Динамические эффекты диска Эйлера

В этом выпуске редакция НД предлагает вниманию читателей обсуждение одной интересной задачи динамики. Это задача о движении так называемого диска Эйлера — круглого диска, совершающего одновременно качение и вращение на горизонтальной плоскости. Этой простой механической системе присущи две любопытные особенности — быстрое возрастание звуковой частоты в процессе контакта диска и поверхности на финальном этапе движения, а также последующая внезапная остановка движения. Эти эффекты может наблюдать каждый, раскрутив на столе обыкновенную монету: «потеряв равновесие», монета окажется лежащей на столе плашмя, при этом финальная стадия ее движения, когда ее плоскость почти горизонтальна, сопровождается характерным «дрожанием». Однако физическое объяснение этого своеобразного поведения оказалось сложной задачей, решение которой еще требует дальнейших экспериментальных и теоретических исследований.

В Интернете существует официальный сайт диска Эйлера — сувенирной игрушки, для которой изначально и было придумано ее создателями название «диск Эйлера» [1]. Благодаря оптимально подобранным размерам и материалам игрушки, разработчикам удалось существенно увеличить время движения диска до остановки, добившись при этом особой выразительности демонстрируемых эффектов. Отметим, что с тех пор выражение «диск Эйлера» (Euler's disk) утвердилось в литературе как научный термин, применяемый в описании катящегося по горизонтальной поверхности диска (вне зависимости от его соответствия параметрам одноименной научной игрушки).

Повышенный интерес к диску Эйлера возник после опубликования работы К. Моффатта, в которой резкое прекращение движения диска объясняется прежде всего воздействием силы вязкого сопротивления воздуха [2]. Эта теория вызвала значительную дискуссию и развитие конкурентных гипотез о природе основного механизма диссипации энергии для диска Эйлера. Ван ден Энг (van den Engh) с соавторами провели некоторые эксперименты по движению дископодобных тел, свидетельствующие не в пользу гипотезы о вязком трении. В ответ на работу Моффатта они опубликовали свое объяснение, ключевым пунктом которого является наличие скольжения при контакте диска и поверхности [4]. Критика выводов [2] и краткое обсуждение возможных источников диссипации содержатся также в неопубликованной заметке Э. Руины [3].

Авторами последовавших экспериментальных и теоретических работ исследовался вопрос о наличии и степени влияния определенных типов трения на различных этапах движения диска [6, 7, 9–13]. Были численно и аналитически исследованы модели системы с различными ограничениями, проведен анализ полученных экспериментальных данных. Эти исследования в основном указывают на то, что основными диссипативными силами, вызывающими вибрацию и остановку диска, являются силы трения качения и трения скольжения, нежели силы вязкого трения. Из немногих предположений о физике этих эффектов стоит упомянуть, как наиболее естественную, гипотезу Кесслера и О'Рейли [10], что резкая остановка диска происходит в результате потери контакта между диском и поверхностью в процессе вибраций при малом угле наклона диска. (Для проверки этой гипотезы потребуется рассматривать деформируемую модель для контактирующих тел.)

Истинная физическая картина этих эффектов пока остается невыясненной. Очевидно, что анализ глобальной динамики диска Эйлера потребует формулирования и рассмотрения сложной, детально развитой модели и высокого вычислительного уровня исследований. Цель данной заметки — привлечь внимание специалистов к этой интересной задаче, решение которой будет являться замечательным успехом в области механики и теории динамических систем.

Ниже мы приводим сокращенный перевод дискуссии [2, 4], весьма ценной в том отношении, что она побудила ряд специалистов обратиться к этой интересной задаче и внести свой вклад в ее исследование.

К. Моффат

Диск Эйлера и его конечно-временная сингулярность

Вязкость воздуха приводит к уменьшению энергии диска с одновременным увеличением скорости его качения

Хорошо известно, что закрученный на поверхности стола круглый диск (монета) прекращает свое движение в некотором смысле «внезапно», а заключительная стадия движения характеризуется «дрожанием и жужжанием» с быстро нарастающей частотой. При качении диска на своем ободе точка контакта P движется по окружности с угловой скоростью Ω. Применение классической (недиссипативной) теории[1] приводит к нереалистичным выводам о том, что угловая скорость Ω постоянна, а движение продолжается сколь угодно долго. Здесь мы покажем, что добавление вязкой диссипации в тонком слое воздуха между диском и столом позволяет, с одной стороны, объяснить наблюдаемую «внезапность» прекращения движения, а с другой — приводит к парадоксальному выводу о том, что угловая скорость Ω становится сколь угодно большой, причем за конечное время. Ниже исследуется и дается качественное объяснение этой «конечно-временной сингулярности».

Пусть α — угол между плоскостью диска и столом. В классическом описании (обозначения пояснены на рис. 1) диск движется с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси вращения PO, и его кинетический момент равен $\mathbf{h} = A\omega\mathbf{e}(t)$, где $A = 1/4Ma^2$ — момент инерции диска с массой M относительно диаметра; $\mathbf{e}(t)$ — единичный вектор в направлении PO; $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_d$ — единичные векторы в направлениях Oz, OC соответственно. В системе координат, вращающейся с угловой

[1] L.A. Pars, *Treatise on Analytical Dynamics*, London: Heinemann, 1965.

скоростью $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$, диск вращается вокруг своей оси OC с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_d = \Omega_d\mathbf{e}_d$; следовательно, условие качения выражается как $\Omega_d = \Omega\cos\alpha$. Таким образом, абсолютная угловая скорость диска $\mathbf{\Omega} = \Omega(\mathbf{e}_d\cos\alpha - \mathbf{e}_z)$, и, следовательно, $\mathbf{\Omega} = \omega\cdot\mathbf{e} = -\mathbf{\Omega}\sin\alpha$.

Уравнение Эйлера для движения твердого тела имеет вид $d\mathbf{h}/dt = \Omega\wedge\mathbf{h} = \mathbf{G}$, где $\mathbf{G} = Mga\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}$ — это момент силы тяжести относительно точки P ($\wedge$ обозначает векторное произведение). Следовательно, $\Omega^2\sin\alpha = 4g/\alpha$, или для малых α

$$\Omega^2\alpha \approx 4g/a. \tag{1}$$

Полная энергия E представляет собой сумму кинетической $\frac{1}{2}A\omega^2 = \frac{1}{2}Mga\sin\alpha$ и потенциальной энергии $Mga\sin\alpha$, следовательно,

$$E = \frac{3}{2}Mga\sin\alpha \approx \frac{3}{2}Mga\alpha. \tag{2}$$

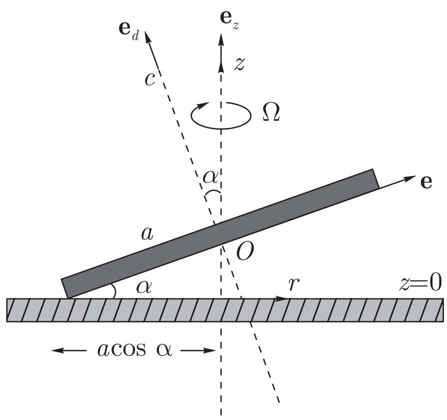

Рис. 1. Качение тяжелого диска по горизонтальному столу. Точка контакта тел при качении, P, движется по окружности с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Под влиянием эффектов диссипации угол α обращается в ноль за конечное время, а Ω увеличивается пропорционально $\alpha^{-1/2}$

В классической теории α, Ω и E постоянны, и движение продолжается сколь угодно долго, что, как уже отмечалось, абсолютно нереалистично.

Очевидно, что диссипация энергии в системе обусловлена сопротивлением воздуха, вязкость которого обозначим μ. При малых α основной вклад в вязкую диссипацию дает слой воздуха между диском и столом, который при больших угловых скоростях Ω испытывает сильную сдвиговую деформацию. Оценим скорость убывания энергии. Пусть $(r,\,\theta)$ — полярные координаты с началом координат в O. Для малых α зазор $h(r,\,\theta,\,t)$ между диском и столом определяется по формуле $h(r,\,\theta,\,t) \approx \alpha(a + r\cos\phi)$, где $\phi = \theta - \Omega t$. Теперь допустим, что угол α — это медленно меняющаяся функция времени t, а именно $|\dot{\alpha}| \ll \Omega$; примем также следующее «адиабатическое допущение», предположив, что уравнение (1) по-прежнему выполняется. Поскольку за время $2\pi/\Omega$ частицы воздуха проходят расстояние порядка a, горизонтальная компонента скорости воздуха $\mathbf{u}_H$ имеет порядок $r\Omega\sin\phi$; и поскольку на поверхностях $z = 0$ и $z = h(= O(\alpha a))$ выполнены условия прилипания, скорость деформации сдвига $|\partial\mathbf{u}_H/\partial z|$ является величиной порядка $(r\Omega/\alpha a)|\sin\phi|$. Для нахождения скорости вязкой диссипации Φ проинтегрируем $\mu(\partial\mathbf{u}_H/\partial z)^2$ по слою воздуха V; воспользовавшись затем уравнением (1), получаем $\Phi \approx \pi\mu g a^2/\alpha^2$. Следует отметить, что $\Phi \to \infty$ при $\alpha \to 0$.

Таким образом, считая, что потеря энергии обусловлена только сопротивлением воздуха, имеем $dE/dt = -\Phi$ или, с учетом (2),

$$\frac{3}{2}Mgad\alpha/dt \approx -\pi\mu g a^2/al^2. \tag{3}$$

Следовательно,

$$\alpha^3 = 2\pi(t_0 - t)/t_1, \tag{4}$$

где $t_1 = M/\mu a$, а t_0 —константа, определяемая из начальных условий: если $\alpha = \alpha_0$ при $t = 0$, то $t_0(\alpha_0^3/2\pi)t_1$. Любопытным следствием формулы (4) является тот факт, что угол α обращается в ноль за конечное время $t = t_0$, а угловая скорость Ω при $t = t_0$ имеет особенность $\Omega \approx (t_0 - t)^{-1/6}$.

Конечно, на практике угловая скорость подобной особенности не имеет: природа не терпит сингулярностей, а потому должны существовать некоторые физические препятствия ее появлению. В данной задаче это препятствие легко усмотреть: вертикальное ускорение $|\ddot{h}| = |a\ddot{\alpha}|$ не может по величине быть больше g (так как нормальная реакция в точке P должна оставаться положительной). Из формулы (4) следует, что наша модель неприменима при $t > \tau$, где $\tau < t_0$ и

$$\tau = t_0 - t \approx (2a/9g)^{3/5}(2\pi/t_1)^{1/5}. \tag{5}$$

Коммерческая игрушка под названием «Диск Эйлера» имеет массу $M = 400$ г и радиус $a = 3,75$ см. Приняв вязкость воздуха равной $\mu = 1,78 \times 10^{-4} \ldots$ см $^{-1}$/с, для этого диска находим $t_1 = M/\mu a \approx 0,8 \times 10^6$с, и если мы возьмем $\alpha_0 = 0,1 (\approx 6^\circ)$, то получим $t_0 \approx 100$с, что приблизительно (с точностью $\pm 20\%$) совпадает со временем вращения диска, полученным путем многократных испытаний при различных начальных данных. Таким образом, диссипация, связанная с вязкостью воздуха, дает удовлетворительное объяснение особенностей поведения диска. Значение времени τ, согласно (5), равно 10^{-2}с; то есть уравнение (4) адекватно описывает движение диска для $t < t_0 - 10^{-2}$. При $t = t_0 - 10^{-2}$ находим $\alpha \approx 0,5 \times 10^{-2}$, $h_0 = a\alpha \approx 0,2$ мм, а также максимальную частоту вращения диска $\Omega \approx 500Hz$ (принятое ранее «адиабатическое допущение» выполняется с удовлетворительной точностью).

Г. ван ден Энг, П. Нельсон, Дж. Роуч

Игры в монетки, или о некоторых экспериментальных исследованиях движения монет

... Моффатт указывает на вязкость воздуха как на основной механизм, влияющий на характер этого дрожания. Мы проверили его выводы, изучив подобные движения монет в вакууме. Оказалось, что воздух практически не оказывает влияния на заключительный «вибрирующий» этап движения. По-видимому, вибрация вызвана трением скольжения, которое приводит к отрыву монеты от поверхности в точке контакта.

Наши наблюдения не выявили качественного изменения в движении дископодобных тел внутри сосуда, наполненного сжатым воздухом. Мы изучили движение не только монет (цилиндров, у которых образующая мала по сравнению с радиусом), но и колец, а также цилиндров «с краем» наподобие крышки от банки с гуталином, причем последнюю мы запускали так, чтоб в конце со столом соприкасалась как сторона «с краем», так и «ровная» сторона. Все эти тела вели себя примерно одинаково: вращение на ребре, опрокидывание, а затем характерное дрожание до полной остановки. Тот факт, что картина движения остается постоянной для столь различных тел, не очень согласуется с теорией Моффатта, в которой ключевая роль отводится именно вязкости. Очевидно, что кольцеобразные тела «с дыркой» должны испытывать иное сопротивление воздуха по сравнению со «сплошными» телами, однако практически полная идентичность их поведения ставит под сомнение определяющую роль вязкости воздуха.

В дальнейших экспериментах нами использовалась датская монета достоинством в 2,5 гульдена, которая, как известно, может быть намагничена; это позволяет (с использованием магнитного перемешивателя) задать ее начальную скорость вращения достаточно точно. Мы поместили монету в стеклянный сосуд с вогнутым дном и заставили вращаться с частотой около 10 Гц. Затем внешнее поле было отключено, и мы наблюдали ее «затухающее» движение. Были проведены эксперименты с монетой в вакууме (из сосуда был откачан воздух до давления менее 1 мторр).

В вакууме вращение монеты происходило в среднем в течение 12,5 секунд, а при атмосферном давлении — около 10,5 секунд (осредненные данные для серии из 10 экспериментов). Эта разница во времени объясняется тем, что начальная стадия вращения, когда монета еще «не потеряла равновесия» (ось вращения вертикальна), протекает в вакууме как раз примерно на 2,5 секунды дольше, чем при обычных условиях. Однако и в вакууме и при атмосферном давлении от начала «потери равновесия» до полной остановки проходило примерно 4 секунды, и, по крайней мере визуально, поведение монеты в заключительной стадии движения выглядело одинаково. Мы пришли, таким образом, к заключению, что наличие или отсутствие воздуха сказывается лишь на продолжительности начальной стадии, когда монета вращается вокруг вертикальной оси и практически не влияет на заключительную «вибрирующую» стадию движения. Из рассуждений Моффатта, однако, следует, что в вакууме эта заключительная стадия должна протекать в течение достаточно продолжительного времени.

Мы предлагаем свое объяснение этого своеобразного поведения монеты на заключительном этапе движения. Пусть сначала монета вращается так, что ее ось вращения вертикальна и, следовательно, лежит в плоскости монеты. Затем монета «теряет равновесие», однако сохраняется ее энергия вращения, поэтому ось вращения постепенно становится перпендикулярной плоскости монеты. Монета совершает неустановившиеся колебательные движения. Моффатт показал, что трение минимально в том случае, когда точка контакта колеблющейся монеты с поверхностью описывает окружность радиуса $R\cos(\alpha)$ (см. рис. 1 его статьи). Скорость вращения монеты, однако, не произвольна. На монету действует момент, обусловленный силой тяжести, который в свою очередь изменяет кинетический момент как вращательного, так и колебательного движений. В результате монета как бы оказывается под действием неких прецессионных сил, заставляющих ее периодически чиркать ребром по поверхности, на которой происходит вращение. Мы считаем, что возникающая при этом сила трения скольжения вызывает отрыв монеты от поверхности, после которого монета почти сразу же вновь обретает контакт с поверхностью; при этом подобное чередование наличия и отсутствия контакта происходит с очень большой частотой. Именно под действием этой «импульсной» силы трения монета в конце концов останавливается.

Важную роль трения нетрудно подтвердить экспериментально, используя ту самую игрушку, которая и побудила Моффатта начать свои исследования. Если диск Эйлера запустить не на прилагающемся в наборе зеркально-гладком подносе, а на обычном столе, то остановится он достаточно быстро, указывая тем самым на то, что время вращения теснейшим образом связано с гладкостью поверхности. Вязкость воздуха сколько-нибудь значимо влияет на прекращение движения только у «теоретических» монет. В реальности же вращение монет на столе никак не связано ни с какими конечно-временными сингулярностями. Трение ребра монеты о поверхность — вот что объясняет быстрое прекращение движения.

Ответ Моффатта. Действительно, наряду с вязкостью воздуха, диссипация энергии в данной системе может быть вызвана вибрацией поверхности, трением качения, возникающим из-за пластической деформации монеты в точке контакта, а также, как указывает van den Engh et al., трением скольжения (которое, возможно, даже превалирует над трением качения). В моем подходе скорость прецессии Ω и угол α удовлетворяют некоторому «адиабатическому» уравнению, которое справедливо лишь при отсутствии проскальзывания, что выполняется как раз для «сувенирного» диска Эйлера, вращающегося на зеркально-гладком подносе, установленном на жесткой поверхности (из переписки с В.А. Владимировым). Таким образом, я исхожу из того, что в рамках рассматриваемой модели проскальзывание не возникает. Основная задача состоит в том, чтобы для заданной поверхности и конкретного диска определить? какой из перечисленных механизмов диссипации является наиболее существенным, а затем получить зависимость скорости убывания энергии от угла α (сама энергия зависит от α линейным образом). Если эта скорость убывания оказывается пропорциональной α^λ и при этом $\lambda < 1$, тогда, в условиях адиабатического приближения, величина угловой скорости Ω станет бесконечно большой причем за конечное время (это и есть то, что называется конечно-временной сингулярностью). Для диссипации, вызванной вязкостью воздуха, $\lambda = -2$ (заметим, что вязкость воздуха слабо связана с давлением, поэтому откачка воздуха из сосуда, в котором двигалась монета, вряд ли сыграла сколько-нибудь значимую роль). Если рассмотреть более сложную модель, учитывающую динамику так называемых пограничных слоев Стокса как на диске, так и на поверхности, то $\lambda = -5/4$ (из переписки с L. Bildsten). Если предположить, что скорость диссипации, вызванная трением качения, пропорциональна Ω, то $\lambda = -1/2$. В каждой конкретной задаче, таким образом, выбор λ должен основываться на серии экспериментов. Я исследовал вязкую диссипацию только потому, что для нее существует математическая (а не эмпирическая) модель, в основе которой лежат уравнения Навье–Стокса из механики сплошной среды. Ввиду того, что вязкой диссипации соответствует наименьшее значение λ (то есть мы имеем здесь наиболее «сильную» сингулярность при α, стремящемся к нулю), можно предположить, что при малых α влияние именно вязкой диссипации становится наиболее существенным. Если же α не мало, то для диска меньшего радиуса не менее существенную роль играет и трение качения (из переписки с A. Ruina). Однако в этом случае, чтобы найти зависимость скорости убывания энергии от физических параметров диска и поверхности, придется решать уравнения, описывающие пластическую деформацию тел в их точке контакта. Эта задача достаточно сложна и, насколько мне известно, не решена до сих пор.

Список литературы

[1] J. Bendik, *Euler's Disk. The Official Website*, http://www.eulersdisk.com.

[2] H.K. Moffatt, Euler's disk and its finite-time singularity, *Nature*, vol. 404, April 2000, pp. 833–834.

[3] A. Ruina, Comments on "Euler's disk and its finite–time singularity" by H.K. Moffatt. Unpublished notes. Department of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, June 2000, expanded March 2002. http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/miscellaneous/rolling_and_sliding

[4] G. van den Engh, P. Nelson, J. Roach, Numismatic gyrations, *Nature*, vol. 408, November 2000, pp. 540. См. также: Moffatt replies, *Nature*, vol. 408, November 2000, pp. 540.

[5] A.J. McDonald, K.T. McDonald, The Rolling Motion of a Disk on a Horizontal Plane, Preprint, 2001. http://www.hep.princeton.edu/ mcdonald/examples.

[6] A.A. Stanislavsky, K. Weron, Nonlinear oscillations in the rolling motion of Euler's disk, *Physica D*, 2001, vol. 156, pp. 247–259.

[7] L. Bildsten, Viscous dissipation for Euler's disk, *Phys. Rev. E*, vol. 66, 2002, 056309, 2 p.

[8] K. Easwar, F. Rouyer, N. Menon, Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk, *Phys. Rev. E*, vol. 66, 2002, 045102, 3 p.

[9] A.A. Stanislavsky, Blow-up in the rolling motion of a disk on a horizontal plane, Preprint, 2002.

[10] P. Kessler, O.M. O'Reilly, The Ringing of Euler's Disk, Regul. Chaotic Dyn., 2002, 7 (1), pp. 49-60.

[11] D., Petrie , J.L. Hunt, C.G. Gray, Does the Euler Disk Slip During its Motion? *Am. J. Phys.*, vol. 70, 2002, no. 10, pp. 1025–1028.

[12] Caps H. et al. Rolling and slipping motion of Euler's disk, *Phys. Rev. E*, vol. 69, 2004, 056610, 6 p.

[13] Villanueva R., Epstein M. Vibrations of Euler's disk, *Phys. Rev. E*, vol. 71, 2005, 066609, 7 p.