

Тождество Лагранжа и его обобщения

В. В. Козлов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: kozlov@pran.ru

Знаменитое тождество Лагранжа выражает вторую производную от момента инерции системы материальных точек через кинетическую энергию и однородную потенциальную энергию. В работе даны различные обобщения этого замечательного результата на системы со связями, на случай, когда потенциальная энергия квазиоднородна по координатам, а также на континуум взаимодействующих частиц, который описывается известным кинетическим уравнением Власова.

Ключевые слова: тождество Лагранжа, квазиоднородная функция, уравнение Власова

V. V. Kozlov

Lagrange's identity and its generalizations

The famous Lagrange identity expresses the second derivative of the moment of inertia of a system of material points through the kinetic energy and homogeneous potential energy. The paper presents various extensions of this brilliant result to the case 1) of constrained mechanical systems, 2) when the potential energy is quasi-homogeneous in coordinates and 3) of continuum of interacting particles governed by the well-known Vlasov kinetic equation.

Keywords: Lagrange's identity, quasi-homogeneous function, dilations, Vlasov's equation
Mathematical Subject Classifications: 37A60, 82B30, 82CXX

1. Введение

Пусть система состоит из n взаимодействующих частиц с массами m_1, \dots, m_n и радиус-векторами r_1, \dots, r_n относительно некоторой неподвижной точки евклидова пространства E (его размерность для дальнейшего не имеет значения). Предполагается, что силы потенциальны и потенциальная энергия V — однородная функция от r_1, \dots, r_n степени однородности m . Знаменитое *тождество Лагранжа* имеет вид:

$$\ddot{I} = 4T - 2mV. \quad (1.1)$$

Точка обозначает дифференцирование по времени,

$$I = \sum m_i(r_i, r_i) = \sum m_i r_i^2$$

— момент инерции системы точек относительно начала системы отсчета, а

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i(\dot{r}_i, \dot{r}_i)$$

— ее кинетическая энергия.

С учетом интеграла энергии

$$T + V = h \quad (1.2)$$

равенство (1.1) представляется в виде

$$\ddot{I} = 4h - 2(m+2)V. \quad (1.3)$$

Из тождества Лагранжа вытекает ряд важных следствий. Например, для гравитационного взаимодействия $m = -1$ и $V < 0$. Следовательно, если $h \geq 0$, то, согласно (1.3), $\ddot{I} > 0$. Отсюда вытекает известный результат Якоби о неустойчивости системы гравитирующих тел с неотрицательным запасом полной энергии: некоторые частицы либо неограниченно сближаются, либо уходят друг от друга на неограниченное расстояние.

Другое важное следствие справедливо в предположении компактности энергетической поверхности (1.2) в фазовом пространстве рассматриваемой системы. В этом случае средние значения кинетической и потенциальной энергии как функций от времени существуют и равны

$$\langle V \rangle = \frac{2}{m+2}h, \quad \langle T \rangle = \frac{m}{m+2}h. \quad (1.4)$$

Здесь

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

Равенства (1.4), полученные Клаузиусом, примечательны тем, что для функций T и V средние по времени совпадают со средними по пространству (по компактному энергетическому многообразию), независимо от свойства эргодичности рассматриваемой системы. Статистический вариант теоремы Клаузиуса, основанный на рассмотрении ансамблей Гиббса, указан в работе [1].

В общем случае, когда силы F_1, \dots, F_n не потенциальные, тождество (1.1) заменяется следующим *вириальным равенством*:

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum (F_i, r_i). \quad (1.5)$$

Если силы потенциальны

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial r_i}$$

и V — однородная функция степени m , то по формуле Эйлера

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial r_i}, r_i \right) = mV.$$

В этом случае из (1.5) вытекает (1.1).

Наша цель — получить естественные обобщения тождества Лагранжа, в том числе

- для систем со связями,
- для квазиоднородной потенциальной энергии,
- для континуума взаимодействующих частиц, эволюция которого описывается кинетическим уравнением Власова.

2. Вириальное равенство для систем со связями

Предположим теперь, что на систему материальных точек наложены линейные по скорости и, вообще говоря, неинтегрируемые связи

$$(a_1, \dot{r}_1) + \dots + (a_n, \dot{r}_n) = b. \quad (2.1)$$

Здесь $a_1, \dots, a_n(b)$ — вектор-функции (соответственно обычная функция) от положений частиц и времени. Таких соотношений может быть несколько. Динамика такой системы описывается известным принципом Даламбера—Лагранжа:

$$\sum (m_i \ddot{r}_i - F_i, \delta r_i) = 0, \quad (2.2)$$

для всех возможных перемещений $\delta r_1, \dots, \delta r_n$, удовлетворяющих однородным линейным уравнениям

$$(a_1, \delta r_1) + \dots + (a_n, \delta r_n) = 0. \quad (2.3)$$

Пусть r_0 — радиус-вектор некоторой точки $O \in E$. Эта точка в общем случае подвижна: так что r_0 — некоторая функция времени t . Радиус-вектор ξ_i частицы с массой m_i относительно точки O равен, очевидно, $r_i - r_0$. Вектор

$$\eta = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

задает центр масс системы точек.

Дадим некоторые определения.

Определение 1. Кинетическая энергия системы относительно точки O — это квадратичная форма

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\xi}_i, \dot{\xi}_i).$$

Она, очевидно, не зависит от выбора начала исходной системы отсчета.

Определение 2. Момент инерции системы относительно точки O — это

$$I_0 = \sum m_i(\xi_i, \xi_i).$$

Определение 3. Будем говорить, что наложенные на систему связи (2.1) допускают бесконечно малые растяжения относительно точки O , если векторы

$$\delta r_1 = \xi_1 \delta \alpha, \dots, \delta r_n = \xi_n \delta \alpha, \quad \delta \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

являются возможными перемещениями (т. е. удовлетворяют уравнениям (2.3)).

Преобразования растяжения (подобия)

$$\xi_i \mapsto \alpha \xi_i, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

образуют однопараметрическую группу. Их дифференциалы по параметру α при $\alpha = 1$ (в единице группы) совпадают с (2.4).

Теорема 1. Если в каждый момент времени наложенные на систему связи допускают бесконечно малые растяжения относительно точки O и

$$(\ddot{r}_0, \eta - r_0) = 0, \quad (2.5)$$

то справедливо вириальное равенство

$$\ddot{I} = 4T_0 + 2 \sum (F_i, \xi_i). \quad (2.6)$$

Это утверждение сходно по формулировке с общими теоремами динамики. Отметим теоремы об изменении импульса (кинетического момента) вдоль (соответственно вокруг) подвижной оси, установленные в [2].

Укажем частные случаи, когда заведомо выполнено условие (2.5).

- 1°. Точка O движется равномерно и прямолинейно ($\ddot{r}_0 = 0$).
- 2°. Точка O совпадает с центром масс системы (тогда $r_0 = \eta$). Отметим, что сам Лагранж формулировал тождество (1.1) также и относительно центра масс системы взаимодействующих частиц.
- 3°. Радиус-вектор центра масс относительно точки O постоянен по величине и направлению и ортогонален скорости точки O .

Вообще, разность $\eta - r_0$ есть η_0 — радиус-вектор центра масс относительно точки O . Поэтому условие (2.5) можно переписать в эквивалентной форме:

$$(\ddot{r}_0, \eta_0) = 0.$$

Если силы F_1, \dots, F_n потенциальны и силовая функция есть однородная форма от ξ_1, \dots, ξ_n , то из (2.6) получаем тождество Лагранжа вида (1.1).

Для доказательства теоремы 1 подставим возможные перемещения (2.4) в уравнение (2.2):

$$\sum (m_i \ddot{r}_i, \xi_i) = \sum (F_i, \xi_i).$$

Представим его в виде

$$\sum m_i(\ddot{\xi}_i, \xi_i) + \sum m_i(\ddot{r}_0, \xi_i) = \sum (F_i, \xi_i). \quad (2.7)$$

Очевидно, что условие $\sum m_i(\ddot{r}_0, \xi_i) = 0$ эквивалентно (2.5). После известных элементарных преобразований из (2.7) получаем (2.6).

Оказывается, условие (2.5) является критерием справедливости теоремы об изменении кинетической энергии в подвижной системе отсчета с началом в точке O .

Теорема 2. Если в каждый момент времени действительные относительные перемещения $d\xi_i = \dot{\xi}_i dt$ лежат среди возможных (т. е. удовлетворяют (2.3)) и выполнены (2.5), то

$$dT_0 = \sum (F_i, d\xi_i).$$

Доказательство основано на подстановке в принцип Даламбера–Лагранжа (2.2) вместо δr_i относительных скоростей $\dot{\xi}_i$ и выполнении элементарных преобразований.

Предположим, что выполнены условия теоремы 2 и силы потенциальны:

$$F_i = \frac{\partial V_0}{\partial \xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad V_0 = V_0(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (2.8)$$

Тогда уравнения движения допускают обобщенный интеграл энергии $T_0 + V_0 = h_0 = \text{const}$. В частности, если V_0 — однородная функция степени m , то с учетом теоремы 1 получаем обобщенное тождество Лагранжа (1.3):

$$\ddot{I}_0 = 4h_0 - 2(m+2)V_0.$$

Сделаем еще простое замечание. Пусть в исходной неподвижной системе отсчета силы потенциальны, причем потенциальная энергия V зависит лишь от взаимных расстояний $|r_i - r_j|$. Тогда выполнены соотношения (2.8), причем

$$V_0 = V|_{r_i \rightarrow \xi_i}.$$

Действительно, $|r_i - r_j| = |\xi_i - \xi_j|$ и дифференцирования по r_i и ξ_i совпадают (так как $r_i = \xi_i + r_0(t)$). ■

В заключение этого параграфа укажем условия на связи, допускающие бесконечно малые растяжения. Для простоты записи будем считать, что $r_0 = 0$.

А. Пусть связи (2.1) интегрируемые и представлены в виде

$$f(r_1, \dots, r_n, t) = 0, \quad (2.9)$$

где f — однородная функция от r_1, \dots, r_n при всех значениях t . Тогда

$$a_j = \frac{\partial f}{\partial r_j}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial t}$$

и по формуле Эйлера для однородных функций

$$\sum (a_i, r_i) = 0$$

на нестационарной канонической поверхности (2.9).

В. Приведем пример *неинтегрируемой* связи, допускающей бесконечно малые растяжения. Ограничимся одной частицей в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть связь задана уравнением

$$(a, \dot{r}) = 0, \quad a = [r, \nu], \quad (2.10)$$

где ν — гладкая вектор-функция от $r = (x_1, x_2, x_3)$. Здесь $[,]$ — стандартное векторное умножение. Ввиду тождества

$$([r, \nu], r) \equiv 0,$$

связь (2.10) действительно допускает преобразования растяжения. Нам остается показать, что при подходящем выборе вектор-функции ν связь (2.10) неинтегрируемая:

$$(\text{rot } a, a) \neq 0.$$

Легко проверить, что это условие заведомо выполнено, если вектор ν имеет компоненты $1, x_3, 0$.

3. Квазиоднородные потенциалы

Вернемся к рассмотрению *свободной* системы без связей и несколько обобщим наше рассмотрение. Пусть теперь E — n -мерное евклидово пространство с декартовыми координатами $(x_1, \dots, x_n) = x$; это — конфигурационное пространство. Кинетическая энергия — квадратичная форма

$$T = \frac{1}{2}(G\dot{x}, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad G = \|g_{ij}\|$$

с постоянными коэффициентами; F_1, \dots, F_n — обобщенные силы, действующие на систему. Уравнение движения имеет вид

$$G\ddot{x} = F, \quad F = (F_1, \dots, F_n)^T.$$

Умножим обе части скалярно на вектор Ax , где A — некоторый линейный оператор:

$$(G\ddot{x}, Ax) = (F, Ax).$$

Преобразуем левую часть, предполагая, что матрица $A^T G = B$ симметрична:

$$(Bx, \ddot{x}) = 2(B\dot{x}, \dot{x}) + 2(B\ddot{x}, x) = 2(B\dot{x}, \dot{x}) + 2(F, Ax). \quad (3.1)$$

Введем новую «кинетическую энергию»

$$K = \frac{1}{2}(B\dot{x}, \dot{x})$$

и ассоциированный с ней момент инерции системы

$$J = (Bx, x).$$

Тогда (3.1) можно представить в виде *обобщенного вириального равенства*

$$\ddot{J} = 4K + 2(F, Ax). \quad (3.2)$$

Ясно, что $A = G^{-1}B$. В связи с этим полезно отметить, что любую матрицу можно представить в виде произведения двух симметричных (см., например, [3]).



Эти простые вычисления действительно обобщают соотношение (1.5). Чтобы убедиться в этом, надо в качестве E^n взять прямое произведение нескольких трехмерных евклидовых пространств; координаты в этом пространстве — набор декартовых координат отдельных частиц. Далее, оператор инерции G следует положить равным

$$\text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots),$$

а в качестве A надо взять единичный оператор.

Пусть обобщенные силы потенциальны: $F = -\partial V/\partial x$.

Лемма. Если спектр оператора A лежит в левой (или правой) комплексной полуплоскости, то для любого $m \neq 0$ найдутся потенциалы $V: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}, Ax\right) = mV. \quad (3.3)$$

Это соотношение обобщает формулу Эйлера для однородных функций и переходит в нее, когда A — тождественный оператор.

Для доказательства леммы рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\alpha} = Ax; \quad (3.4)$$

ее фазовый поток состоит из семейства преобразований

$$x \mapsto e^{A\alpha}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть гладкая функция $V: E \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$V(e^{A\alpha}x) = e^{m\alpha}V(x). \quad (3.5)$$

Тогда она удовлетворяет (3.3). Для доказательства достаточно продифференцировать это равенство по α и положить затем $\alpha = 0$.

Нам осталось показать, что функции вида (3.5) действительно существуют. Поскольку спектр A лежит в левой (правой) комплексной полуплоскости, то фазовые траектории системы (3.4) (кроме равновесия $x = 0$) пересекают в одной точке некоторый эллипсоид $S = \{x \in E: (\Lambda x, x) = 1\}$. На самом деле, согласно теореме Ляпунова, в этом случае найдется положительно определенная квадратичная форма $f = (\Lambda x, x)$ такая, что ее производная в силу системы (3.4) будет отрицательно (положительно) определенной квадратичной формой. Положим, например,

$$V|_S = 1.$$

Продолжим затем функцию V на траекторию системы (3.4), проходящую через точку $x \in S$, по формуле (3.5). Несложно проверить, что тем самым функция V корректно определена в $E \setminus \{0\}$ и всюду удовлетворяет (3.5). Лемма доказана.

Пусть спектр A лежит в левой полуплоскости. Тогда при $m > 0$ построенный потенциал становится непрерывной функцией в точке $x = 0$, если положить $V(0) = 0$. При $m < 0$ потенциал будет иметь сингулярность в начале координат. Если $m = 0$, то (согласно (3.5)) функция V — первый интеграл линейной системы (3.4).

Важным примером служат квазиоднородные функции, удовлетворяющие условию

$$V(\beta^{\lambda_1}x_1, \dots, \beta^{\lambda_n}x_n) = \beta^m V(x_1, \dots, x_n), \quad \beta > 0. \quad (3.6)$$

Положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называется *показателями квазиоднородности*. Дифференцируя это соотношение по параметру β и полагая затем $\beta = 1$, получим формулу (3.3), где $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Формула (3.6) приводится к виду (3.5), если положить $\beta = e^\alpha$. Спектр матрицы A состоит из n вещественных отрицательных чисел.

Если потенциал V удовлетворяет (3.3), то (3.2) переходит в обобщенное тождество Лагранжа

$$\ddot{J} = 4K - 2mV. \quad (3.7)$$

Укажем одно из следствий этой формулы.

Теорема 3. Пусть $G = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, а потенциальная энергия V — квазиоднородная функция степени $m > 0$. Тогда любое движение $t \mapsto x(t)$ с отрицательной энергией уходит на бесконечность как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

Доказательство. В этих предположениях матрица $A^T G$ симметрична и положительно определена, причем

$$J = \sum m_i \lambda_i x_i^2, \quad K = \frac{1}{2} \sum m_i \lambda_i \dot{x}_i^2.$$

Согласно интегралу энергии, $T + V = h < 0$. Следовательно, движение происходит в области, где $V(x) \leq h < 0$. Но тогда, согласно (3.7), $\ddot{J} \geq 2m|h| > 0$. Значит, $J(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$, что и требовалось. ■

Следствие. Если квазиоднородная потенциальная энергия не имеет в точке $x = 0$ локального минимума, то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Действительно, сколь угодно близко к состоянию равновесия $x = 0, \dot{x} = 0$ найдутся состояния с отрицательной полной энергией.

Есть еще один класс квазиоднородных функций, который формально не попадает под определение (3.6). Это — логарифмически однородные функции:

$$V(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = V(x_1, \dots, x_n) + c \ln \alpha; \quad \alpha > 0, \quad c = \text{const}. \quad (3.8)$$

Эквивалентное определение: экспонента от V — однородная функция степени c . Примером служит следующая функция:

$$V(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i < j} \kappa_{ij} \ln r_{ij},$$

где r_{ij} — расстояние между частицами m_i и m_j . В этом примере $c = \sum \kappa_{ij}$.

Дифференцируя (3.8) по α и полагая затем $\alpha = 1$, приходим к соотношению

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i = c.$$

Легко доказать, что для систем с логарифмическими потенциалами необходимое условие устойчивости сводится к неравенству $c \geq 0$. Действительно, если $c < 0$, то

$$\ddot{J} = 4T - 2c \geq 2|c| > 0.$$

Но тогда частицы обязательно разлетаются как в будущем (когда $t \rightarrow +\infty$), так и в прошлом (когда $t \rightarrow -\infty$).

4. Континуум взаимодействующих частиц

Покажем, как (с некоторыми предосторожностями) тождество Лагранжа можно распространить на континуум взаимодействующих частиц. Вместо дискретного набора масс следует ввести непрерывное распределение с интегрируемой плотностью $\rho(x, v, t)$, где x — точка n -мерного евклидова пространства, v — ее скорость. Будем считать выполненным условие нормировки

$$\int_{\Gamma} \rho(x, v, t) d^n x d^n v = 1, \quad \Gamma = E \times \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Это соотношение справедливо в каждый момент времени, поскольку частицы не исчезают и не рождаются. Пусть w — плотность потенциала парного взаимодействия; это функция от расстояния между частицами.

Динамика континуума описывается кинетическим уравнением Власова

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, v \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}, F \right) = 0, \quad (4.2)$$

где

$$F = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Gamma} w(|x - y|) \rho(y, u, t) d^n y d^n u.$$

Это уравнение имеет существенное значение для кинетики, в частности, в теории плазмы (см., например, [4]). Будем считать, что задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Власова однозначно разрешима в соответствующих функциональных пространствах. Это — содержательная и нетривиальная задача, еще пока не решенная до конца (см. по этому поводу [5, 6]).

Введем момент инерции системы частиц относительно начала системы отсчета

$$I(t) = \int \rho(x, v, t) x^2 d^n x d^n v, \quad (4.3)$$

кинетическую энергию системы

$$T(t) = \frac{1}{2} \int \rho(x, v, t) v^2 d^n x d^n v$$

и суммарную потенциальную энергию взаимодействия

$$V(t) = \frac{1}{2} \int \rho(x, v, t) \rho(y, u, t) W(|x - y|) d^n x d^n v d^n y d^n u. \quad (4.4)$$

Конечно, надо дополнительно предполагать, что все эти интегралы сходятся и являются гладкими функциями времени. Если опустить множитель $\frac{1}{2}$ в (4.4), то потенциальная энергия взаимодействия каждой пары частиц будет учитываться дважды. В дискретном случае это обстоятельство было хорошо известно еще Лагранжу. В рассматриваемой модели «самодействие» отсутствует: каждая частица сама на себя не действует.

Используя уравнение (4.2) и формулу Гаусса–Остроградского, можно доказать сохранность полной энергии

$$T + V = h = \text{const}. \quad (4.5)$$

Впрочем, этот факт очевиден с физической точки зрения.

Теорема 4. Если W — однородная функция степени m , то справедливо тождество Лагранжа (1.1).

Доказательство. Используя уравнение (4.2), вычислим сначала производную по времени от (4.3):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x^2 dx dv = - \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, v \right) x^2 dx dv + \\ &+ \int x^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x} \int W(|x-y|) \rho(y, u, t) dy du \right) dx dv. \end{aligned}$$

По формуле Гаусса—Остроградского, первый интеграл равен

$$2 \int (x, v) \rho(x, v, t) dx dv, \quad (4.6)$$

а второй равен нулю (достаточно провести интегрирование по v).

Аналогично вторая производная интеграла (4.3) равна

$$\begin{aligned} &-2 \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, v \right) (x, v) dx dv + \\ &+ 2 \int (x, v) \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x} \int W(|x-y|) \rho(y, u, t) dy du \right) dx dv. \end{aligned}$$

Снова применяя формулу Гаусса—Остроградского, первый интеграл преобразуем к виду

$$2 \int \rho(v, v) dx dv = 4T.$$

Второй станет равным

$$2 \int \rho(x, v, t) \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \int W(|x-y|) \rho(y, u, t) dy du \right) dx dv. \quad (4.7)$$

Поскольку W — однородная функция от

$$|x-y| = \left(\sum (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\left(x, \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \left(y, \frac{\partial W}{\partial y} \right) = mW. \quad (4.8)$$

Далее, значение интеграла (4.7) не изменится, если в подынтегральной функции поменять местами две группы переменных: x, v и y, u . Применяя затем формулу (4.8), интеграл (4.7) сведем к

$$m \int \rho(x, v, t) \rho(y, u, t) W(|x-y|) dx dv dy du = 2mV.$$

Что и доказывает теорему. ■

В предположении ограниченности производной \dot{I} , из теоремы 4 и равенства (4.5) выводятся формулы Клаузиса (1.4). Правда, в отличие от конечномерного случая, это условие в общем случае труднопроверяемое. Укажем некоторые достаточные условия ограниченности \dot{I} .

Если сам момент инерции I ограничен и потенциальная энергия неотрицательна (например, $W \geq 0$), то величина $|\dot{I}(t)|$ ограничена на всей оси времени. Действительно, по неравенству Коши $2|(x, v)| \leq (x, x) + (v, v)$, из (4.6) вытекает оценка

$$|\dot{I}| \leq I + 2T.$$

Остается заметить, что из формулы (4.5) с учетом неравенства $V \geq 0$ вытекает ограниченность кинетической энергии $T \leq h$.

Сделаем следующее замечание. Если плотность потенциала W — однородная функция степени m , то отсюда сразу не видно, почему потенциальная энергия (4.4) также будет однородным функционалом. Дело в том, что в выражение для V входит плотность распределения, также зависящая от положения частиц. Выход из этого затруднения состоит в следующем наблюдении: кинетическое уравнение Власова (4.2) допускает группу подобий

$$t \mapsto \alpha^{\frac{2-m}{2}} t, \quad x \mapsto \alpha x, \quad v \mapsto \alpha^{\frac{m}{2}} v, \quad \rho \mapsto \alpha^{-\frac{m+2}{2}n} \rho. \quad (4.9)$$

Более того, при таких преобразованиях не меняется также и нормировочное соотношение (4.1), которое выражает закон сохранения общей массы частиц.

В результате преобразования (4.9) интегральные величины I , T и V умножаются на α^2 , α^m и α^m соответственно. В частности, суммарная потенциальная энергия континуальной системы частиц будет однородным функционалом нужной степени m .

В заключение рассмотрим в качестве примера континуум частиц в n -мерном евклидовом пространстве $E^n = \{x\}$, упруго притягивающихся друг к другу. В этом случае плотность потенциала W равна

$$\frac{k}{2}|x - y|^2 = \frac{k}{2} \sum (x_i - y_i)^2,$$

где $k = \text{const}$ — коэффициент упругости; w — однородная функция степени $m = 2$.

С учетом соглашения о нормировке (4.1), центр масс системы определяется вектором

$$\eta = \int x \rho(x, v, t) dx dv.$$

Это — функция от времени. Покажем сначала, что $\dot{\eta} = 0$; то есть центр масс движется прямолинейно и равномерно. Этот вывод справедлив, конечно, для любого потенциала взаимодействия, зависящего от расстояния между частицами. Подсчитаем скорость центра масс:

$$\dot{\eta} = - \int x \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, v \right) - \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x} \int W \rho(y, u, t) dy du \right) \right] dx dv = \int v \rho dx dv.$$

Далее:

$$\ddot{\eta} = - \int v \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, v \right) - \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x} \int W \rho(y, u, t) dy du \right) \right] dx dv = 0$$

по формуле Гаусса—Остроградского, поскольку интеграл

$$\int W \rho dy du$$

не зависит от v .

Без ущерба для общности будем считать, что $\eta = 0$. Это предположение эквивалентно переходу в инерциальную систему отсчета, движущуюся вместе с центром масс. С учетом этого соглашения и формулы (4.1), для упругого взаимодействия суммарная потенциальная энергия (4.4) равна

$$\frac{k}{4} \int \rho(x, v, t) \rho(y, u, t) x^2 dx dv dy du + \frac{k}{4} \int \rho(x, v, t) \rho(y, u, t) y^2 dx dv dy du - \frac{k}{2} \sum \int x_i \rho(x, v, t) dx dv \int y_i \rho(y, u, t) dy du = \frac{k}{2} I.$$

Тогда, по теореме 4 и формуле (1.3):

$$\ddot{I} = 4h - 4kI.$$

Следовательно, момент инерции континуума осцилляторов относительно его центра масс совершает гармонические колебания с частотой $2\sqrt{k}$, а его среднее значение равно h/k .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта NWO-RFBR.

Список литературы

- [1] Козлов В. В. Ансамбли Гиббса, равномерность энергии симпатических осцилляторов и статистические модели термостата, *Нелинейная динамика*, 2006, №2. с. 123–140.
- [2] Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики, *Прикл. мат. мех.*, 1978, т. 42, вып. 1, с. 28–33.
- [3] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ*, М.: Мир. 1989.
- [4] Веденяпин В. В. *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*, М.: Физматлит, 2001.
- [5] Маслов В. П. *Уравнения самосогласованного поля*, в кн.: *Современные проблемы математики*, М.: ВИНТИ АН СССР, 1978, т. 11, с. 153–234.
- [6] Добрушин Р. Л. Уравнение Власова, *Функц. анализ и его прилож.*, 1979, т. 13. вып. 2, с. 48–58.