пусть O — центр сферической поверхности волчка, которая контактирует с плоскостью в точке P. Предположим, что при $t = t_1$ нормальная реакция обратилась в нуль $N(t_1) = 0$, причем $t_1 > t_0$.

Справедливо следующее утверждение.



① $\rho_1^2(\varphi) = \dfrac{1+\varepsilon u_0}{\lambda(\varepsilon - u_0)} \cdot \dfrac{A_1\varepsilon + A_2 u_0}{\varepsilon + u_0};$

② $\rho_2^2(\varphi) = \dfrac{1+\varepsilon u_0}{\lambda(u_0 - \varepsilon)};$

③ $\rho_3^2(\varphi) = \dfrac{1+\varepsilon u_0}{\lambda(\varepsilon - u_0)}(1-u_0^2),\ \varepsilon = \dfrac{\sin 2\varphi - u_0}{1 - u_0\sin 2\varphi};$

$A_1 = 1 + 2\lambda - 2\lambda u_0^2;$

$A_2 = \sqrt{1 + 4\lambda(1-\epsilon^2)(1+\lambda-\lambda u_0^2)};$

$\beta_0 = \operatorname{arctg} u_0 > 0.$

Рис. 1. Области начальных условий, при которых происходит безотрывное или отрывное движение ($u_0 > 0$)

Утверждение 6.

1) *Если t_1 — точка локального минимума функции $N(t)$, то при $t > t_1$ продолжается безотрывное движение тела по плоскости.*

2) *Если t_1 — не есть точка локального минимума функции $N(t)$ (т. е. в любой малой ее окрестности происходит смена знака функции $N(t)$ с плюса на минус), то происходит отрыв тела от плоскости и для вертикальной координаты точки O справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} &\dot\theta_1 = \dot\theta(t_1+0) < 0, \quad z_o(t_1+0) = R, \quad \dot z_o(t_1+0) = \ddot z_o(t_1+0) = 0,\\ &\dddot z_o(t_1+0) = -h\sin\theta_1\cdot\dot\theta_1 > 0, \end{aligned} \qquad (2.12)$$

где $h = \left(\dot\psi^2(t_1+0)\sin^2\theta_1 + \dot\theta_1^2 + p_2^2/A^2\right)d, \quad \theta_1 \in [0,\,\pi).$

Доказательство утверждения 6 основано на следующих рассуждениях. Если нормальная реакция в процессе движения обнуляется, то в соответствии с утверждением 2 обязательно

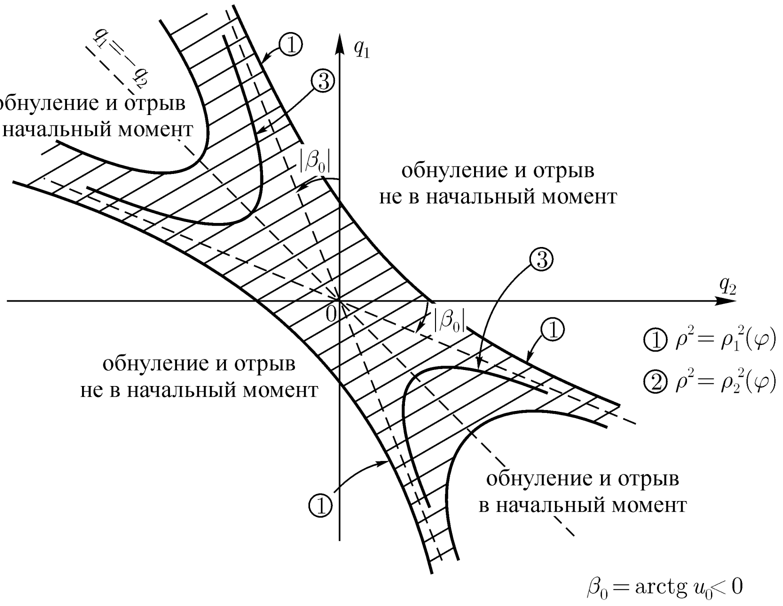


Рис. 2. Области начальных условий, при которых происходит безотрывное или отрывное движение ($u_0 < 0$)

нарушается неравенство (2.7), т. е. мы имеем:

$$u_*^2 = a_1^2 / \left(4\lambda^2 a_0^2\right) \geqslant (1+\lambda)\lambda > 1.$$

Причем непосредственной проверкой, используя формулы из (2.3), можно показать, что:

$$\begin{aligned} &u_* \geqslant \sqrt{(1+\lambda)\lambda} > 1 \quad \text{при} \quad a_0 > 0, \\ &u_* \leqslant -\sqrt{(1+\lambda)\lambda} < -1 \quad \text{при} \quad a_0 < 0 \end{aligned}.$$

Основываясь на формуле (2.3) для нормальной реакции N и полученных неравенствах, можно утверждать, что N обнуляется в такой точке $u_1 = \cos\theta_1$, для которой

$$n = dN/du|_{u=u_1} < 0,$$

причем неравенство строгое. Далее имеем:

$$dN/dt|_{t=t_1} = n(-\sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) = n(\cos\theta)^{\cdot}\Big|_{t=t_1}.$$

1) Если t_1 — точка локального минимума $N(t)$, то $\dot{N}\Big|_{t=t_1} = 0, \quad \ddot{N}\Big|_{t=t_1} > 0.$
Тогда $(\cos\theta)^{\cdot}|_{t=t_1} = 0$, $(\cos\theta)^{\cdot\cdot}|_{t=t_1} < 0$, т. е. t_1 — точка максимума функции $\cos\theta$, и движение пойдет в ту сторону, где $\cos\theta$ уменьшается, а нормальная реакция строго положительна. Если $\ddot{N}\Big|_{t=t_1} = 0$, то рассуждения аналогичны с привлечением производных высших порядков.

2) Если t_1 — не есть точка локального минимума и функция $N(t)$ в окрестности точки $t = t_1$ меняет знак с плюса на минус, то мы имеем

$$\dot{N}\Big|_{t=t_1} = n(\cos\theta)^{\cdot}|_{t=t_1} < 0, \quad \to (\cos\theta)^{\cdot}|_{t=t_1} > 0.$$

Ясно, что продолжение контакта тела с плоскостью в дальнейшем невозможно и происходит отрыв. Предположим, что отрыв произошел, и покажем его корректность, т. е. возрастание вертикальной координаты $z_o(t)$ точки O при $t > t_1$. Движение тела при $t \geqslant t_1 + 0$ (т. е. отсутствие контакта с плоскостью) представляет собой свободное падение точки G в поле силы тяжести и регулярную прецессию вокруг постоянного вектора кинетического момента тела относительно центра масс G, приложенного в точке G (случай Эйлера–Пуансо). В момент отрыва сохраняются координаты точек тела и их скорости. Покажем, что сохраняется также и величина $\ddot{\theta}$, т. е. $\ddot{\theta}(t_1 - 0) = \ddot{\theta}(t_1 + 0)$. Действительно, выпишем уравнение кинетического момента относительно оси $G\eta$:

$$-A\ddot{\theta} + (-p_2\dot{\psi}\sin\theta + A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta) = -Nd\sin\theta,$$

где $p_2 = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)$. Отсюда видно, что при $N = 0$ это уравнение переходит в соответствующее уравнение для регулярной прецессии случая Эйлера–Пуансо, а значит, $\ddot{\theta}$ сохраняется. Далее, т. к. при $t = t_1 + 0$ имеем $\ddot{z}_G = -g$ и сохраняются координаты, скорости и величина $\ddot{\theta}$, то при $t = t_1 + 0$ имеем:

$$\begin{aligned} &z_o(t) = z_G(t) - d\cos\theta = R, \\ &\dot{z}_o(t) = \dot{z}_G(t) + d\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 0, \\ &\ddot{z}_o = \ddot{z}_G + d\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + d\sin\theta\cdot\ddot{\theta} = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Вычисляем $\dot{\theta}(\theta)$ и $\ddot{\theta}(\theta)$ при $t \geqslant t_1 + 0$, т. е. для регулярной прецессии Эйлера–Пуансо:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h_1^2}{A^2} - \frac{(h_2 - p_2\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta}, \quad \ddot{\theta} = \frac{(h_2\cos\theta - p_2)(h_2 - p_2\cos\theta)}{A^2\sin^3\theta}, \tag{2.14}$$

где $h_2 = A\dot{\psi}\sin^2\theta + p_2\cos\theta = p_1 = const$, $h_1^2 = A^2\dot{\theta}^2 + A^2\dot{\psi}^2\sin^2\theta = \mathrm{const}$. Формулы (2.14) получены из соответствующих формул для случая Лагранжа движения твердого тела вокруг неподвижной точки при устремлении в последних расстояния между неподвижной точкой и центром масс к нулю. Подставляя (2.14) в формулу для $\ddot{z}_o$ из (2.13) и используя равенство $\ddot{z}_G = -g$ при $t \geqslant t_1 + 0$, получаем:

$$\ddot{z}_o = -g + \left(\frac{h_1^2 + p_2^2}{A^2}\cos\theta - \frac{p_2 h_2}{A^2}\right)d.$$

Дифференцируя по t последнее равенство, получаем:

$$\frac{1}{d}\dddot{z}_o = \frac{h_1^2 + p_2^2}{A^2}(\cos\theta)^{\cdot} > 0 \text{ при } t = t_1 + 0,$$

т. к. было показано, что при $\dot{N}|_{t=t_1} < 0$ имеем $(\cos\theta)^{\cdot}|_{t=t_1} > 0$. Аналогично производится доказательство в том случае, если $\dot{N}|_{t=t_1} = 0$. Тогда берем первую ненулевую производную нечетного порядка функции $N(t)$, которая должна быть отрицательной (для того чтобы $N(t)$ в точке обнуления меняла знак). На этом доказательство утверждения завершено. $\square$

Замечание 1. Первое из уравнений (2.14) можно проинтегрировать и получить формулу:

$$\cos[\theta(\tau)] = \frac{h_2 p_2}{h_1^2 + p_2^2} + \frac{h_1\sqrt{h_1^2 + p_2^2 - h_2^2}}{h_1^2 + p_2^2}\sin(\omega_0\tau + \beta_0), \quad \tau = t - t_1,$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{A}\sqrt{h_1^2+p_2^2}$, а константа β_0 выбирается из начального условия $\cos[\theta(0)] = \cos\theta_1$. Тогда для координаты $z_0(\tau)$ мы получим следующее выражение:

$$z_0(\tau) = R + \frac{g\tau^2}{2} + \left(\frac{L\alpha\cos\beta_0}{A^2\omega_0}\right)\tau - \frac{L\alpha}{A^2\omega_0^2}\left[\sin(\omega_0\tau+\beta_0)-\sin\beta_0\right],$$

где $L = \dfrac{h_1\sqrt{h_1^2+p_2^2-h_2^2}}{h_1^2+p_2^2}$. Используя это выражение, можно вычислить момент $\tau = \tau_1$, когда $z_0(\tau_1) = R$, т. е. момент приземления тела и начало ударного процесса.

Замечание 2. Вопросы схода с неудерживающей голономной связи, которых касается утверждение 6, в общем виде рассматривались в работах [3–12].

Замечание 3. Некоторые результаты о безотрывных движениях твердого тела по абсолютно шероховатой плоскости приведены в работе [13].

В заключение автор выражает свою признательность академикам РАН В. Ф. Журавлеву, Д. М. Климову, Ф. Л. Черноусько за полезные критические замечания, которые способствовали улучшению настоящей работы, а также профессору А. П. Иванову и всем участникам семинаров в Институте проблем механики РАН.

Особую благодарность автор выражает профессору А. В. Борисову за идею настоящей работы и поддержку при ее реализации.

Список литературы

[1] А. П. Маркеев. *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*, М.: Наука, 1992, 335 с.

[2] А. В. Борисов, И. С. Мамаев. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006, 576 с.

[3] П. Аппель. *Теоретическая механика. т.II*, М.: ГИФМЛ, 1960, 516 с.

[4] М. В. Остроградский. *Общие соображения относительно моментов сил.* В сб.: М. В. Остроградский. it Избранные труды, Из-во Академии наук СССР, 1958, стр. 205–229.

[5] Г. К. Суслов. *Теоретическая механика*, ГИТТЛ, М.-Л., 1946. 655 с.

[6] Н. Е. Жуковский. Теоретическая механика. Собрание сочинений, т. 5, *ГИТТЛ*, М.-Л.; 1949, стр. 596–600.

[7] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв. *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во Московского Университета, 1991, 168 с.

[8] М. В. Дерябин, В. В. Козлов. К теории систем с односторонними связями, *ПММ*, т. 59, вып. 4, 1995, стр. 531–539.

[9] М. В. Дерябин. Общие принципы динамики и теория односторонних связей, *Вестник Московского Университета, серия 1. Математика, механика*, 1998, №1, с. 53–59.

[10] А. П. Иванов. О безударных движениях в системах с неудерживающими связями, *ПММ*, т. 56, вып. 1, 1992, стр. 3–15.

[11] А. П. Иванов. Об уравнениях движения неголономной системы с неудерживающей связью, *ПММ*, т. 49, вып. 5, 1985, стр. 717–723.

[12] А. П. Иванов. *Динамика систем с механическими соударениями*, М., "Международная программа образования", 1997, 336 с.

[13] Г. М. Розенблат. О безотрывных движениях твердого тела по плоскости. *Доклады РАН*, 2007, т. 415, №5, с. 622–624.