

Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований, Удмуртский государственный университет
Отдел математических методов нелинейной динамики Института математики и механики УрО РАН
Россия 469034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mails: borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 13 июня 2008 г.

В работе исследуются различные механические системы с неголономными связями. В частности, рассмотрены вопросы существования тензорных инвариантов (законов сохранения) и их связь с поведением системы. Особое внимание уделено возможности представления уравнений движения в конформно-гамильтоновой форме, которая в данной работе используется, главным образом, для интегрирования систем.

Ключевые слова: неголономные системы, реализация связей, законы сохранения, иерархия динамика, явное интегрирование

A. V. Borisov and I. S. Mamaev

Conservation Laws, Hierarchy of Dynamics and Explicit Integration of Nonholonomic Systems

This paper can be regarded as a continuation of our previous work [70, 71] on the hierarchy of the dynamical behavior of nonholonomic systems. We consider different mechanical systems with nonholonomic constraints; in particular, we examine the existence of tensor invariants (laws of conservation) and their connection with the behavior of a system. Considerable attention is given to the possibility of conformally Hamiltonian representation of the equations of motion, which is mainly used for the integration of the considered systems.

Keywords: nonholonomic systems, implementation of constraints, conservation laws, hierarchy of dynamics, explicit integration

Mathematical Subject Classifications: 34D20, 70E40, 37J35

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	226
2. Уравнения движения неголономных систем	227
2.1. Неголономные связи и уравнения Феррерса	227
2.2. Уравнения Пуанкаре—Суслова	229
2.3. Тяжелое твердое тело на плоскости без проскальзывания и верчения (резиновое тело)	229
2.4. Уравнения движения некоторых систем неголономной механики	232
3. Неголономность связей и некоторые изоморфизмы	233
3.1. Теорема Фробениуса, ее обобщения и неголономность уравнений связи	234
3.2. Однородный мраморный шар на абсолютно шероховатой плоскости	235
3.3. Однородный резиновый шар на (выпуклой) поверхности	236
3.4. Шар Чаплыгина без верчения и задача Веселовой	237
3.5. Обсуждение	238
4. Законы сохранения в неголономной механике	239
4.1. Интегралы и поля симметрий. Закон сохранения энергии	239
4.2. Инвариантная мера	240
4.3. Пуассонова структура. Гамильтоновость и конформная гамильтоновость	240
4.4. Каноническое представление конформно-гамильтоновых систем	241
5. Интегрируемость и приводимость	243
5.1. Интегрируемость с помощью полей симметрий и первых интегралов	243
5.2. Интегрируемость по Эйлеру—Якоби	245
5.3. Обобщенные системы Чаплыгина	246
6. Тяжелое резиновое тело вращения на плоскости	249
7. Система Веселовой	250
7.1. Уравнения движения и законы сохранения	250
7.2. Конформно-гамильтоново представление	251
7.3. Алгебраическое представление и изоморфизм с системой Неймана	253
8. Шар Чаплыгина	254
8.1. Уравнения движения и законы сохранения	254
8.2. Конформно-гамильтоново представление	255
8.3. Шар Чаплыгина как обобщенная система Чаплыгина	256
8.4. Шар Чаплыгина с гиростатом	258
8.5. Два изоморфизма со случаем Клебша	259

9. Шар Чаплыгина на сфере	260
9.1. Уравнения движения и интегрируемые случаи	260
9.2. Представление в форме системы Чаплыгина и конформная гамильтоновость при $k = -1$	260
9.3. Разделение переменных	262
10. Резиновый шар на сфере	263
10.1. Уравнения движения	263
10.2. Законь сохрания и интегрируемые случаи	264
10.3. Гамильтонова структура и алгебраизация	264
10.4. Траекторный изоморфизм	266
10.5. Разделение переменных для случая $k = -1$	266
11. Динамически несимметричный неуравновешенный шар на плоскости	267
11.1. Мраморный шар	267
11.2. Резиновый шар	268
12. Дискуссия	269
12.1. Модель трения Контенсу—Эрисмана	269
12.2. Реализация неголономных связей при качении	270
12.3. Модели качения и динамические эффекты	271
12.4. Проблема отрыва	272
13. Нерешенные задачи	272

1. Введение

Настоящая статья является в некотором смысле продолжением наших предыдущих работ по иерархии динамического поведения неголономных систем [70, 71]. Здесь мы более подробно остановимся на вопросах явного интегрирования неголономных систем. Опишем кратко содержание работы.

В разделе 2 выводятся уравнения движения твердого тела в наиболее удобной форме для изучения более общих систем на группах Ли при наличии интегрируемых либо неинтегрируемых связей. Это уравнения движения в квазискоростях, обобщающие уравнения Эйлера—Пуанкаре, используемые в обычной голономной механике. Эта наиболее общая система уравнений позволяет в наиболее компактной форме описать как классическую модель качения без проскальзывания твердых тел по различным поверхностям, так и новую модель, отличающуюся от классической наличием дополнительной связи (и образно названную в работах Койлера качением резинового тела — *rubber rolling*).

Во разделе 3 обсуждаются вопросы применения теоремы Фробениуса и некоторых ее обобщений к доказательству неголономности заданной системы связей. Кроме того рассматриваются некоторые изоморфизмы между неголономными и голономными системами, а также изоморфизмы между двумя различными неголономными системами. Показано, что одна и та же неголономная связь может приводить как к голономной, так и неголономной динамической системе.

В разделе 4 обсуждаются законы сохранения полученных уравнений движения. Наряду с первыми интегралами мы рассматриваем более сложные законы сохранения, так называемые тензорные инварианты, такие как поля симметрий, инвариантная мера, пуассонова структура. Исследование системы при определенных наборах тензорных инвариантов (иерархии, по терминологии [70, 71]) позволяет получить достаточно подробную качественную информацию о движении. Кроме того, эти инварианты используются при интегрировании уравнений неголономной механики.

Различные способы интегрирования, использующие указанные тензорные инварианты, рассмотрены в разделе 5. Мы, в частности, сосредоточимся на вопросе о взаимосвязи между интегрируемостью и приводимостью уравнений к гамильтоновой форме с помощью замен координат и, возможно, времени. Этот метод был впервые предложен Чаплыгиным и был назван им методом приводящего множителя [61]. Мы существенно расширяем класс систем, интегрируемых этим методом и называем эти системы *обобщенными системами Чаплыгина*. Оказывается, что к таким обобщенным системам относится ряд классических и сравнительно новых систем неголономной механики (включая задачу о качении резинового тела).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С. А. Чаплыгин указал, с одной стороны, ряд конкретных замечательных систем динамики, еще требующих подробного анализа. С другой стороны, он разработал ряд общих уравнений и процедур явного интегрирования; эти труды до сих пор содержат большой, до конца еще нераскрытый потенциал. В нашей статье намечено их новое развитие. Представленные здесь методы, такие как методы анализа интегрируемости и конструктивного явного интегрирования, базируются на фундаментальных идеях Чаплыгина.

Публикация переводов ряда замечательных работ С.А. Чаплыгина, включая [61], была предпринята журналом *Regular and Chaotic Dynamics* (см. vols. 7(2), 12(1), 12(2), 13(4)).

Интересным следствием использования метода приводящего множителя является то, что при приведении к гамильтоновой форме возникают некоторые новые нелинейные, как правило, пуассоновы структуры, а ряд систем сводится к хорошо известным интегрируемым задачам классической гамильтоновой механики. Среди них укажем, например, случай Клебша, описывающий динамику твердого тела в жидкости. Эти интересные изоморфизмы сложно получить каким-либо другим методом.

Последующие разделы 6–11 посвящены исследованию конкретных неголономных динамических систем. Практически для каждой из рассмотренных задач мы доводим решение до явных квадратур и до вида, необходимого для проведения более подробного анализа динамики.

В рассмотренных примерах в зависимости от имеющихся законов сохранения возможны различные типы динамического поведения: от наиболее простого регулярного поведения интегрируемых систем в случае наличия «полного набора законов сохранения» до сложного хаотического поведения, характерного для диссипативных систем, в случае отсутствия инвариантов. Для возможного спектра различных типов поведения неголономных динамических систем при наличии тех или иных тензорных инвариантов в работе [70] предложено название «иерархия динамики».

В разделе 12 мы приводим дискуссию, касающуюся вопросов применимости различных моделей трения и неголономных моделей для описания динамики твердого тела, соприкасающегося с поверхностью.

В заключительном разделе перечислены некоторые нерешенные задачи.

2. Уравнения движения неголономных систем

2.1. Неголономные связи и уравнения Феррерса

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — обобщенные координаты на конфигурационном пространстве системы \mathcal{M} (пространстве положений и т. п.). Уравнения (неголономных) связей в общем случае имеют вид

$$f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m < n. \quad (2.1)$$

Грубо говоря, основное отличие неголономных связей от голономных заключается в том, что они не могут быть представлены в конечном (интегральном) виде

$$F_\mu(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \mu = 1, \dots, \bar{m} < n.$$

Критерий, позволяющий проверять неголономность связей, может быть получен при помощи теоремы Фробениуса. Более подробное обсуждение этого вопроса применительно к конкретному примеру неголономной системы будет приведено ниже.

Рассматриваемые в неголономной механике связи, как правило, являются линейными по обобщенным скоростям и не зависят явно от времени

$$f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_k a_{\mu k}(\mathbf{q}) \dot{q}_k + b_\mu(\mathbf{q}) = 0. \quad (2.2)$$

Именно такие связи реализуются в содержательных задачах. Тем не менее, Аппелем и Гамелем был указан несколько искусственный пример нелинейной неголономной связи. Всюду в дальнейшем в работе мы будем рассматривать только связи вида (2.2).

Исторически первой общей формой уравнений неголономной механики следует считать уравнения Феррерса¹ с неопределенными множителями (1872 г.) [91]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (2.3)$$

¹Феррерс при выводе уравнений ограничился рассмотрением декартовых координат.

где $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_n} \right)$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right)$. В уравнениях (2.3) T — кинетическая энергия, \mathbf{Q} — обобщенная сила, а λ_μ являются неопределенными множителями, которые однозначно восстанавливаются из условий связей (2.2).

Так, если кинетическая энергия — однородная квадратичная форма обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}), \quad (2.4)$$

где $\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}})$ — симметричная матрица, то неопределенные множители удовлетворяют системе линейных уравнений вида

$$\sum_{\nu} \left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \lambda_{\nu} = \left(\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} \right) - \left(\dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad \mu = 1 \dots m. \quad (2.5)$$

Здесь и далее (\cdot, \cdot) обозначает скалярное произведение векторов.

Решая эту систему получим неопределенные множители как функции обобщенных координат и скоростей: $\lambda_{\mu} = \lambda_{\mu}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. После подстановки этих множителей в уравнения (2.3) получим замкнутую систему, при этом уравнения (2.2) определяют инвариантное многообразие этой системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство формулы (2.5) состоит в дифференцировании уравнений (2.2)

$$\left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right) + \left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \ddot{\mathbf{q}} \right) = 0$$

и подстановке ускорений $\ddot{\mathbf{q}}$ из уравнений (2.3).

Феррерс также исключил неопределенные множители и получил некоторый аналог лагранжевых уравнений движения [91]. Кроме уравнений Феррерса в неголономной механике изучаются также уравнения Аппеля, Чаплыгина, Маджи, Вольтерра, Воронца, Больцмана—Гамеля, последние также иногда называют уравнениями Эйлера—Лагранжа (см., например, [112] и библиографию к этой статье). Все эти формы связаны с различными способами исключения неопределенных множителей и на практике используются редко вследствие своей громоздкости и необходимости проведения большого количества промежуточных вычислений. При составлении конкретных уравнений движения, связанных, например, с качением, обычно пользуются общими уравнениями динамики (содержащими реакции) или универсальными уравнениями в форме (2.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве интересного факта отметим, что, например, С. А. Чаплыгин, получивший общую форму уравнений неголономной механики, носящую его имя, при решении конкретных неголономных задач (принесших ему мировую известность) пользовался не этими уравнениями, а общими принципами динамики. С другой стороны, известный киевский механик П. В. Воронец, также получивший общие динамические неголономные уравнения (кстати говоря, имеющие очень громоздкую форму), многократно использовал их при изучении конкретных систем [17–19, 114–116]. Во многих случаях это привело к неоправданным усложнениям в анализе.

Если силы, действующие на систему, потенциальны, то уравнения движения (2.3) представляются в форме

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad L = T - U, \quad (2.6)$$

где L — функция Лагранжа системы без учета связей, а T, U — кинетическая и потенциальная энергия, соответственно.

2.2. Уравнения Пуанкаре–Суслова

Укажем еще одну форму уравнений движения, очень удобную для составления уравнений неголономных систем, встречающихся в реальных примерах.

Для конфигурационного пространства \mathcal{M} определим некоординатный базис векторных полей по формуле

$$\mathbf{E}_i = \sum_j G_{ji}(\mathbf{q}) \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Используя (2.7), для скоростей, связей и функции Лагранжа системы получим

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \sum_j G_{ij}(\mathbf{q}) w_j, \quad f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{f}_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = 0,$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{L}(\mathbf{q}, \mathbf{w}),$$

где $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ — компоненты скорости системы в базисе $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$. Величины w_i иногда называют параметрами Пуанкаре.

В общем случае коммутаторы векторных полей (2.7) представляются в форме

$$[\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j] = \sum_k c_{ij}^k(\mathbf{q}) \mathbf{E}_k. \quad (2.8)$$

Предложение 1. Уравнения движения неголономной системы (2.6) эквивалентны системе уравнений (первого порядка) вида

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial w_i} \right) - \sum_{i,k} c_{ji}^k(\mathbf{q}) \frac{\partial \hat{L}}{\partial w_k} w_j - \mathbf{E}_i(\hat{L}) = \sum_\mu \hat{\lambda}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial w_i}, \\ \dot{\mathbf{q}}_i = \sum_j G_{ij}(\mathbf{q}) w_j, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $\hat{\lambda}_\mu$ — неопределенные множители и $\mathbf{E}_i(\hat{L}) = \sum_j G_{ji}(\mathbf{q}) \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}$.

Доказательство можно найти, например, в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Уравнения (2.9) представляют собой наиболее общую форму уравнений Даламбера–Лагранжа 2-го рода; если в формулах (2.7) положить $G_{ij} = \delta_{ij}$, то получим обычные уравнения (2.6).

2.3. Тяжелое твердое тело на плоскости без проскальзывания и верчения (резиновое тело)

Рассмотрим подробнее вывод уравнений неголономной системы на примере движения тяжелого твердого тела, соприкасающегося одной точкой с неподвижной горизонтальной плоскостью, причем в точке контакта выполнены условия отсутствия проскальзывания и отсутствия верчения. (Подробный анализ качения поверхности по поверхности дан в работе [50]).

Механические реализации подобного рода связей при помощи различных шарниров и подвесов подробно обсуждаются в работе [7]. Здесь мы остановимся на интерпретации предположений из [83], где предполагается, что тело покрыто достаточно мягкой резиной, обеспечивающей надлежащий контакт с плоскостью. Для краткости в дальнейшем эту систему будем называть *резиновым телом на плоскости*. Кроме того, мы будем также рассматривать качение тел, при котором отсутствует только проскальзывание, но возможно верчение (т. е. верчение разрешено связями); такую систему, как предложено в [83], будем называть *мраморным телом*.

Конфигурационное пространство и кинематические соотношения. Конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3 \otimes SO(3)$, где первый сомножитель описывает положение центра масс тела, а второй — ориентацию тела. Определим две системы координат (см. рис. 1):

- *неподвижная* $OXYZ$ — начало O располагается в некоторой точке плоскости, а ось OZ перпендикулярна плоскости;
- *подвижная* $Cxyz$ — начало C совпадает с центром масс тела, а оси направлены вдоль главных осей инерции.

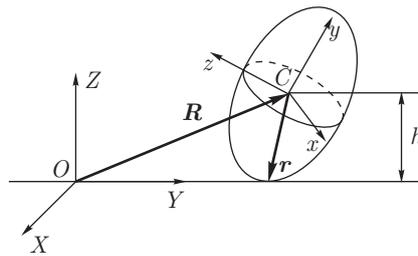


Рис. 1. Тело на плоскости

Пусть α, β, γ — орты неподвижного пространства (т. е. единичные векторы осей $OXYZ$), спроецированные на подвижные оси $Cxyz$, $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ — координаты центра масс тела в неподвижных осях $OXYZ$; если определить ортогональную матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \in SO(3), \quad (2.10)$$

то пара $(\mathbf{R}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^3 \otimes SO(3)$ однозначно определяет положение тела.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Тем самым мы фактически выбрали некоторые координаты на конфигурационном пространстве, хотя при этом $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ задают избыточные координаты на $SO(3)$.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — угловая скорость и скорость центра масс тела, спроецированные на подвижные оси $Oxyz$. В соответствующем базисе векторных полей (2.7) получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \sum_k \omega_k \boldsymbol{\xi}_k, & \boldsymbol{\xi}_k &= - \sum_{i,j} \varepsilon_{kij} \left(\alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} + \beta_i \frac{\partial}{\partial \beta_j} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial \gamma_j} \right), \\ \mathbf{v} &= \sum_k v_k \boldsymbol{\zeta}_k, & \boldsymbol{\zeta}_k &= \alpha_i \frac{\partial}{\partial R_1} + \beta_i \frac{\partial}{\partial R_2} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial R_3}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

соответствующие коммутаторы (2.8) имеют вид

$$[\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j] = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\xi}_k, \quad [\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\zeta}_j] = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad [\boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\zeta}_j] = 0. \quad (2.12)$$

Кроме того, выполнены следующие кинематические соотношения

$$\dot{\mathbf{Q}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}, \quad (2.13)$$

где $\tilde{\omega} = \|\tilde{\omega}_{ij}\|$ — кососимметрическая матрица, компоненты которой отождествляются с угловыми скоростями по обычному правилу

$$\tilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k.$$

Уравнения связей. Вследствие отсутствия проскальзывания в точке контакта ее скорость обращается в ноль, то есть

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \tag{2.14}$$

где \mathbf{r} — вектор из центра масс в точку контакта, также спроецированный на подвижные оси.

Если тело всюду выпукло и $f(\mathbf{r}) = 0$ — уравнение его поверхности, то \mathbf{r} может быть однозначно выражен через вектор γ путем обращения отображения Гаусса

$$\gamma = -\frac{\nabla f(\mathbf{r})}{|\nabla f(\mathbf{r})|}.$$

(Это уравнение выражает тот факт, что нормаль к поверхности тела совпадает с нормалью к плоскости.) В дальнейшем будем полагать, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\gamma)$ — заданная функция.

Отсутствие верчения обозначает, что проекция угловой скорости на нормаль к плоскости обращается в ноль

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{2.15}$$

Таким образом, уравнения связей определяются соотношениями (2.14), (2.15) и, как следует из этих соотношений связи, зависят лишь от векторов $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$.

Отметим, что такие простые уравнения связей получились вследствие специального выбора базиса векторных полей (2.11); так, к примеру, в углах Эйлера связи имеют очень громоздкий вид.

Функция Лагранжа свободного твердого тела записывается в виде

$$L = T - U.$$

Кинетическая энергия в выбранной системе координат *Cxyz* имеет вид

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}),$$

где m — масса тела, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции.

Потенциальная энергия в поле тяжести может быть представлена в форме (см. рис. 1)

$$U = mgh = -mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{2.16}$$

где g — величина ускорения свободного падения. Так как $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$, потенциал U зависит лишь от $\boldsymbol{\gamma}$ (т. е. $U = U(\boldsymbol{\gamma})$).

Уравнения движения с неопределенными множителями. Записывая уравнения (2.9) с учетом (2.12), (2.13) получим систему, описывающую движение тяжелого твердого тела на плоскости с учетом связей (2.14), (2.15):

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, & \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda} + \lambda_0\boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, & \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, & \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{R}_1 &= (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v}), & \dot{R}_2 &= (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{v}), & \dot{R}_3 &= (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $\lambda_0, \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — неопределенные множители.



Исключение множителей и редукция. Продифференцируем связь (2.14) и из первого уравнения (2.17) найдем λ :

$$\lambda = m\dot{\omega} \times \mathbf{r} + m\omega \times \dot{\mathbf{r}} + m(\mathbf{r} \times \omega) \times \omega.$$

Подставляя найденное λ во второе уравнение (2.17) и замечая, что оно не зависит от $\alpha, \beta, \mathbf{R}$, получим замкнутую систему, описывающую эволюцию векторов ω, γ в форме

$$\tilde{\mathbf{I}}\dot{\omega} = \tilde{\mathbf{I}}\omega \times \omega - m\mathbf{r} \times (\omega \times \dot{\mathbf{r}}) + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} + \lambda_0 \gamma, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (2.18)$$

здесь $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m\mathbf{r}^2\mathbf{E} - m\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ — тензор инерции относительно точки контакта, удовлетворяющей соотношению $\tilde{\mathbf{I}}\omega = \mathbf{I}\omega + m\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})$, а неопределенный множитель $\lambda_0 = \lambda_0(\omega, \lambda)$ находится из уравнения связи (2.15):

$$\lambda_0 = - \frac{\left(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\gamma, \tilde{\mathbf{I}}\omega \times \omega - m\mathbf{r} \times (\omega \times \dot{\mathbf{r}}) + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} \right)}{(\gamma, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\gamma)} \quad (2.19)$$

При заданных ω, γ (найденных из уравнения (2.18)) остальные переменные $\alpha, \beta, \mathbf{R}$ согласно (2.17) получаются при помощи квадратур.

Несложно показать, что при параметризации поворотов тела (т. е. векторов α, β, γ) при помощи углов Эйлера θ, φ, ψ уравнения (2.18) описывают эволюцию только углов θ, φ . То есть, при переходе от общей системы (2.17) к системе (2.18) не только исключаются неопределенные множители, но так же фактически выполняется редукция по углу прецессии ψ и движению центра масс \mathbf{R} .

В дальнейшем, при исследовании динамики резинового тела и подобных систем мы, как правило, ограничиваемся анализом редуцированной системы, описывающей поведение векторов ω, γ .

2.4. Уравнения движения некоторых систем неголономной механики

Приведем без вывода уравнения движения неголономных систем, которые мы исследуем в дальнейшем: задачи о качении шара Чаплыгина, системы Веселовой и задачи о движении резинового тела на сфере. Любопытно, что уравнения движения первых двух систем могут быть получены как частные случаи системы (2.18).

Шар Чаплыгина [60] — это система, описывающая качение без проскальзывания (но с верчением) шара по горизонтальной плоскости. Полагая в этом случае в (2.17) $\lambda_0 = 0$ и $\mathbf{r} = -a\gamma$, где a — радиус шара, получим уравнения описывающие эволюцию ω, γ

$$\tilde{\mathbf{I}}\dot{\omega} = \tilde{\mathbf{I}}\omega \times \omega - ma^2\gamma \times (\omega \times \dot{\gamma}) + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (2.20)$$

где в данном случае $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + ma^2\mathbf{E} - ma^2\gamma \otimes \gamma$.

Как мы видим, можно полагать, что на шар действуют силы, зависящие лишь от нормали к плоскости.

Система Веселовой [16] описывает движение твердого тела с неподвижной точкой с учетом связи (2.15).

Полагая в (2.17) $\mathbf{r} = 0$ и $\boldsymbol{\lambda} = 0$ находим

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \lambda_0 \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.21)$$

где в данном случае

$$\lambda_0 = - \frac{\left(\mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right)}{\left(\mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \right)}. \quad (2.22)$$

Резиновое тело на сфере [83]. Если резиновое тело движется по поверхности сферы радиуса a , то вывод уравнений, описанный в предыдущем разделе, необходимо модифицировать. В то же время, можно показать, что если обозначить через $\boldsymbol{\gamma}$ нормаль к поверхности сферы в точке контакта, спроецированную на подвижные оси, (см. рис. 2), то уравнения, описывающие эволюцию вектора $\boldsymbol{\omega}$ останутся теми же, что и в системе (2.18). Уравнения, описывающие движение вектора $\boldsymbol{\gamma}$ могут быть в этом случае получены из условия, что скорость точки контакта на поверхности сферы и на теле совпадают. Окончательно получим

$$\tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \lambda_0 \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{a} \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.23)$$

Тензор $\tilde{\mathbf{I}}$, вектор ($\boldsymbol{\gamma}$) и неопределенный множитель λ_0 определяется теми же соотношениями, что и на плоскости. При $a \rightarrow \infty$ система (2.23) переходит в систему на плоскости (2.18). Как мы видим, чтобы уравнения (2.23) образовывали замкнутую систему необходимо, чтобы потенциал внешних сил зависел лишь от нормали к сфере $\boldsymbol{\gamma}$.

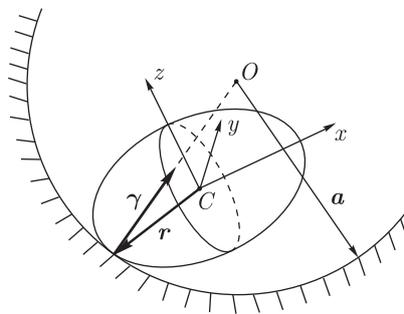


Рис. 2. Тело на сфере

3. Неголономность связей и некоторые изоморфизмы

В этом разделе мы на одном примере рассматриваем метод доказательства неголономности связей при помощи теоремы Фробениуса и ее обобщений. Мы также приводим примеры неголономных систем в динамике твердого тела, которые эквивалентны некоторым голономным системам из динамики материальных точек, и в заключение указываем изоморфизм двух, на первый взгляд различных, неголономных систем.

3.1. Теорема Фробениуса, ее обобщения и неголономность уравнений связи

Проверку неголономности системы связей (при помощи теоремы Фробениуса и ее обобщений) рассмотрим на примере линейных однородных по скоростям связей, заданных в переменных w_i для некоординатного базиса векторных полей $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$ (2.7):

$$\sum_i \hat{a}_{\mu i}(\mathbf{q}) w_i = 0, \quad \mu = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Здесь мы ограничимся описанием возможных (не самых общих) ситуаций без подробных доказательств (доказательства и обобщения можно получить при помощи стандартных приемов дифференциальной геометрии). Предполагая, что все связи (3.1) независимы, выполним две операции:

1. Находим $k = n - m$ линейно независимых решений системы (3.1) $\mathbf{w}^{(s)} = (w_1^{(s)}, \dots, w_n^{(s)})$ и строим (в явном виде) базис допустимых векторных полей на \mathcal{M} :

$$\boldsymbol{\eta}_s = \sum_i w_i^{(s)} \mathbf{E}_i, \quad s = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

То есть, построили распределение на \mathcal{M} , определяемое связями (3.1).

2. В каждой точке $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ строим линейную оболочку \mathcal{L} векторных полей $\boldsymbol{\eta}_s$ и их всевозможных коммутаторов $[\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j], \dots, [[\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j], \boldsymbol{\eta}_k], \dots$ и т. д. и вычисляем ее размерность $\dim \mathcal{L}$.

В зависимости от $\dim \mathcal{L}$ возможны следующие ситуации:

- если $\dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{M}$, то система связей (3.1) вполне неголономная, и, согласно теореме Рашевского—Чжоу [47, 76], для всякой пары точек в \mathcal{M} существует путь, допустимый связями и соединяющий эти точки;
- если $\dim \mathcal{L} = k$, то система связей (3.1) голономная, и согласно теореме Фробениуса связи могут быть представлены в форме $F_1(\mathbf{q}) = 0, \dots, F_k(\mathbf{q}) = 0$;
- если $k < \dim \mathcal{L} < \dim \mathcal{M}$, то система неголономная, но при этом согласно теореме Фробениуса существует $\bar{k} = \dim \mathcal{M} - \dim \mathcal{L}$ голономных связей, определяющих подмногообразие $\bar{\mathcal{M}} = \{\mathbf{q} | F_1(\mathbf{q}) = 0, \dots, F_k(\mathbf{q}) = 0\}$, при ограничении на которое получим вполне неголономную систему.

Покажем на примере шара на горизонтальной плоскости, что связи, определяемые системой уравнений (2.14), (2.15) является неголономными. Пусть b — радиус шара, тогда вектор $\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$ может быть явно представлен в форме

$$\mathbf{r} = -b\boldsymbol{\gamma}.$$

1) Используя в качестве базиса векторных полей на конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^3 \otimes SO(3)$ поля $\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\zeta}_i$ (2.11), представим базис допустимых векторных полей (3.2) в форме

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_1 &= \boldsymbol{\xi}_1 - b \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} \boldsymbol{\zeta}_1 + b \frac{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}{\gamma_3} \boldsymbol{\zeta}_2 - b \gamma_2 \boldsymbol{\zeta}_3, \\ \boldsymbol{\eta}_2 &= \boldsymbol{\xi}_2 - b \frac{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}{\gamma_3} \boldsymbol{\zeta}_1 + b \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} \boldsymbol{\zeta}_2 + b \gamma_1 \boldsymbol{\zeta}_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$



Как было сказано выше, коэффициенты перед векторными полями ξ_i, η_i — это линейно независимые решения системы уравнений (2.14), (2.15).

2) Прямым вычислением несложно показать (при помощи любой системы аналитических вычислений, например, Maple или Mathematica), что размерность линейной оболочки \mathcal{L} полей (3.3) и их коммутаторов равна

$$\dim \mathcal{L} = 5.$$

Таким образом, система связей (2.14), (2.15) неголономная и допускает единственную голономную связь, которая в данном случае

$$R_3 = b = \text{const}, \tag{3.4}$$

то есть центр шара движется в горизонтальной плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В общем случае произвольного (выпуклого) тела обобщение голономной связи (3.4) следующее:

$$R_3 + (\gamma, \mathbf{r}(\gamma)) = 0.$$

Геометрическое исследование неголономных связей для резинового шара на сфере содержится в работах [1, 68].

3.2. Однородный мраморный шар на абсолютно шероховатой плоскости

В данном случае выберем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой перпендикулярна плоскости (см. рис. 3). Обозначим шаровой центр инерции $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E}$, b — радиус шара, $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$, \mathbf{v} — радиус-вектор и скорость центра шара, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость.

Условие отсутствия проскальзывания (абсолютная шероховатость), как было показано выше, выражается в том, что скорость точки контакта равна нулю

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{r} = -b\mathbf{e}_z$ — вектор из центра шара в точку контакта (см. рис. 3).

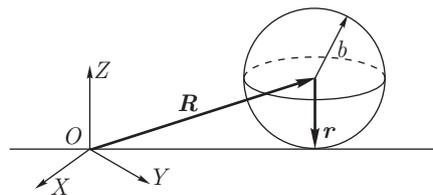


Рис. 3. Шар на плоскости

Предложение 2. Пусть силы, приложенные к шару, могут быть сведены к равнодействующей \mathbf{F} , приложенной к центру, тогда центр шара движется в горизонтальной плоскости как материальная точка массы $\tilde{m} = m + \frac{\mu}{b^2}$ по закону

$$\tilde{m}\ddot{X} = F_X, \quad \tilde{m}\ddot{Y} = F_Y.$$

Доказательство.

С учетом того, что тензор инерции шаровой, уравнения движения шара в неподвижных осях $OXYZ$ имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad \mu\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{r} \times \mathbf{N}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}, \quad (3.6)$$

где \mathbf{N} — реакция связи (3.5).

Дифференцируя связь (3.5) с учетом соотношения $\dot{\mathbf{r}} = 0$ и используя первые два уравнения (3.6) получим равенства

$$\mu\dot{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{N}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{F})).$$

Перегруппировывая слагаемые окончательно находим

$$\left(m + \frac{\mu}{b^2}\right)\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} - (\mathbf{F}, \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z.$$

■

3.3. Однородный резиновый шар на (выпуклой) поверхности

Как и выше, выберем неподвижную систему координат $OXYZ$ и запишем уравнение поверхности, проходящей через центр шара (см. рис. 4) в форме

$$f(\mathbf{R}) = 0, \quad (3.7)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор центра шара.

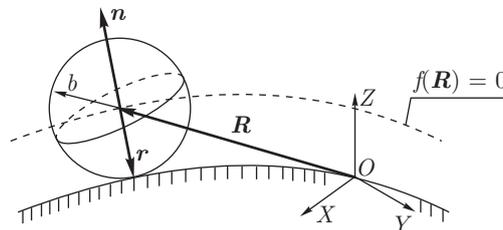


Рис. 4. Шар на произвольной поверхности

Ясно, что поверхность (3.7) эквидистантна опорной поверхности и их нормали совпадают и сонаправлены с вектором \mathbf{r} из центра шара в точку контакта

$$\mathbf{r} = -b\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla f(\mathbf{R})}{|\nabla f(\mathbf{R})|},$$

где b — радиус шара.

Связи, выражающие условия непроскальзывания и отсутствия верчения, можно представить в форме

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = 0, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$ — скорость центра шара, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость.

Предложение 3. Если силы, приложенные к шару могут быть сведены к равнодействующей \mathbf{F} , приложенной к центру, то центр шара движется как материальная точка массы $\tilde{m} = m + \frac{\mu}{b^2}$ по поверхности (3.7):

$$\tilde{m}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \lambda\mathbf{n}, \quad \lambda = -(\mathbf{F}, \mathbf{n}) - (\tilde{m}\mathbf{v}, \dot{\mathbf{n}}). \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Уравнения (3.9) — это уравнения движения материальной точки по поверхности с неопределенными множителями Лагранжа.

Доказательство.

Уравнения движения шара с учетом связей (3.8) в неподвижных осях имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad \mu\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{r} \times \mathbf{N} + N_0\mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}, \quad (3.10)$$

где \mathbf{N}, N_0 — неопределенные множители (реакции связей).

С помощью уравнений движения и связей несложно получить соотношения

$$\mathbf{N} = m\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{F}, \quad b^2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} \times \mathbf{r}, \quad (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = (\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0, \quad (\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{r}) = (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{r}}) = 0. \quad (3.11)$$

Дифференцируя первую связь (3.8) находим

$$\mu\dot{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mu\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{N}) + \mu\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega},$$

в это уравнение подставим \mathbf{N} и $\boldsymbol{\omega}$ из соотношений (3.11) и получим

$$\mu\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) - \mu(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}.$$

Учитывая последнее из соотношений (3.11) и перегруппировав слагаемые в этом уравнении получим (3.9). ■

В случае отсутствия внешних сил ($\mathbf{F} = 0$) получаем, что центр масс шара при отсутствии вращения движется по геодезической.

3.4. Шар Чаплыгина без вращения и задача Веселовой

Вследствие того, что тензор инерции в данном случае не шаровой, удобнее в этой задаче воспользоваться подвижной системой координат, связанной с главными осями. При этом в полученных выше уравнениях движения (2.18) необходимо положить

$$\mathbf{r} = -b\boldsymbol{\gamma},$$

где b — радиус шара.

Используя уравнения связи (2.14), (2.15) и второе из уравнений (2.18), устанавливаем соотношения

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma}) = (\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

и, как следствие, находим

$$\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + mb^2\mathbf{E}.$$

Окончательно уравнения движения при условии потенциальности внешних сил, с потенциалом, зависящим лишь от γ , можно представить в форме

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \lambda_0 \boldsymbol{\gamma},$$

$$\lambda_0 = - \frac{\left(\mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right)}{(\mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}.$$

Сравнивая с (2.21) заключаем, что шар Чаплыгина при отсутствии верчения эквивалентен системе Веселовой (в которой нужно поменять $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$).

3.5. Обсуждение

1. В своей неопубликованной (при жизни) работе [63] Чаплыгин пытался проинтегрировать уравнения движения динамически несимметричного шара на плоскости при условии, что помимо равенства нулю скорости точки контакта также обращается в ноль проекция угловой скорости на некоторую ось, связанную с шаром. Эта дополнительная неголономная связь аналогична связи Суслова [51]. Чаплыгин, видимо, не зная о работе Суслова, также предложил реализовывать эту систему в виде нескручиваемой нити. Эта реализация не совсем корректна, и в работе [63] Чаплыгин не получил удобной формы уравнений и каких-либо содержательных выводов (видимо, вследствие этого он и не передал ее в печать). Кстати, эта задача до сих пор не исследована. В нашей статье [7] дается новая механическая интерпретация связи Чаплыгина. Эта связь Суслова в некотором смысле взаимна связи Веселовой, которая накладывается в задаче о резиновом шаре.

На основании приведенных в этом разделе примеров можно сделать следующие выводы.

1. Неголономность системы связей — это явление чисто геометрическое (геометрия распределений в фазовом пространстве), не имеющее прямого отношения к тем системам на которые эти связи накладываются.
2. Голономность динамической системы подчиненной неголономным связям — это эффект динамический (как будет показано ниже он связан с определенными законами сохранения, присущим данной системе). Как мы видели, одна и та же неголономная связь может привести как к голономной, так и неголономной динамической системе.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Голономные динамические системы, обладающие потенциалом или обобщенным потенциалом, называются лагранжевыми; после преобразования Лежандра они приводят к гамильтоновым системам, изучение которых представляет собой наиболее обширную ветвь динамики.

2. Как мы видели выше, движение однородного шара на поверхности при условии отсутствия проскальзывания и верчения описывается голономной системой (3.9); на основании этого некоторые авторы (см. В. Ф. Журавлев [21]) делают заключение, о том что «... неголономная постановка задачи о качении твердых тел по шероховатой поверхности принципиально несостоятельна: условие отсутствия проскальзывания может быть принято только при $u \equiv 0$ (отсутствие верчения *авт.*), но в этом случае кинематическое условие оказывается интегрируемым, то есть связь является голономной».

Последний пример этого раздела наглядно показывает ошибочность этого утверждения.

4. Законы сохранения в неголономной механике

Рассмотрим подробнее законы сохранения и соответствующие (тензорные) инварианты, которые могут встречаться в неголономной механике. Представим уравнения движения в стандартной форме уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — векторное поле на фазовом пространстве, определяемое системой (2.6) или (2.9). Как правило, в рассматриваемых примерах $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ задается аналитическими функциями, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

4.1. Интегралы и поля симметрий. Закон сохранения энергии

Наиболее простыми инвариантами системы (4.1) являются первые интегралы и поля симметрий. Напомним, что функция $F(\mathbf{x})$ — первый интеграл, если

$$\dot{F} = (\nabla F, \mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0,$$

векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — поле симметрий, если

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})] = 0, \tag{4.2}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли в фазовом пространстве.

Для уравнений неголономной механики при достаточно общих допущениях выполняется закон сохранения энергии. Так, для уравнений Пуанкаре—Суслова (2.9) справедлива

Теорема 1. Пусть функция Лагранжа $\hat{L}(\mathbf{q}, \mathbf{w})$ и связи $\hat{f}_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = 0$ не зависят явно от времени, и, кроме того, связи задаются однородными функциями по переменным w_i , тогда система (2.9) допускает интеграл энергии

$$\mathcal{E} = \sum w_i \frac{\partial \hat{L}}{\partial w_i} - \hat{L}. \tag{4.3}$$

Доказательство.

Дифференцируя (4.3) по времени с учетом соотношений (2.7), (2.9) получим

$$\dot{\mathcal{E}} = \sum_{\mu, i} \lambda_\mu \frac{\partial \hat{f}_\mu}{\partial w_i} w_i.$$

Согласно тождеству Эйлера для однородных функций

$$\frac{\partial \hat{f}_\mu}{\partial w_i} w_i = \varkappa_\mu \hat{f}_\mu,$$

где \varkappa_μ — степень однородности $\hat{f}_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{w})$, получаем, что при учете связей $\dot{\mathcal{E}} = 0$. ■

Для уравнений в локальных переменных (2.6) интеграл энергии

$$\mathcal{E} = \left(\dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - L.$$

Для связей (2.2) условие однородности эквивалентно требованию

$$b_\mu(\mathbf{q}) = 0, \quad \mu = 1 \dots m.$$

Как мы видим, эти условия выполнены в рассматриваемых примерах как для резинового тела (2.14), (2.15), так и для задач Чаплыгина и Веселовой.

4.2. Инвариантная мера

Как было показано выше, с точки зрения сохранения энергии неголономные системы, как правило, являются консервативными. В то же время, традиционно консервативными называют системы, сохраняющие фазовый объем. В инвариантной форме (не зависящей от выбора координат) это свойство формулируется при помощи инвариантной меры.

Функция $\rho(\mathbf{x}) > 0$ называется *плотностью инвариантной меры* системы (4.1), если она удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\operatorname{div}(\rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0. \quad (4.4)$$

В этом случае для любой области Γ_t фазового пространства, переносимой потоком системы (4.1), ее объем, вычисленный с помощью плотности $\rho(\mathbf{x})$, сохраняется

$$\int_{\Gamma_t} \rho(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \text{const.}$$

В работах [31, 33] инвариантная мера называется *интегральным инвариантом*.

В неголономной механике известны как системы, допускающие инвариантную меру (шар Чаплыгина, тело вращения на плоскости и т.п.), так и системы, у которых она отсутствует (кельтский камень, задача Суслова) [7, 8, 15, 29, 70, 71, и т.д.].

Препятствия к существованию инвариантной меры обсуждаются в работе [31]. Эффекты, к которым приводит отсутствие инвариантной меры, рассмотрены в работе [8].

4.3. Пуассонова структура. Гамильтоновость и конформная гамильтоновость

Еще одним важным тензорным инвариантом, встречающимся в неголономных системах является пуассонова структура, которая позволяет представить систему в гамильтоновой форме.

Напомним, что наиболее общей формой гамильтоновой системы является (см. подробно [5])

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\nabla H, \quad (4.5)$$

где $H(\mathbf{x})$ — гамильтониан, а $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \|J_{ij}(\mathbf{x})\|$ — пуассонова структура (тензор Пуассона и т.п.), то есть кососимметрическое тензорное поле, удовлетворяющее тождеству Якоби

$$\frac{\partial J_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial J_{jk}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{ki}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0. \quad (4.6)$$

Пуассонова структура естественным образом позволяет определить скобку Пуассона функций f, g по формуле

$$\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} = \sum_{i,j} J_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Для гамильтоновых систем (4.5) имеется очевидный первый интеграл — гамильтониан $H(\mathbf{x})$ и заведомо существует инвариантная мера (согласно теореме Лиувилля).

Гамильтоновы системы — это наиболее изученный класс систем с точки зрения теории интегрируемости, устойчивости, топологического анализа и т.д. В связи с этим изучение возможности (или невозможности) представления уравнений неголономной механики в гамильтоновой форме является очень важным при исследовании поведения системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Согласно Ли, тензорным инвариантом системы (4.1) называется тензорное поле $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, производная Ли которого обращается в ноль

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = 0.$$

Несложно показать, что $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ для системы (4.5) является тензорным инвариантом вследствие тождества Якоби (4.6).

В этой связи отметим, что представление системы в форме (4.5) с кососимметричной матрицей $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, не удовлетворяющей тождеству Якоби, не приводит ни к каким особым динамическим эффектам, поскольку не связано ни с какими законами сохранения.

Имеется еще один класс систем, практически неотличимых от гамильтоновых — это *конформно гамильтоновы системы*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{N}(\mathbf{x})\mathbf{J}(\mathbf{x})\nabla H, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ — пуассонов тензор, а $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ — непостоянная функция. Следуя Чаплыгину, функцию $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ будем называть *приводящим множителем*.

Конформно гамильтоновы системы также сохраняют гамильтониан и допускают инвариантную меру.

Если $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ — знакоопределенная функция, то заменой времени $\mathcal{N}(\mathbf{x}) dt = d\tau$ система (4.7) приводится к гамильтоновой форме. Если $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ в некоторых точках обращается в ноль, то замена времени приводит к гамильтоновым системам с особенностями, обладающими в некоторых случаях любопытными топологическими особенностями [53].

Многие системы неголономной механики представляются в конформно гамильтоновой форме (4.7) (см. ниже).

4.4. Каноническое представление конформно-гамильтоновых систем

Остановимся подробнее на некоторых следствиях (конформной) гамильтоновости, которые нам пригодятся в дальнейшем.

В большинстве примеров, встречающихся в неголономной механике, пуассонова структура вырождена, то есть $\text{rank } \mathbf{J} < \dim \mathcal{M}$. В этом случае важное значение имеет понятие функций Казимира пуассоновой структуры, то есть функций $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$, определенных всюду на многообразии \mathcal{M} , которые коммутируют с любой функцией на \mathcal{M} :

$$\forall f(\mathbf{x}) : \{\Phi_\alpha(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})\} \equiv 0, \quad \alpha = 1 \dots m.$$

Очевидно, что

- функции Казимира являются первыми интегралами системы (4.7);
- $\nabla \Phi_\alpha(\mathbf{x})$ принадлежит ядру пуассоновой структуры $\mathbf{J}(\mathbf{x})$.

Локальное строение многообразия, снабженного пуассоновой структурой, описывается *обобщенной теоремой Дарбу* [44, 104]:

Теорема 2. *Для всякой пуассоновой структуры \mathbf{J} на \mathcal{M} , имеющей постоянный ранг в окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, существуют локальные координаты $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n, z_1, \dots, z_k$ в окрестности этой точки такие, что*

$$\begin{aligned} \{z_\alpha, q_i\} = \{z_\alpha, p_i\} = 0, \quad \alpha = 1 \dots k, \\ \{q_i, p_i\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j = 1 \dots n. \end{aligned}$$



Следовательно $z_\alpha(\mathbf{x})$ — (локально определенные) функции Казимира, а само многообразие \mathcal{M} в окрестности точки \mathbf{x}_0 расслоено на подмногообразия

$$\tilde{\mathcal{M}}_c = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} | z_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, z_k(\mathbf{x}) = c_k\},$$

которые называются симплектическими листами. Ограничение пуассоновой структуры $\mathbf{J}|_{\tilde{\mathcal{M}}_c}$ невырождено.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Очевидно, что число локальных функций Казимира $z_\alpha(\mathbf{x})$ (в окрестности точки \mathbf{x}_0) совпадает с размерностью ядра матрицы $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)$.

Возможны две ситуации, встречающиеся в приложениях, которые мы рассмотрим подробнее.

1. Число глобально определенных функций Казимира $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ совпадает с числом локально определенных функций Казимира (т. е. с $\dim(\text{Ker } \mathbf{J}) = m$). (Этот случай наиболее часто встречается в приложениях и описан в литературе [5, 44, 104, 105]). В этом случае симплектический лист $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$ является глобально определенным симплектическим многообразием:

$$\mathcal{M}_c = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} | \Phi_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, \Phi_m(\mathbf{x}) = c_m\}.$$

Причем, согласно теореме 2, ограничение системы (4.7) на \mathcal{M}_c локально может быть представлено в (конформно) канонической форме

$$\dot{\mathbf{q}} = N_c(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \frac{\partial H_c(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -N_c(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \frac{\partial H_c(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}},$$

где $N_c = N|_{\mathcal{M}_c}$, $H_c = H|_{\mathcal{M}_c}$ — ограничение приводящего множителя и функции Гамильтона на симплектический лист.

В этом случае для доказательства интегрируемости системы необходимо после замены времени применять теорему Лиувилля–Арнольда. Причем для интегрируемости необходимо существование $n = \frac{1}{2} \dim \mathcal{M}_c$ дополнительных интегралов.

2. Число глобально определенных функций Казимира $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ меньше числа локально определенных (т. е. с $\dim(\text{Ker } \mathbf{J}) > m$). Этот случай не описан подробно в литературе (даже в достаточно полном математическом обзоре [113]). Здесь мы рассмотрим пример пуассоновой структуры, определенной разрешимой пятимерной алгеброй Ли, которая встречается в неголономной системе Сулова. Эта система будет подробно рассмотрена нами в дальнейших работах. Близкое к используемому здесь гамильтоново представление получено в работе [69]. Уравнения движения представляются в этом случае в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= \{\gamma_i, H\}, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \\ H &= \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \end{aligned}$$

с вырожденной пуассоновой структурой \mathbf{J} , определенной скобкой вида

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = p_1, \quad \{\gamma_2, \gamma_3\} = dp_2, \quad \{p_1, \gamma_3\} = -\gamma_1, \quad \{p_2, \gamma_3\} = -d\gamma_2 \quad (4.8)$$

(нулевые скобки опущены).



Ранг скобки (4.8) равен двум, и хотя симплектические листы в этом случае двумерны, тем не менее в случае иррациональных d имеется лишь две глобально определенные независимые функции Казимира этой скобки

$$\Phi_1 = p_1^2 + \gamma_1^2, \quad \Phi_2 = p_2^2 + \gamma_2^2.$$

Следовательно, в этом случае симплектические листы скобки (4.8) не могут быть представлены как поверхности уровня набора аналитических функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Третья «функция Казимира» задается в комплексной форме

$$\Phi_3 = \frac{(p_1 + i\gamma_1)^d}{p_2 + i\gamma_2}.$$

5. Интегрируемость и приводимость

Традиционно под *интегрируемостью системы* понимается возможность интегрирования ее в квадратурах, т. е. представление решений с помощью «алгебраических» операций (включая обращение функций и переход от одних локальных координат к другим) и «квадратур», т. е. вычисления интегралов известных функций. В неголономной механике используется три основных механизма явного интегрирования системы (интегрирования в квадратурах и т. п.):

1. *интегрируемость по теореме Ли* (простейшие варианты которой были известны еще Эйлеру, Лагранжу и Якоби) — при этом существует набор интегралов и полей симметрий, достаточный для приведения системы к одному дифференциальному уравнению первого порядка;
2. *интегрируемость по теореме Эйлера–Якоби* основана на редукции системы к потоку на двумерном многообразии, сохраняющем инвариантную меру;
3. *представление системы в конформно гамильтоновой форме* (4.7) — после замены времени интегрируемость доказывается по теореме Лиувилля.

Рассмотрим три этих способа последовательно.

5.1. Интегрируемость с помощью полей симметрий и первых интегралов

Хорошо известно следующее утверждение, в полной мере доказанное С. Ли (современное изложение см. [28]).

Теорема 3 (Ли). Пусть система $\dot{x} = v(x)$ допускает k первых интегралов F_1, \dots, F_k и $n - k - 1$ полей симметрий, касающихся совместной поверхности уровня первых интегралов и образующих разрешимую алгебру Ли, тогда уравнения интегрируются в квадратурах.

В этом случае в самой общей ситуации на поверхности уровня можно выбрать координаты, в которых исходное векторное поле примет вид

$$\dot{y}_1 = \tilde{v}_1(y_1), \quad \dot{y}_2 = \tilde{v}_2(y_1), \quad \dot{y}_3 = \tilde{v}_3(y_1, y_2), \dots, \dot{y}_{n-k} = \tilde{v}_{n-k}(y_1, \dots, y_{n-k-1}).$$

Из этого представления очевидно, что интегрируемые по Ли системы обладают инвариантной мерой.

Для доказательства достаточно вычислить дивергенцию векторного поля в переменных $F_1, \dots, F_k, y_1, \dots, y_{n-k}$.

Существует один замечательный частный случай таких систем, для которых динамика фактически не отличается от динамики интегрируемых гамильтоновых систем. В этом случае существует выделенная координата на инвариантной поверхности, такая что все оставшиеся координаты получаются из нее простой квадратурой. В динамике твердого тела естественный пример подобных систем дает волчок Лагранжа, для которого закон движения угла прецессии $\psi(t)$ и угла собственного вращения $\varphi(t)$ получаются с помощью угла нутации $\theta(t)$ при помощи независимых квадратур [6]

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \dot{\varphi} = (I_3^{-1} - I_1^{-1})p_\varphi + \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

где p_ψ, p_φ — интегралы движения, а I_1, I_3 — моменты инерции волчка. В дальнейшем такие системы мы будем называть *интегрируемыми по Лагранжу—Ли*.

Известный пример подобных систем — задача о движении осесимметричного тела на плоскости, которую в классической неголономной модели (с верчением) проинтегрировали независимо С. А. Чаплыгин [62] и М. Гэллоп [92] (см. также [42, 70, 86, 108]). Движение осесимметричного тела на плоскости без верчения рассматривалось в разделе 6.

Приведем формальные результаты о приводимости к гамильтоновой форме без замены времени для случая, когда совместная поверхность уровня первых интегралов является тором. (Аналогичный результат имеет место для усреднения в одночастотных системах [3]).

Теорема 4 (о приводимости). Пусть интегрируемая система на M^n имеет k первых интегралов $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_k)$, причем их совместная поверхность уровня является $(n - k)$ -мерным тором. Пусть, кроме того, в окрестности некоторого тора существуют угловые переменные $(\theta_1, \dots, \theta_{n-k}) \bmod 2\pi$ такие, что векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ принимает вид

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1(\mathbf{F}), \quad \dot{\theta}_2 = \zeta_2(\theta_1, \mathbf{F}), \dots, \dot{\theta}_{n-k} = \zeta_{n-k}(\theta_1, \mathbf{F}). \quad (5.1)$$

Тогда существует дифференцируемая (аналитическая) замена переменных, приводящая систему (5.1) к виду

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1(\mathbf{F}), \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2(\mathbf{F}), \dots, \dot{\theta}_{n-k} = \omega_{n-k}(\mathbf{F}). \quad (5.2)$$

Прежде чем доказывать теорему сформулируем

Следствие 1. Если интегрируемая система допускает представление (5.1), то она гамильтонова (точнее, даже мультигамильтонова [5]).

Доказательство.

Каждую из функций $\zeta_i, i = 2, \dots, n - k$ разложим в сходящийся ряд Фурье

$$\zeta_i(\theta_1, \mathbf{F}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \zeta_i^{(m)}(\mathbf{F}) e^{im\theta_1}.$$

Соответствующая замена переменных, приводящая систему к виду (5.2) задается сходящимся рядом вида

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i - \frac{1}{\omega_1(\mathbf{F})} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{\zeta_i^{(m)}(\mathbf{F})}{im} e^{im\theta_1}.$$

При этом частоты задаются соотношением

$$\omega_i(\mathbf{F}) = \zeta_i(\mathbf{F}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta_i(\theta_1, \mathbf{F}) d\theta_1, \quad i = 2, \dots, n - k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Для более общего случая, когда векторное поле на торах имеет вид

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1, \quad \dot{\theta}_2 = \zeta_2(\theta_1), \quad \dot{\theta}_3 = \zeta_3(\theta_1, \theta_2), \dots, \dot{\theta}_{n-k} = \zeta_{n-k}(\theta_1, \dots, \theta_{n-k-1});$$

такое приведение может оказаться невозможным, если $n - k > 2$, хотя само решение дается последовательными квадратурами. Тем не менее, система может оказаться негамильтоновой.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Хотя теорема о приводимости гарантирует возможность приведения системы к гамильтоновой форме в окрестности тора, во всем фазовом пространстве глобальное приведение к гамильтонову виду отсутствует. В некоторых случаях имеются топологические препятствия [52, 66].

5.2. Интегрируемость по Эйлеру–Якоби

Еще один способ проинтегрировать систему в квадратурах дается следующей теоремой.

Теорема 5 (Эйлер–Якоби). Пусть система уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ обладает инвариантной мерой и имеет $n - 2$ первых интеграла $\mathbf{F} = F_1, \dots, F_{n-2}$ и, кроме того, на инвариантном множестве $M_c = \{\mathbf{x} \in M, F_i(\mathbf{x}) = c_i = \text{const}\}$ функции $F_i, i = 1, \dots, n - 2$ независимы. Тогда

1. решения системы, лежащие на M_c , находятся квадратурами;
если \mathcal{L}_c — связная компактная компонента множества уровня M_c и $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq 0$ всюду на \mathcal{L}_c , то
2. \mathcal{L}_c — гладкое многообразие диффеоморфное двумерному тору;
3. В некоторой окрестности \mathcal{L}_c можно подобрать угловые координаты $(\theta_1, \theta_2) \bmod 2\pi$, такие что уравнения движения в них принимают вид

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\lambda_1(\mathbf{F})}{\Phi(\theta_1, \theta_2, \mathbf{F})}, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\lambda_2(\mathbf{F})}{\Phi(\theta_1, \theta_2, \mathbf{F})}. \quad (5.3)$$

Данная формулировка является обобщением формулировки, приведенной в работе [29].

Нетривиальной частью этой теоремы является возможность приведения системы к виду (5.3) в окрестности инвариантного тора. Доказательство этого результата основано на известной теореме Колмогорова о приводимости потока на торе сохраняющего меру к стандартной форме

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\lambda_1}{\Phi(\theta_1, \theta_2)}, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\lambda_2}{\Phi(\theta_1, \theta_2)}, \quad \lambda_{1,2} = \text{const}.$$

Доказательство этого результата содержится, например, в книге [49] (лекция 11); некоторые вспомогательные утверждения необходимые для этого доказательства (существование кривой Зигеля) можно найти в книге [34]. Это доказательство, как несложно показать, легко обобщается на случай когда поток на торе зависит от параметров (с соответствующей степенью гладкости согласованной со всеми выполняемыми при доказательстве преобразованиями). Таким образом, если в качестве параметров взять значения первых интегралов, то получим уравнения в форме (5.3).

На основании теоремы 5 заключаем, что

Следствие 2. *Интегрируемые по Эйлеру–Якоби системы конформно гамильтоновы, по крайней мере локально в окрестности инвариантного тора.*

В то же время, в отличие от предыдущего случая (интегрируемые по Лагранжу–Ли системы), *интегрируемая по Эйлеру–Якоби система не может быть в общем случае представлена в гамильтоновой форме без замены времени.*

Действительно, рассмотрим инвариантный тор, для которого в уравнениях (5.3) число вращения $\frac{\lambda_1(\mathbf{F})}{\lambda_2(\mathbf{F})}$ — рациональное, такой тор называется резонансным, он расслаивается на периодические обмотки. Причем в общем случае вследствие того, что $\Phi(\theta_1, \theta_2, \mathbf{F})$ зависит от θ_i периоды движения по этим периодическим обмоткам не совпадают [9]. Это приводит к тому, что на резонансных торах в неголономных системах имеется перемешивание [27], что и препятствует гамильтоновости.

Для гамильтоновых систем справедливо простое следствие теоремы Лиувилля.

Предложение 4. *Для интегрируемой гамильтоновой системы, обладающей двумерными инвариантными торами, для всех резонансных торов периоды движения по любой обмотке одного и того же тора совпадают.*

Доказательство вытекает из существования переменных действие–углы в окрестности неособых торов интегрируемой системы [3, 4].

5.3. Обобщенные системы Чаплыгина

Рассмотрим теперь класс систем, часто встречающийся в реальных примерах, которые при условии существования инвариантной меры оказываются конформно гамильтоновы. При этом преобразование к конформно гамильтоновой форме (4.7) может быть построено явно.

Пусть задана механическая система с двумя степенями свободы, уравнения движения которой можно записать в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \dot{q}_2 S, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\dot{q}_1 S, \\ S &= a_1(\mathbf{q})\dot{q}_1 + a_2(\mathbf{q})\dot{q}_2 + b(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где L — функция обобщенных координат $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ и скоростей $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)$, которую также будем называть лагранжианом системы.

При специальном выборе функции S получается обычная система Чаплыгина (при этом заведомо $b(\mathbf{q}) = 0$) [61]. Мы будем называть (5.4) *обобщенной системой Чаплыгина* (не следует путать с [74, 100], где предложено несколько другое обобщение систем Чаплыгина!).

Как показал С. А. Чаплыгин в [61], к виду (5.4) при $b(\mathbf{q}) = 0$ приводятся уравнения так называемых саней Чаплыгина, которые могут быть проинтегрированы при помощи излагаемого ниже метода приводящего множителя и решения уравнения Гамильтона–Якоби. В работе [88] показано, что задача Веселовой (см. например [15, 16]) также является системой Чаплыгина. Напомним, что в задаче Веселовой твердое тело вращается вокруг неподвижной точки, подчиняясь неинтегрируемой связи, заключающейся в том, что проекция угловой скорости на неподвижную в пространстве ось равна нулю. Как будет показано далее, к виду (5.4), но уже при $b(\mathbf{q}) \neq 0$, может быть сведена задача о качении динамически несимметричного уравновешенного шара Чаплыгина [60]. Некоторые многомерные обобщения системы Чаплыгина содержатся в [40].

Как показал Чаплыгин, в случае $b(\mathbf{q}) = 0$ [61] уравнения сохраняют свою форму при заменах времени

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) dt = d\tau,$$

если \mathcal{N} не зависит от скоростей. Покажем, что это справедливо и для уравнений (5.4).

Обозначим дифференцирование по новому времени $q'_i = \frac{dq_i}{d\tau}$, находим

$$\dot{q}_i = \mathcal{N}q'_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} - \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_i} \sum_{k=1}^2 q'_k \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_k},$$

где $\bar{L}(q, q') = L(q, \mathcal{N}q')$.

Подставляя в (5.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_1} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_1} &= q'_2 \bar{S}, & \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_2} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_2} &= -q'_1 \bar{S}, \\ \bar{S} &= \mathcal{N}S + \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_2} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_1} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_2} \right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Для обычной системы Чаплыгина известно [61], что если имеется инвариантная мера с плотностью, зависящей только от координат, можно подобрать $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ так, что $\bar{S} = 0$, и следовательно система в новом времени τ может быть записана в канонической гамильтоновой форме. Укажем обобщение этого результата на случай обобщенных систем Чаплыгина вида (5.4) в предположении, что лагранжиан — квадратичная функция по скоростям \dot{q}_i (не обязательно однородная).

Теорема 6. Пусть $\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \neq 0$ и система (5.4) допускает инвариантную меру, плотность которой зависит лишь от координат, тогда существует замена времени $\mathcal{N}(\mathbf{q}) dt = d\tau$ такая, что

1. функция \bar{S} , определяемая (5.5), зависит лишь от координат: $\bar{S} = \bar{S}(\mathbf{q})$,
2. в новом времени уравнения движения записываются в гамильтоновой форме

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \{q_i, \bar{H}\}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = \{p_i, \bar{H}\},$$

где

$$p_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_i}, \quad \bar{H} = \sum_{k=1}^2 p_k q'_k - \bar{L} \Big|_{q'_i \rightarrow p_i},$$

а скобка Пуассона определена соотношениями

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_1, p_2\} = \bar{S}(\mathbf{q}), \quad \{q_1, q_2\} = 0. \tag{5.6}$$

Доказательство.

Выполним преобразование Лежандра для исходной системы (5.4):

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i P_i \dot{q}_i - L \Big|_{\dot{q}_i \rightarrow P_i},$$



при этом

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i}, & \dot{P}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_2} S, & \dot{P}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_1} S, \\ S &= a_1(\mathbf{q})\dot{q}_1 + a_2(\mathbf{q})\dot{q}_2 + b(\mathbf{q}) = A_1(\mathbf{q})P_1 + A_2(\mathbf{q})P_2 + B(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

С помощью уравнения Лиувилля для плотности инвариантной меры $\rho(\mathbf{q}) dP_1 dP_2 dq_1 dq_2$ уравнений (5.7) находим

$$\dot{q}_1 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_1} - A_2(q) \right) + \dot{q}_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_2} + A_1(q) \right) = 0,$$

и поскольку ρ зависит лишь от координат, каждая из скобок должна обращаться в ноль по отдельности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_1} - A_2(\mathbf{q}) = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_2} + A_1(\mathbf{q}) = 0.$$

Запишем теперь уравнение (5.5) для \bar{S} с учетом $\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_i} = P_i$:

$$\bar{S} = \left(\mathcal{N} A_1(q) + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_2} \right) P_1 + \left(\mathcal{N} A_2(q) - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_1} \right) P_2 + \mathcal{N} B(q).$$

Таким образом, если выберем $\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \rho(\mathbf{q})$, то $\bar{S} = B(\mathbf{q})$ и тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Второе утверждение доказывается непосредственной проверкой уравнений и тождества Якоби. ■

Следовательно в первоначальном времени обобщенные системы Чаплыгина с мерой являются конформно гамильтоновыми.

Гамильтоновы системы со скобкой (5.6) встречаются при описании обобщенно потенциальных систем (например, движение заряженных частиц в магнитном поле) или систем с гироскопическими силами [3, 5, 28, 44]. В последнем случае замкнутая 2-форма $\Omega = \bar{S}(\mathbf{q}) dq_1 \wedge dq_2$ называется 2-формой гироскопических сил. Локально ее можно представить в виде полного дифференциала $\Omega = d\omega$, $\omega = W_1(\mathbf{q})dq_1 + W_2(\mathbf{q})dq_2$, при этом уравнения движения (5.5) можно записать в виде уравнений Лагранжа—Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L_W}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial L_W}{\partial q_i} &= 0, \\ L_W &= \bar{L} + W(\mathbf{q}, \mathbf{q}'), \quad W(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = W_1(\mathbf{q})q'_1 + W_2(\mathbf{q})q'_2, \end{aligned}$$

а скобка Пуассона с помощью новых импульсов $\tilde{p}_i = p_i + W_i(\mathbf{q})$ приводится к канонической форме.

Если многообразие \mathcal{M} , на котором определены координаты q_1, q_2 , компактно, то критерий точности формы Ω имеет вид

$$\int_{\mathcal{M}} \Omega = 0.$$

Таким образом, если $\int \Omega \neq 0$, то есть 2-форма не точна, то обобщенный потенциал W и соответствующие лагранжиан и гамильтониан содержат особенности (так называемый монополю) [3, 44]. В этом случае иногда также говорят о невозможности глобального представления уравнений движения в канонической гамильтоновой форме.

Обобщение метода Гамильтона—Якоби для неголономных систем приведено в работе [109].

6. Тяжелое резиновое тело вращения на плоскости

Как было показано выше в этом случае эволюция переменных ω, γ описывается системой (2.18). При этом уравнение, описывающее поверхность тела вращения, представляется в форме $f(r_1^2 + r_2^2, r_3) = 0$, а два главных момента инерции совпадают $I_1 = I_2$. Воспользуемся следующей параметризацией вектора $\mathbf{r}(\gamma)$:

$$\mathbf{r} = (\chi_1(\gamma_3)\gamma_1, \chi_1(\gamma_3)\gamma_2, \chi_2(\gamma_3)).$$

Функции χ_1, χ_2 определяются конкретным видом поверхности тела, но не являются независимыми, поскольку они связаны очевидным соотношением $f(\chi_1^2(1 - \gamma_3^2), \chi_2) = 0$.

Потенциальная энергия тела (2.16) записывается в виде

$$U(\gamma_3) = -mg(\chi_1(1 - \gamma_3^2) + \chi_2\gamma_3).$$

Помимо геометрического интеграла и связи

$$\gamma^2 = 1, \quad (\omega, \gamma) = 0,$$

система вследствие теоремы 1 обладает интегралом энергии

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\omega, \mathbf{I}\omega) + U(\gamma_3).$$

Кроме того, очевидно, что система (2.18) в данном случае обладает полем симметрий, соответствующем вращению вокруг оси симметрии

$$\mathbf{u}(\gamma, \omega) = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1}.$$

Помимо этих достаточно очевидных законов сохранения система допускает еще один дополнительный интеграл

$$K = A(\gamma_3)\omega_3, \quad A(\gamma_3) = \sqrt{I_1\gamma_3^2 + I_3(1 - \gamma_3^2) + m(\mathbf{r}, \gamma)^2}. \quad (6.1)$$

Существование подобного интеграла линейного по ω , как объясняется в работе [70] (см. раздел 2 этой работы), довольно закономерно, но то, что интеграл выражается с помощью элементарных функций по ω, γ для произвольной поверхности тела — является нетривиальным фактом. Так, например, в динамике тела вращения на плоскости при наличии верчения интеграл выражается в элементарных функциях лишь в случае шаровой поверхности тела.

Согласно теореме Ли (см. раздел 5), найденных интегралов и полей симметрий достаточно, чтобы свести систему к квадратурам. Параметризуем вектор γ углом нутации θ и собственного вращения φ :

$$\gamma = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta),$$

тогда на поверхности $\mathcal{M}_{h,k} = \{\omega, \gamma | \gamma^2 = 1, (\omega, \gamma) = 0, \mathcal{E} = h, K = k\}$ получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B(\gamma_3)\dot{\theta}^2 + \frac{k^2}{2\sin^2 \theta} + U(\gamma_3) = h, \quad \omega_3 = \frac{k}{A(\gamma_3)}, \\ \dot{\varphi} = \frac{\omega_3}{\sin^2 \theta}, \quad \omega_1 = \dot{\theta} \cos \varphi - \omega_3 \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi, \quad \omega_2 = -\dot{\theta} \sin \varphi - \omega_3 \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $B(\gamma_3) = I_1 + m(\mathbf{r}, \mathbf{r})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Здесь мы воспользовались известным соотношением для угла собственного вращения твердого тела [6]:

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - \frac{\gamma_3(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}.$$

Как уже отмечалось выше, интегрируемые по Ли системы обладают инвариантной мерой, в данном случае плотность инвариантной меры $\rho d^3\omega d^3\gamma$ также выражается в элементарных функциях

$$\rho(\gamma_3) = B(\gamma_3)A(\gamma_3).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Множители, образующие плотность инвариантной меры, возникают в разложении функции

$$\det \tilde{\mathbf{I}}(\gamma, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\gamma) = B(\gamma_3)A^2(\gamma_3).$$

Покажем теперь, что

Предложение 5. Система, описывающая движение тяжелого резинового тела вращения при $k \neq 0$, представляется в гамильтоновой форме (без замены времени).

Доказательство.

Для этого согласно теореме 4 (о приводимости) необходимо показать, что поверхность уровня интегралов является двумерным тором (или несвязным объединением двух торов). В данном случае достаточно показать, что векторное поле на этой поверхности не обращается в ноль и не имеет особых точек. Согласно первому уравнению в (6.2) всюду $\dot{\varphi} > 0$. ■

Укажем квадратуру для угла нутации θ в случае простейших тел:

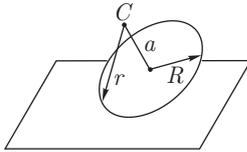


Рис. 5. Диск на плоскости

- диск со смещенным центром масс (см. рис. 5):

$$\chi_1 = -\frac{R}{\sin \theta}, \quad \chi_2 = -a$$

$$\frac{1}{2}(I_1 + m(R^2 + a^2))\dot{\theta}^2 = h - mg(R \sin \theta + a \cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{\sin^2 \theta};$$

- шар со смещенным центром:

$$\chi_1 = -R, \quad \chi_2 = -R \cos \theta - a$$

$$\frac{1}{2}(I_1 + m(R^2 + a^2) + 2mRa \cos \theta)\dot{\theta}^2 = h - mg(R + a \cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{\sin^2 \theta}.$$

7. Система Веселовой

7.1. Уравнения движения и законы сохранения

Как было сказано выше (раздел 2), задача Веселовой описывает движение твердого тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи вида $(\omega, \gamma) = 0$, где ω и γ — соответственно векторы угловой скорости тела и орта неподвижной в пространстве оси в системе координат, жестко связанной с твердым телом. Таким образом, для связи Веселовой проекция угловой скорости на неподвижную в пространстве ось равна нулю. Эта связь взаимна связи Суслова [51], для которой равна нулю проекция угловой скорости на ось, неподвижную в теле.

В подвижных осях, связанных с телом, уравнения движения могут быть записаны в форме [16]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda_0\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \lambda_0 &= \frac{\left(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma} \right)}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции, $U(\boldsymbol{\gamma})$ — потенциальная энергия.

В общем случае уравнения (7.1) допускают интеграл энергии и геометрический интеграл

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (7.2)$$

а также инвариантную меру $\rho_{\boldsymbol{\omega}} d^3\boldsymbol{\omega} d^3\boldsymbol{\gamma}$ с плотностью

$$\rho_{\boldsymbol{\omega}} = \sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \quad (7.3)$$

При $U = 0$, имеется дополнительный интеграл [16]

$$F = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})^2 = |\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}|^2, \quad (7.4)$$

и следовательно система интегрируема по теореме 5 (Эйлера—Якоби).

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Интеграл (7.4) обобщается при добавлении потенциала Бруна $U = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})$ [15, 16] и некоторых других потенциалах [78, 88].

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Система (7.1), была переоткрыта в работе [59] почти десять лет спустя после работ [15, 16]. В [58], выполнено явное интегрирование с использованием сфероконических координат.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Описанная система Веселовой и рассматриваемые ниже неголомомные системы, связанные с качением тел, принадлежат к классу так называемых LR - и $L + R$ -систем на группах Ли [15, 88]. Существует несколько результатов относительно существования инвариантной меры для таких систем. Мы не останавливаемся здесь на этих общих результатах, особенно полезных для многомерных обобщений. Отметим также, что общие вопросы редукции неголомомных систем рассматриваются во многих работах, ссылки на которые можно найти, например, в [67].

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Обобщение связи Веселовой $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = d \neq 0$ рассмотрено [55]. Оно сведено к квадратурам с использованием метода Чаплыгина интегрирования уравнений движения динамически несимметричного шара при ненулевой постоянной площадей [60].

7.2. Конформно-гамильтоново представление

В работе [88] показано, что система Веселовой является системой Чаплыгина (5.4) при $b(q) = 0$ и следовательно может быть записана в гамильтоновой форме после замены времени $\mathcal{N} dt = d\tau$, где приводящий множитель $\mathcal{N} = \rho_{\boldsymbol{\omega}}^{-1}$. Покажем этот факт явно с помощью локальных координат — углов Эйлера θ, φ, ψ а затем воспользуемся найденной канонической пуассоновой структурой кокасательного расслоения сферы T^*S^2 для построения скобки Пуассона в избыточных переменных $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$. С помощью такой алгебраизации пуассоновой структуры можно наиболее естественным образом установить изоморфизм с системой Неймана, то есть с движением точки по сфере в квадратичном потенциале. Этот изоморфизм первоначально был установлен прямыми вычислениями в [15, 16]. Как мы увидим далее, эта аналогия может быть непосредственно перенесена на шар Чаплыгина и общую систему Клебша, частным случаем которой является система Неймана.

Через углы Эйлера, угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ и орт $\boldsymbol{\gamma}$ выражаются по формулам

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta). \quad (7.5)$$

Уравнение связи имеет вид

$$f = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \dot{\psi} + \cos \theta \dot{\varphi} = 0, \quad (7.6)$$

Исключим из уравнений движения для углов θ, φ неопределенный множитель Лагранжа и представим их в форме системы Чаплыгина:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} &= \dot{\varphi} S, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -\dot{\theta} S, \\ S = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}} \Big|_{\dot{\psi} = -\cos \theta \dot{\varphi}} &= \sin^2 \theta \left(\dot{\theta} (I_2 - I_1) \sin \varphi \cos \varphi - \dot{\varphi} (I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi + I_3) \right), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где U потенциальная энергия тела во внешнем поле, $T_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$ кинетическая энергия без учета связи, а T кинетическая энергия после исключения $\dot{\psi}$ с помощью связи

$$\begin{aligned} T = T_0 \Big|_{\dot{\psi} = -\cos \theta \dot{\varphi}} &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta \cos \theta)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}^2 \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (7.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Получение представления (7.7) основано на простом применении обычного дифференцирования с учетом связи (7.6):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\theta}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}} - \cos \theta \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T_0}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \sin \theta \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T_0}{\partial \varphi}.$$

Теорема 7 ([88]). После замены времени $\mathcal{N} dt = d\tau$, $\mathcal{N} = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})^{-1/2}$, уравнения движения системы Веселовой представляются в виде уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (7.9)$$

где $L = T - U \Big|_{\dot{\theta} = \mathcal{N}\dot{\theta}', \dot{\varphi} = \mathcal{N}\dot{\varphi}'}$ функция Лагранжа, представляемая с учетом связи и замены времени в форме:

$$L = \frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}))}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})} - U(\boldsymbol{\gamma}).$$

Доказательство.

Доказательство основывается на простой проверке того, что после замены времени правая часть \bar{S} уравнений (7.9), вычисляемая по формуле (5.5), обращается в ноль. ■

Каноническая гамильтонова форма уравнений движения (7.9) может быть получена с помощью преобразования Лежандра

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}'}, & p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}'}, & H &= p_\theta \dot{\theta}' + p_\varphi \dot{\varphi}' - L, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, & \frac{dp_\theta}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}, & \frac{dp_\varphi}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

7.3. Алгебраическое представление и изоморфизм с системой Неймана

Используя канонические переменные (7.10) после замены времени $(\rho_\omega \sqrt{\det \mathbf{I}})^{-1} dt = d\tau$, можно представить уравнения движения задачи Веселовой в гамильтоновой форме на (ко)алгебре скобок Пуассона $e(3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \rho_\omega \mathbf{I}^{1/2} \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \rho_\omega^{-1} \mathbf{I}^{-1/2} \boldsymbol{\gamma}, \\ \frac{d\mathbf{M}}{d\tau} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\Gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\Gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \tilde{U}(\boldsymbol{\Gamma}), \quad (7.12)$$

где $\tilde{U}(\boldsymbol{\Gamma}) = U(\rho_\omega \mathbf{I}^{1/2} \boldsymbol{\Gamma})$, и соответственно

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \Gamma^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\Gamma}) = 0, \quad \rho_\omega = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{1/2} = (\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}, \\ \{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \Gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \Gamma_k, \quad \{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, гамильтонова система со скобками Пуассона на алгебре $e(3)$ и четырехмерный симплектический лист, на котором происходит реальное движение, задаваемое условием $\gamma^2 = 1$, $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Gamma}) = 0$ (что в классических уравнениях Эйлера–Пуассона соответствует нулевой постоянной площадей [6]). Отметим также, что система (7.11), (7.12) задает некоторую интегрируемую потенциальную систему на двумерной сфере и тем самым определяет некоторый геодезический поток.

Обратная замена имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^{1/2} \mathbf{I}^{-1/2} \mathbf{M}, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2} \mathbf{I}^{1/2} \boldsymbol{\Gamma}.$$

Таким образом, поиск интегрируемых потенциалов в задаче Веселовой теперь сводится к хорошо изученной задаче поиска интегрируемых случаев для гамильтоновой системы на $e(3)$ с гамильтонианом (7.12). Так, если $U = 0$, то дополнительный интеграл (7.4) запишется в форме

$$F = (\mathbf{I}\mathbf{M}, \mathbf{M})(\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}) - (\mathbf{I}\mathbf{M}, \boldsymbol{\Gamma})^2.$$

(Заметим, что $\{H, F\} = 0$ только на нулевой константе $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Gamma}) = 0$.)

Как отмечено в [15, 16] при $U = 0$ система (7.1) эквивалентна задаче Неймана. Как мы видим здесь такое представление не связано непосредственно с естественным приведением задачи Веселовой к гамильтоновой форме (7.11), (7.12) на $e(3)$. Оказывается изоморфизм с системой Неймана обусловлен существованием преобразования, не сохраняющего скобки Пуассона, но приводящего векторное поле к требуемому виду на поверхности уровня $H = \text{const}$.

Действительно, рассмотрим гамильтонову систему на $e(3)$ (при условии $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Gamma}) = 0$) определяемую гамильтонианом

$$H = \alpha \frac{1}{2} \mathbf{M}^2(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma}) + \beta \frac{1}{2} ((\mathbf{M}, \mathbf{I}\mathbf{M})(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma}) - (\mathbf{M}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^2). \quad (7.13)$$

Ясно, что оба слагаемых являются первыми интегралами системы. Справедливо следующее:

Предложение 6. *На фиксированном уровне интеграла $\frac{\mathbf{M}^2(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})}{\det \mathbf{I}} = c$ и $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Gamma}) = 0$, векторное поле, порождаемое гамильтонианом (7.13) изоморфно векторному полю случая Клебша уравнений Кирхгофа на нулевой постоянной площадей $(\mathbf{L}, \mathbf{s}) = 0$, которое*



можно представить в форме

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= k(\alpha \mathbf{s} \times \mathbf{L} + \beta \mathbf{s} \times \mathbf{IL}), \\ \dot{\mathbf{L}} &= k(\alpha c \mathbf{s} \times \mathbf{Is} + \beta(\mathbf{L} \times \mathbf{IL} - c(\det \mathbf{I}) \mathbf{s} \times \mathbf{I}^{-1} \mathbf{s})), \quad k = -\sqrt{\det \mathbf{I}}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Доказательство.

Выполним замену переменных

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}^{-1/2} \mathbf{M}, \quad \mathbf{s} = (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{I\Gamma})^{-1/2} \mathbf{I}^{1/2} \mathbf{\Gamma},$$

сохраняющую соотношения $\mathbf{s}^2 = \mathbf{\Gamma}^2 = 1$, $(\mathbf{M}, \mathbf{\Gamma}) = (\mathbf{s}, \mathbf{L}) = 0$. Вследствие линейности рассмотрим по отдельности случаи $\alpha = 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$. Для первого случая, записывая уравнения движения в новых переменных, находим

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= -\sqrt{\det \mathbf{I}} \left(\mathbf{s} \times \mathbf{L} + (\mathbf{s}, \mathbf{L}) \frac{(\mathbf{s} \times \mathbf{I}^{-1} \mathbf{s})}{(\mathbf{s}, \mathbf{I}^{-1} \mathbf{s})} \right), \\ \dot{\mathbf{L}} &= -\sqrt{\det \mathbf{I}} \frac{(\mathbf{IL}, \mathbf{L})}{\det \mathbf{I}(\mathbf{s}, \mathbf{I}^{-1} \mathbf{s})} \mathbf{s} \times \mathbf{Is}.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом отношений $(\mathbf{s}, \mathbf{L}) = 0$, $\frac{(\mathbf{IL}, \mathbf{L})}{(\mathbf{s}, \mathbf{I}^{-1} \mathbf{s})} = \mathbf{M}^2(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{I\Gamma}) = c \det \mathbf{I}$, приходим к требуемому результату.

Аналогично рассматривается случай $\alpha = 0, \beta = 1$. ■

Если считать c постоянным параметром, то векторное поле (7.14) порождается на $e(3)$ гамильтонианом вида

$$H = k\alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}^2 + \frac{c}{2} (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{I\Gamma}) \right) + k\beta \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M}, \mathbf{I\Gamma}) - \frac{c}{2} \det \mathbf{I} (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{I\Gamma}) \right).$$

При $\alpha = 1, \beta = 0$, это гамильтониан случая Неймана, а при $\alpha = 0, \beta = 1$ — задачи Бруна. При произвольных α, β , этот гамильтониан соответствует общему случаю Клебша в уравнениях Кирхгофа [3, 6]. Используя представление (7.11), (7.12), для системы Веселовой легко получаем:

Теорема 8 ([15, 16]). *Векторное поле задачи Веселовой (при $U = 0$) на фиксированном уровне интеграла энергии $H = h = \text{const}$ после замены времени изоморфно векторному полю задачи Неймана.*

8. Шар Чаплыгина

8.1. Уравнения движения и законы сохранения

Уравнения движения этой системы были получены выше (2.20), здесь мы их представим в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (8.1)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega}, \quad D = mR^2,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ угловая скорость шара, $\boldsymbol{\gamma}$ орт вертикали в подвижных осях, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ тензор инерции шара относительно его центра, m и R масса и радиус шара, и $U = U(\boldsymbol{\gamma})$ потенциал



внешнего осесимметричного поля. Вектор \mathbf{M} имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта, а тензор \mathbf{I}_Q представляется в виде

$$\mathbf{I}_Q = \mathbf{J} - D\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}.$$

Уравнения (7.1) (при произвольном потенциале) обладают интегралом энергии, геометрическим интегралом и интегралом площадей:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c = \text{const.} \quad (8.2)$$

а также допускают инвариантную меру, указанную Чаплыгиным [60], $\rho_\mu d^3\mathbf{M} d^3\boldsymbol{\gamma}$, с плотностью

$$\rho_\mu = (\det \mathbf{I}_Q)^{-1/2} = [\det \mathbf{J} (1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}))]^{-1/2}. \quad (8.3)$$

В случае отсутствия внешнего поля ($U = 0$), система (7.1) обладает дополнительным интегралом

$$F = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad (8.4)$$

и следовательно является интегрируемой по теореме Эйлера–Якоби [60]. В работе [60], система (8.1) проинтегрирована в гиперэллиптических функциях.

Качественный анализ поведения шара Чаплыгина выполнен в работе [99] (устойчивость частных решений исследовалась также в [111]).

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Интеграл (8.4) допускает обобщение на случай поля Бруна $U(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{k}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})$ [29] и гиростата [37]. Другие интегрируемые потенциалы (при нулевой постоянной площадей $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$) можно отыскать с помощью указанного ниже представления системы на алгебре $e(3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Отметим, что развивая общий метод приводящего множителя [61], сам Чаплыгин не стал использовать его для решения задачи о качении шара (8.1). В работе [29] были высказаны соображения о возможных препятствиях использования в этом случае метода приводящего множителя. С другой стороны, по существу еще в [60] ставится вопрос: возможно ли записать систему (8.1) в гамильтоновой форме? Более строгая формулировка вопроса о гамильтоновости (или о гамильтонизации) шара Чаплыгина была дана Козловым [28] и Дюистермаатом [79]. В [9], авторами численно показано, что без замены времени уравнения качения шара Чаплыгина не являются гамильтоновыми — этому препятствует различие в периодах обращения на двумерных инвариантных резонансных торах. Однако, после соответствующей замены времени система (8.1) становится гамильтоновой и скобки Пуассона находятся в явном виде [11] (см. ниже).

К сожалению, авторы обзора [81] не смогли явно верифицировать наш результат. Он был подтвержден в [93]. Здесь мы снова повторим результат [11] а также, используя его, укажем интересный *изоморфизм шара Чаплыгина со случаем Клебша* в уравнениях Кирхгофа. Другой изоморфизм был найден в [102].

8.2. Конформно-гамильтоново представление

Полная система, описывающая эволюцию вращения шара, получается добавлением к системе (8.1) уравнений для направляющих косинусов:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Она допускает два дополнительных линейных по скоростям интеграла

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) = \text{const}, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta}) = \text{const}.$$

При таком расширении совместные интегральные многообразия остаются двумерными. В этом смысле задача Чаплыгина при $U = 0$ является вырожденной, или, как иногда говорят, суперинтегрируемой. С этой точки зрения шар Чаплыгина представляет собой неголономный аналог волчка Эйлера—Пуансо, интегрируемость которого является некоммутативной и фазовое пространство трехстепенной гамильтоновой системы расслаивается на двумерные (а не на трехмерные, как следует из теоремы Лиувилля) торы.

В работе [11] показано, что при произвольном потенциале после замены времени и переменных

$$\rho_\mu dt = d\tau, \quad \mathbf{L} = \rho_\mu \mathbf{M}, \quad (8.5)$$

уравнения движения (7.1) записываются в гамильтоновой форме:

$$\frac{dM_k}{d\tau} = \{H, M_k\}, \quad \frac{d\gamma_k}{d\tau} = \{H, \gamma_k\}$$

с нелинейной скобкой Пуассона

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} (L_k - D(\mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma}) \rho_\mu^2 J_i J_j \gamma_k), \quad \{L_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (8.6)$$

где гамильтонианом является энергия (8.2), которая может быть записана в форме:

$$H = \frac{\det \mathbf{J}}{2} \left((1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma})) (\mathbf{L}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{L}) + D(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma})^2 \right) + U(\boldsymbol{\gamma}). \quad (8.7)$$

8.3. Шар Чаплыгина как обобщенная система Чаплыгина

Покажем теперь, что система (8.1), описывающая качение шара Чаплыгина, является обобщенной системой Чаплыгина (5.4), и скобка (8.6) может быть получена с помощью метода приводящего множителя (см. теорему 6).

Как и в задаче Веселовой воспользуемся локальными координатами: углами Эйлера θ, φ, ψ и декартовыми координатами центра цилиндра x, y . В подвижной системе координат, связанной с главными осями шара, вектор угловой скорости и нормаль к плоскости имеют вид (7.5).

Уравнения связей, выражающие условия отсутствия проскальзывания точки контакта, можно представить в форме

$$f_x = \dot{x} - R\dot{\theta} \sin \psi + R\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi = 0, \quad f_y = \dot{y} + R\dot{\theta} \cos \psi + R\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi = 0. \quad (8.8)$$

Уравнения движения с неопределенными множителями Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{x}} \right) &= \lambda_x, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{y}} \right) &= \lambda_y, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial \theta} &= \lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot{\theta}} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot{\theta}}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial \varphi} &= \lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot{\varphi}}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где T_0 кинетическая энергия шара без учета связей (8.8) (которая очевидно не зависит от x, y , и ψ):

$$T_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}).$$

Исключая неопределенные множители λ_x и λ_y с помощью первых двух уравнений в (8.9) и связей (8.8), находим

$$\begin{aligned} \lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot{\theta}} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot{\theta}} &= -mR^2(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \theta), \\ \lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot{\varphi}} &= -mR^2(\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi}) \sin \theta. \end{aligned}$$

Следовательно уравнения движения для углов θ и φ не зависят от ψ , а зависят только от $\dot{\psi}$. Таким образом мы видим, что ψ — циклическая переменная и может быть исключена при помощи редукции Рауса, после чего уравнения движения для θ и φ могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} &= -\dot{\varphi} S, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} &= \dot{\theta} S, \\ S &= mR^2 \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Здесь \mathcal{R} — функция Рауса:

$$\mathcal{R}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T_0 - \dot{\psi} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}},$$

в которую \dot{x} и \dot{y} необходимо подставить из уравнений связей, а $\dot{\psi}$ исключается с помощью уравнения для циклического интеграла

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}} &= (I_1 - I_2)\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + I_3\dot{\varphi} \cos \theta + \\ &+ ((I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\psi} = c = \text{const}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Таким образом, мы представили уравнения движения в форме обобщенной системы Чаплыгина (5.4), и поскольку система обладает мерой, можем представить уравнения (8.10) в гамильтоновой форме со скобкой (5.6).

Выполним замену времени вида

$$N(\theta, \varphi) dt = d\tau, \tag{8.12}$$

где $\mathcal{N} = \rho_\mu$ — плотность инвариантной меры (8.3).

Согласно (5.5), в новом времени уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\theta}'} \right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \theta} &= -\varphi' \bar{S}, & \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \varphi} &= \theta' \bar{S}, \\ \bar{S} &= c(I_3 + mR^2) mR^2 \mathcal{N}^3 \sin \theta (I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi + mR^2), \end{aligned} \tag{8.13}$$

где $\theta' = \frac{d\theta}{d\tau} = \mathcal{N}^{-1}\dot{\theta}$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau} = \mathcal{N}^{-1}\dot{\varphi}$, $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi})|_{\dot{\theta}=\mathcal{N}\theta', \dot{\varphi}=\mathcal{N}\varphi'}$.

Выполняя преобразования Лежандра для системы в новом времени (8.13) получим



Теорема 9. После замены времени $\rho_\mu dt = d\tau$ уравнения движения (8.10) для шара Чаплыгина представляются в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{dp_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} - \bar{S} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \bar{S} \frac{\partial H}{\partial p_\theta},$$

со скобкой Пуассона вида

$$\{\theta, p_\theta\} = \{\varphi, p_\varphi\} = 1, \quad \{p_\varphi, p_\theta\} = \bar{S}(\theta, \varphi), \quad \{\theta, \varphi\} = 0, \quad (8.14)$$

где

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \theta'}, & p_\varphi &= \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \varphi'}, \\ H &= \theta' p_\theta + \varphi' p_\varphi - \bar{\mathcal{R}} = \\ &= \frac{1}{2} p_\theta^2 \left(I_3 \tilde{I}_{12} - D(\gamma, \mathbf{I}\gamma) \right) + \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \left(I_1 I_2 \sin^2 \theta + I_3 \tilde{I}_{12} \cos^2 \theta - D(\gamma, \mathbf{I}\gamma) \right) + \\ &+ \frac{p_\theta p_\varphi}{\sin \theta} I_3 (I_1 - I_2) \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\mathcal{N} c p_\theta}{\sin \theta} (I_1 - I_2) (I_3 + D \sin^2 \theta) \sin \varphi \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{\mathcal{N} c p_\varphi}{\sin^2 \theta} I_3 (\tilde{I}_{21} + D) + \frac{\mathcal{N}^2 c^2}{\sin^2 \theta} (I_3 + D \sin^2 \theta) (\tilde{I}_{21} + D), \\ \tilde{I}_{12} &= I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi, & \tilde{I}_{21} &= I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Выражая теперь переменные $\mathbf{L} = \rho_\mu \mathbf{M}$ (8.5) помощью локальных переменных $\theta, \varphi, p_\theta$, и p_φ , находим

$$L_1 = p_\theta \cos \varphi - p_\varphi \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta} + c \mathcal{N} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \quad L_2 = -p_\theta \sin \varphi - p_\varphi \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} + c \mathcal{N} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, \quad L_3 = p_\varphi.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что скобки Пуассона при этом отображении преобразуются в указанную выше структуру (8.6).

8.4. Шар Чаплыгина с гироскатом

При добавлении к катящемуся по плоскости шару ротора, который вращается с постоянной угловой скоростью, уравнения движения (8.1) записываются в виде [37]

$$\dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega},$$

где \mathbf{k} — постоянный вектор гироскатического момента. Аналогично для уравнений (8.10) необходимо выбрать

$$T_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}).$$

Эта система обладает той же инвариантной мерой (8.3) и к ней, очевидно, также применим метод приводящего множителя (теорема 6), при этом для соответствующей функции \bar{S} справедливо

$$\bar{S} = N^3 D \sin \theta \left(c J_3 (J_1 \cos^2 \varphi + J_2 \sin^2 \varphi) + \det \mathbf{J}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{k}) \right).$$

Используя скобку (8.14) с новой функцией \bar{S} , находим коммутационные соотношения (аналогичные (8.6)) для компонент векторов $\mathbf{L} = \rho_\mu (\mathbf{M} + \mathbf{k})$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} \left(L_k - D \det \mathbf{J} \left(\rho_\mu^2 (\mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{k}) \right) \gamma_k \right), \quad \{L_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$



8.5. Два изоморфизма со случаем Клебша

1. Рассмотрим подробнее интегрируемый случай $U = 0$ на нулевой постоянной площадей $(M, \gamma) = (L, \gamma) = 0$, поскольку в этом случае скобка (8.6) соответствует алгебре $e(3)$. Запишем гамильтониан (8.2) (опуская несущественные множители) и дополнительный интеграл (8.4) в переменных L, γ в форме

$$H = \frac{1}{2}L^2(\gamma, \mathbf{B}\gamma) - \frac{1}{2}[(L, \mathbf{B}L)(\gamma, \mathbf{B}\gamma) - (\gamma, \mathbf{B}L)^2],$$

$$F = L^2(\gamma, \mathbf{B}\gamma), \quad \mathbf{B} = \mathbf{E} - D\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}.$$

Используя предложение 6 предыдущего раздела, получаем следующий результат.

Теорема 10. Векторное поле (8.1) при $U = 0$ на фиксированном уровне интеграла $(M, M) = \text{const}$ и $(M, \gamma) = 0$, после замены времени (8.5) и переменных

$$s = (\gamma, \mathbf{B}\gamma)^{-1/2}\mathbf{B}^{-1/2}\gamma, \quad \tilde{L} = \mathbf{B}^{-1/2}L$$

приводится к векторному полю случая Клебша в уравнениях Кирхгофа при нулевой постоянной площадей.

2. Ю. Н. Федоров установил несколько иной траекторный изоморфизм уравнений (8.1) при $U = 0$ с интегрируемым случаем Клебша. Действительно, несложно получить следующее уравнение для инвариантной меры

$$\dot{\rho}_\mu = -D((\gamma \times \omega), \mathbf{J}^{-1}\gamma)/\rho_\mu, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E},$$

из которого следует система для $\mathbf{Q} = \mathbf{I}\omega$ и γ :

$$\frac{d}{dt}(\rho_\mu \mathbf{Q}) = \mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q} \times \rho_\mu \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Q}) + ((\mathbf{Q} \times \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Q}), D\mathbf{J}^{-1}\gamma)\mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}\gamma/\rho_\mu - D\mathbf{Q}((\gamma \times \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Q}), \mathbf{J}^{-1}\gamma)/\rho_\mu$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma \times \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Q}.$$

После перехода к новому времени τ и новому моменту \mathbf{K} по формулам

$$dt = \rho_\mu d\tau, \quad \mathbf{K} = \rho_\mu \mathbf{Q} = \rho_\mu \mathbf{I}\omega$$

и используя формулы из векторной алгебры на уровне $(\mathbf{Q}, \gamma) = (\mathbf{K}, \gamma) = 0$ получим

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\tau} = \mathbf{K} \times \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K} - \frac{D}{\det \mathbf{J}} \frac{(\mathbf{J}\mathbf{K}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K})}{(\mathbf{I}\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma)} \gamma \times \mathbf{I}\gamma,$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \times \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K}.$$

Эта система обладает интегралом

$$\mathcal{L} = \frac{(\mathbf{J}\mathbf{K}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K})}{(\mathbf{I}^{-1}\gamma, \mathbf{J}\gamma)}.$$

Следовательно, на уровне $\mathcal{L} = \beta = \text{const}$ получаем систему

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\tau} = \mathbf{K} \times \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K} - \beta' \gamma \times \mathbf{I}\gamma \quad \beta' = \frac{D}{\det \mathbf{J}} \beta,$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \times \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}$$

Эта система описывает интегрируемый случай Клебша для уравнений Кирхгофа. Указанный изоморфизм отличается от приведенного выше (как и соответствующие случаи Клебша). Интересно было бы установить взаимосвязь между этими результатами.



9. Шар Чаплыгина на сфере

9.1. Уравнения движения и интегрируемые случаи

Уравнения, описывающие движение без проскальзывания тела, ограниченного сферической поверхностью по сферическому основанию, могут быть записаны в виде [14]

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \quad k = \frac{a}{a+b}, \quad (9.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, \mathbf{n} — нормаль в точке контакта, a — радиус сферического основания, b — радиус сферической оболочки тела (рис. 6). Здесь и далее все векторы и тензоры заданы в (подвижной) системе координат, связанной с главными осями движущегося тела. Момент в точке контакта \mathbf{M} связан с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ линейным соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + d\mathbf{n}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}), \quad d = mb^2,$$

где m — масса тела, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — центральный тензор инерции. Коэффициент k может принимать любые положительные и отрицательные значения в зависимости от возможных ситуаций (см. рис. 6).

Это так называемая задача о сферическом подвесе. Возможность изучения гироскопов со сферическим подпятником на сферическом основании была указана Контенсу [77] в связи со стабилизацией гироскопа Флеризэ.

Случай $k = 1$ соответствует $a \rightarrow \infty$, то есть качению шара по плоскости (шар Чаплыгина); как известно, эта система является интегрируемой, и описана во многих работах [29, 60, 70, 99].

При произвольном k система (9.1) имеет три интеграла движения

$$F_0 = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) \quad (9.2)$$

и допускает инвариантную меру $\rho d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{n}$ с плотностью [64]

$$\rho^2 = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) - d(\mathbf{n}, (\mathbf{I} + d)^{-1}\mathbf{n}).$$

Известен еще один замечательный интегрируемый случай системы (9.1) при $k = -1$ (А. В. Борисов, Ю. Н. Федоров [14]), который соответствует обкату неподвижного шара телом со сферической полостью (рис. 6с), при этом отношение радиусов сферы и шара равно $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Линейный дополнительный интеграл в этом случае имеет вид (аналог интеграла площадей)

$$F_2 = (\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{n}), \quad (9.3)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(\frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3), \frac{1}{2}(I_1 - I_2 + I_3), \frac{1}{2}(I_1 + I_2 - I_3))$.

Отметим, что аналогичная система (при $k = -1$) при добавлении дополнительной связи $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$, исключающей верчение, также является интегрируемой, ее явное интегрирование выполнено в работе [72].

9.2. Представление в форме системы Чаплыгина и конформная гамильтоновость при $k = -1$

Покажем, каким образом можно явно проинтегрировать систему (9.1) при $k = -1$ в квадратурах на нулевом уровне интеграла $F_2 = 0$ [13]. Эта задача аналогична интегрированию уравнений движения задачи Чаплыгина (о качении шара по плоскости) при нулевой постоянной интеграла площадей [60] (см. также [12, 99]), однако существенно сложнее. Случай $F_2 \neq 0$ мы пока не рассматриваем.



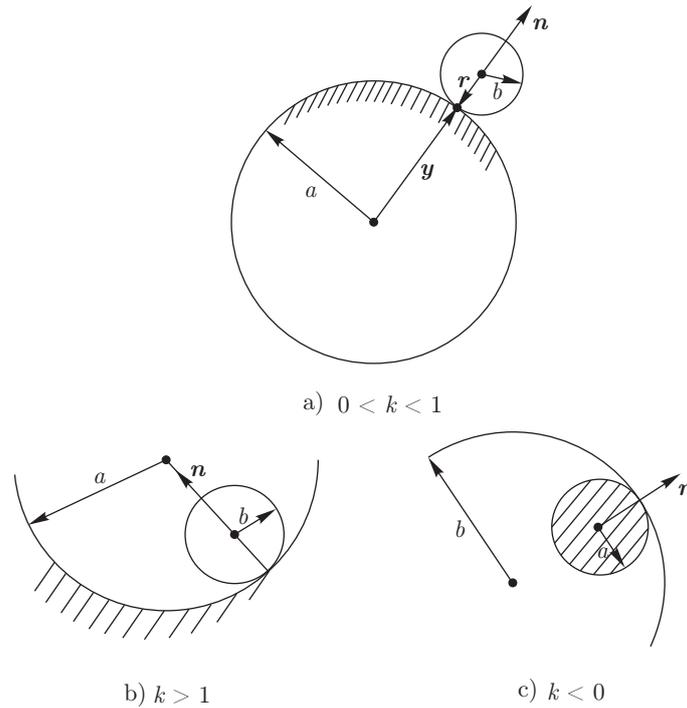


Рис. 6. Качение тела со сферическим участком по сфере. Штриховкой обозначена неподвижная поверхность

Прежде всего выразим угловую скорость при $F_2 = 0$ из уравнений (9.1) по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{B}\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}, \mathbf{B}\mathbf{n})}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{I} + d - d\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{A}. \tag{9.4}$$

Определим сфероконические координаты u, v на сфере $\mathbf{n}^2 = 1$ по формуле

$$n_i^2 = \frac{(J_i - u)(J_i - v)}{(J_i - J_j)(J_i - J_k)}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad J_i = I_i + d. \tag{9.5}$$

При помощи выражений (9.5) представим уравнения движения (9.1) в форме системы Чаплыгина (см. раздел 5)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = \dot{u}\Phi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial T}{\partial v} = -\dot{v}\Phi, \tag{9.6}$$

где $T = \frac{1}{2}(b_{uu}\dot{u}^2 + b_{uv}\dot{u}\dot{v} + b_{vv}\dot{v}^2)$ — интеграл энергии H (9.2), выраженный на уровне $F_2 = 0$ в сфероконических координатах, $\Phi = (a_u\dot{u} + a_v\dot{v})$ — линейная однородная по скорости функция. Из-за громоздкости мы не приводим здесь явные выражения для T, Φ .

Согласно методу приводящего множителя Чаплыгина после замены времени $\mathcal{N}(u, v) dt = d\tau$ система (9.6) приводится к лагранжеву виду

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial v'} - \frac{\partial T}{\partial v} = 0, \quad u' = \frac{du}{d\tau}, \quad v' = \frac{dv}{d\tau}.$$

Приводящий множитель \mathcal{N} совпадает с плотностью инвариантной меры $\mathcal{N} du dv dP_u dP_v$ (где $P_u = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}}$, $P_v = \frac{\partial T}{\partial \dot{v}}$):

$$\mathcal{N} = \frac{2uv + (u+v)(2d + \alpha_1) + \alpha_2 - d\alpha_1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} + d - d\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}} (4\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^3 - d\alpha_1^2 + (\alpha_1^2 - 2\alpha_2 + 4d\alpha_1)(u+v) - 4d(u+v)^2)^{-1},$$

где $\alpha_1 = \sum J_i$, $\alpha_2 = \sum J_i^2$, $\alpha_3 = J_1 J_2 J_3$.

Таким образом, после замены времени получаем гамильтонову систему на двумерной сфере S^2 , которую можно представить в форме уравнений на специальной (нулевой) орбите коалгебры $e(3)$. В нашем случае окончательно получим

$$\begin{aligned} H &= \frac{\delta \det \mathbf{J}}{8(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^2} \sum_{i=1}^3 c_i m_i^2, \quad F_2 = \frac{\rho^2}{4(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^2} (\delta^2 \mathbf{m}^2 - 4 \sum_{i=1}^3 d_i m_i^2), \\ \delta &= (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}) - d(\boldsymbol{\gamma}, \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})^2, \\ c_i &= \frac{\rho^2 \delta}{J_i} - 4 \prod_{k \neq i} (J_i - J_k) \gamma_i^2 \left(\rho^2 - \frac{d\delta}{4J_i \det \mathbf{J}} \right), \\ d_i &= \prod_{k \neq i} (J_i - J_k) \gamma_i^2 (\delta(J_i + d) - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}(\mathbf{J} + d)\bar{\mathbf{A}}^2\boldsymbol{\gamma}) + 2d(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\gamma}, \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})), \end{aligned} \quad (9.7)$$

где $\bar{\mathbf{A}} = 2\mathbf{A}$. Скобки Пуассона определены соотношениями

$$\{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{m_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0,$$

а орбита фиксируется значением интегралов

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Можно показать, что при $k = -1$ и $F_2 \neq 0$ уравнения движения в форме (9.6) будут соответствовать обобщенной системе Чаплыгина (5.4) (раздел 5). Следовательно, используя теорему 6 уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме с гироскопическими силами. Мы не приводим здесь получившиеся уравнения, так как они весьма громоздки (а общие методы интегрирования (в квадратурах) для таких систем пока недостаточно разработаны).

9.3. Разделение переменных

Мы используем приведенное ниже каноническое представление алгебры $e(3)$ (координаты Дарбу):

$$\begin{aligned} m_1 &= p_1(x^2 - 1) + p_2(y^2 - 1), \quad m_2 = ip_1(x^2 + 1) + ip_2(y^2 + 1), \\ m_3 &= 2p_1x + 2p_2y, \quad \gamma_1 = \frac{xy - 1}{x - y}, \quad \gamma_2 = i \frac{xy - 1}{x - y}, \quad \gamma_3 = \frac{x + y}{x - y} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Используя (9.8) запишем пару (H, F_2) в канонической форме [35]

$$\begin{aligned} H &= a(x, y)p_1^2 + 2b(x, y)p_1p_2 + c(x, y)p_2^2, \\ F_2 &= A(x, y)p_1^2 + 2B(x, y)p_1p_2 + C(x, y)p_2^2. \end{aligned} \quad (9.9)$$



Можно показать [35, 80], что разделяющиеся переменные являются корнями уравнения

$$(B - bs)^2 = (A - as)(C - cs). \quad (9.10)$$

В новых координатах функции H и F принимают форму Лиувилля

$$H = \frac{S_1(s_1)}{s_1 - s_2} P_1^2 - \frac{S_2(s_2)}{s_1 - s_2} P_2^2, \quad F = \frac{s_2 S_1(s_1)}{s_1 - s_2} P_1^2 - \frac{s_1 S_2(s_2)}{s_1 - s_2} P_2^2. \quad (9.11)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \alpha &= (J_2 + J_1 - J_3)(-J_2 + J_2 - J_3)(-J_2 + J_2 + J - 3) \\ \beta &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - 2J_1J_2 - 2J_2J_3 - 2J_3J_1 \\ \gamma &= J_1J_2J_3, \quad \epsilon = J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

при этом выражение для $S(x)$ будет иметь вид

$$S(x) = \frac{2(8x^3 + 8(d - \epsilon)x^2 + (2\epsilon^2\beta - 4d\epsilon)x - 4\gamma - d\beta + \sqrt{\Delta})}{\gamma(2x - \epsilon + 2d)^2}, \quad (9.12)$$

где $\Delta = x^2(\beta^2 + 8\alpha d) + 2x(4\beta\gamma + d\beta^2 - 2d\alpha\epsilon + 4\alpha d^2) + (4\gamma + d\beta)^2$.

В случае $d = 0$ рациональная функция S принимает простую форму

$$\begin{aligned} S(x) &= 16 \frac{(x - J_1)(x - J_2)(x - J_3)}{J_1J_2J_3(2x - J_1 - J_2 - J_3)^2} \times \\ &\times (x(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - 2J_1J_2 - 2J_2J_3 - 2J_3J_1) + 4J_1J_2J_3)^2. \end{aligned}$$

Кстати случай $d = 0$ соответствует классической и хорошо изученной задаче Эйлера—Пуансо, по интегрированию которой имеется множество работ [6]. Однако наш метод при $d = 0$ отличается от классических схем интегрирования, хотя имеется связь между двумя подходами, осуществляемая при помощи дробно-линейного преобразования.

10. Резиновый шар на сфере

10.1. Уравнения движения

Выше были получены уравнения (9.1), описывающие качение гладкого (допускающего верчение) шара на сфере. Рассмотрим теперь случай, когда дополнительно наложена связь, препятствующая верчению

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0, \quad (10.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, \mathbf{n} — нормаль к точке контакта (см. рис. 6). При помощи связанной с главными осями инерции шара подвижной системы координат, уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda \mathbf{n} + \mathbf{M}_Q, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{I} + mb^2\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) + (\mathbf{M}_Q, \mathbf{J}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})},$$

где \mathbf{M}_Q — момент внешних сил.

В дальнейшем мы рассматриваем лишь случай, когда внешняя сила отсутствует, то есть $\mathbf{M}_Q = 0$.

10.2. Законы сохранения и интегрируемые случаи

Система (10.2) обладает инвариантной мерой

$$(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^{\frac{1}{2k}} d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{n}. \quad (10.3)$$

Заметим, что мера (10.3) сохраняется также для случая, когда M_Q зависит только от \mathbf{n} и не зависит от $\boldsymbol{\omega}$. Мера (10.3) была найдена в работе [83].

Уравнения (10.2) обладают также интегралами энергии и геометрическим:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1.$$

Связь (10.1) также можно рассматривать как дополнительный частный интеграл, следовательно для полной интегрируемости по методу последнего множителя (теореме Эйлера – Якоби) необходимо иметь еще один дополнительный интеграл F . Он может быть найден в двух случаях.

1. $k = 1$ ($a = \infty$) — качение шара по горизонтальной плоскости, $F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n})$. Как показано выше (раздел 3) получающаяся система эквивалентна системе Веселовой (раздел 7) и может быть проинтегрирована с применением сфероконических координат.
2. $k = -1$ ($b = -2a$) — обкат неподвижного шара внутренней поверхностью динамически несимметричной сферы. Дополнительный интеграл

$$F = \frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})\mathbf{n}^2 + \det \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}. \quad (10.4)$$

Этот интеграл был найден нами при помощи аналогии между системой (10.2) и некоторой гамильтоновой системой, описывающей движение материальной точки по двумерной сфере. Изложим эту аналогию более подробно.

10.3. Гамильтонова структура и алгебраизация

Введем на сфере $|\mathbf{n}| = 1$ сфероконические координаты (ξ, η) . Они являются корнями уравнения

$$f(z) = \frac{n_1^2}{J_1 - z} + \frac{n_2^2}{J_2 - z} + \frac{n_3^2}{J_3 - z} = \frac{(z - \xi)(z - \eta)}{A(z)}, \quad (10.5)$$

где $A(z) = (J_1 - z)(J_2 - z)(J_3 - z)$. Можно показать, что $0 < J_1 < \xi < J_2 < \eta < J_3$. Из (10.5) легко находим

$$n_1^2 = \frac{(J_1 - \xi)(J_1 - \eta)}{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}, \quad n_2^2 = \frac{(J_2 - \xi)(J_2 - \eta)}{(J_2 - J_1)(J_2 - J_3)}, \quad n_3^2 = \frac{(J_3 - \xi)(J_3 - \eta)}{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}. \quad (10.6)$$

Из уравнения связи легко найти выражение $\boldsymbol{\omega}$ через \mathbf{n} , $\dot{\mathbf{n}}$: $\boldsymbol{\omega} = k^{-1}\dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n}$. Используя формулы (10.6), можно найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ в зависимости от $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, ξ , η . Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})$ также может быть выражена через $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, ξ , η :

$$T = \frac{\xi - \eta}{8k^2} \left(-\frac{\eta \dot{\xi}^2}{A(\xi)} + \frac{\xi \dot{\eta}^2}{A(\eta)} \right). \quad (10.7)$$



Можно показать, что уравнения движения могут быть представлены в форме системы Чаплыгина (см. раздел 5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} &= \dot{\eta} S, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta} &= -\dot{\xi} S, \\ S &= \frac{2k-1}{8k^3} (\xi - \eta) \left(\frac{\dot{\xi}}{A(\xi)} + \frac{\dot{\eta}}{A(\eta)} \right). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Вместо скоростей $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ введем обобщенные импульсы $P_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}$, $P_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}}$. В новых переменных инвариантная мера имеет вид $(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^{-1+\frac{1}{2k}} dP_\xi dP_\eta d\xi d\eta$. Введем обозначения

$$\rho^2 = (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n}) = \frac{\xi \eta}{\det \mathbf{J}}, \quad \mathcal{N} = \left(\frac{\xi \eta}{\det \mathbf{J}} \right)^{-1+\frac{1}{2k}}. \quad (10.9)$$

Сделаем замену времени $\mathcal{N} dt = d\tau$, а дифференцирование по τ обозначим штрихом. На основании теоремы 6 заключаем, что в новом времени уравнения движения являются каноническими

$$\xi' = \frac{\partial T}{\partial p_\xi}, \quad \eta' = \frac{\partial T}{\partial p_\eta}, \quad p'_\xi = -\frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad p'_\eta = -\frac{\partial T}{\partial \eta}, \quad (10.10)$$

то есть \mathcal{N} является приводящим множителем (по Чаплыгину).

Таким образом, мы показали, что система (10.2) при $k = \pm 1$ является конформно-гамильтоновой.

С помощью несколько иной техники конформная гамильтоновость системы (10.2) при $k = \pm 1$ была впервые обнаружена в [83] (см. также [82]). При $k = \frac{1}{2}$ ($a = b$) система (10.2), (10.8) является обычной гамильтоновой системой [82, 83].

Координаты ξ , η являются локальными. Для того, чтобы установить конкретный вид изоморфизма систем (10.2), (10.8) с задачей о движении точки на сфере, воспользуемся новой алгебраической и избыточной системой переменных. Обозначим

$$\tilde{\mathcal{N}} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{J}}}{k} \frac{\mathcal{N}}{\rho^2} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{J}}}{k} (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^{\frac{1}{2k}}.$$

Введем трехмерные векторы

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathcal{N}} \mathbf{J}^{1/2} \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\rho} \mathbf{J}^{-1/2} \mathbf{n}. \quad (10.11)$$

Очевидно, что

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{\rho} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0. \quad (10.12)$$

Используя выражения $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{n} через ξ , η , p_ξ , p_η , легко вычислить скобки Пуассона между \mathbf{M} и $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (10.13)$$

а также выражение для гамильтониана

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = T &= \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{N}}^{-2} \mathbf{M}^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\det \mathbf{J}} (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J} \boldsymbol{\gamma})^{1/k} \mathbf{M}^2 = \\ &= \frac{2k^2}{\xi - \eta} \left(\frac{\xi \eta}{\det \mathbf{J}} \right)^{(2k-1)/k} \left(\frac{A(\xi)}{\eta} p_\xi^2 - \frac{A(\eta)}{\xi} p_\eta^2 \right). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Скобка (10.13) является скобкой Ли–Пуассона (ко)алгебры $e(3)$. Функции $F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$, $F_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ являются ее функциями Казимира.



10.4. Траекторный изоморфизм

Гамильтониан (10.14) представляет собой произведение двух функций, зависящих соответственно от \mathbf{M} и γ : $\mathcal{H} = G(\gamma)F(\mathbf{M})$. Уравнения движения можно представить в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = G \left(\mathbf{M} \times \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} - FG\gamma \times \frac{\partial G^{-1}}{\partial \gamma} \right), \quad \dot{\gamma} = G\gamma \times \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}}. \quad (10.15)$$

Выполним замену времени $G(\gamma)dt = ds$ и зафиксируем уровень интеграла $FG = h$. На этом уровне получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{ds} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{M}} + \gamma \times \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial \gamma}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \gamma \times \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial s}, \\ \widetilde{\mathcal{H}} &= F(\mathbf{M}) - \frac{h}{G(\gamma)}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Таким образом, на фиксированном уровне интеграла энергии $\mathcal{H} = h$ система (10.15) траекторно-эквивалентна системе (10.16) при $\widetilde{\mathcal{H}} = 0$. Описанная нами процедура в небесной механике носит название регуляризации и восходит к Болину и Леви-Чивите.

Для гамильтониана (10.14) имеем

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 - h(\gamma, \mathbf{J}\gamma)^{-1/k}, \quad h = \text{const}. \quad (10.17)$$

Хорошо известно, что гамильтониан (10.17) описывает движение материальной точки по поверхности сферы (как раз при условии $(\mathbf{M}, \gamma) = 0$) в потенциальном поле сил с потенциалом $V = h(\gamma, \mathbf{J}\gamma)^{-1/k}$. Интегрируемые потенциалы соответствуют $k = 1$ (система Брадена [73]) и $k = -1$ (система Неймана). В остальных случаях гамильтониан (10.17), видимо, неинтегрируем. По крайней мере, можно показать, что дополнительного интеграла, квадратичного по \mathbf{M} , не существует. Однако остается возможность существования дополнительного интеграла более высокой степени по импульсам.

10.5. Разделение переменных для случая $k = -1$

Указанный изоморфизм позволяет построить разделяющие переменные для случая $k = -1$. Определим сфероконические координаты u и v как корни функции

$$g(z) = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{J_i(J_i - z)} = \frac{(z - u)(z - v)}{(\det \mathbf{J})A(z)},$$

где $A(z) = \prod_i (J_i - z)$ и $0 < J_1 < u < J_2 < v < J_3$. Поэтому

$$n_1^2 = \rho^2 \frac{J_1(J_1 - u)(J_1 - v)}{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}, \quad n_2^2 = \rho^2 \frac{J_2(J_2 - u)(J_2 - v)}{(J_2 - J_1)(J_2 - J_3)}, \quad n_3^2 = \rho^2 \frac{J_3(J_3 - u)(J_3 - v)}{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)},$$

где $\rho^2 = (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) = \left(\sum_i J_i - u - v \right)^{-1}$. Для кинетической энергии (10.7) мы имеем

$$T = \frac{\det \mathbf{J} \rho^4 (u - v)}{8} \left(\frac{u^2}{A(u)} - \frac{v^2}{A(v)} \right).$$



Из (10.9) мы явно найдем приводящий множитель

$$\mathcal{N} = \left(\sum_i J_i - u - v \right)^{-3/2},$$

и для переменных $u, v, p_u = \mathcal{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}}, p_v = \mathcal{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{v}}$ после замены времени $\mathcal{N} dt = d\tau$ получим канонические уравнения с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{2}{\det \mathbf{J} \left(\sum_i J_i - u - v \right) (u - v)} (A(u)p_u^2 - A(v)p_v^2).$$

Таким образом, переменные u и v являются разделяющимися.

11. Динамически несимметричный неуравновешенный шар на плоскости

Остановимся подробнее на движении по плоскости динамически несимметричного шара, центр масс которого не связан с геометрическим центром. Как и выше рассмотрим две неголономные модели качения:

1. Качение без проскальзывания, но с верчением (мраморный шар)
2. Качение без проскальзывания и верчения (резиновый шар)

Будем предполагать, что внешние силы отсутствуют.

11.1. Мраморный шар

По аналогии с задачей о шаре Чаплыгина представим уравнения движения этой системы в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m \dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & \dot{\mathbf{r}} &= (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \tag{11.1}$$

где \mathbf{a} — вектор, соединяющий центр масс с геометрическим центром, $\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}$ (см. рис. 7), m — масса шара.

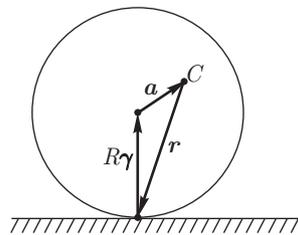


Рис. 7. Шар со смещенным центром на плоскости

Система (11.1), как и всякое тело на абсолютно шероховатой плоскости, допускает геометрический интеграл и интеграл энергии

$$F_1 = \gamma^2 = 1, \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}). \quad (11.2)$$

Помимо этих (очевидных) интегралов система (11.1) допускает еще один квадратичных интеграл

$$F_2 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) - m(\mathbf{r}, \mathbf{r})(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}). \quad (11.3)$$

Этот интеграл является обобщением интеграла $\mathbf{M}^2 = \text{const}$ в задаче о шаре Чаплыгина (см. раздел 8). Как мы видим, для интегрируемости по теореме Эйлера–Якоби не хватает еще одного первого интеграла и инвариантной меры. Как показывают численные эксперименты [70], в общем случае оба эти инварианта отсутствуют (см. рис. 8).

Интеграл (11.3) обобщается на случай качения шара по сфере.

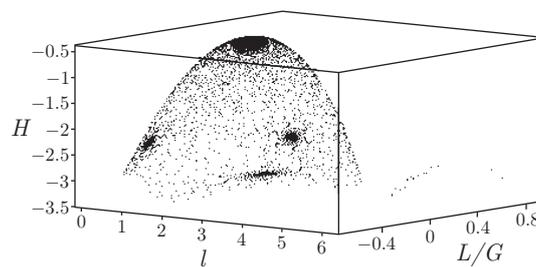


Рис. 8. Показано трехмерное сечение Пуанкаре для системы (11.1), взятое из работы [70]. Одна из траекторий в задаче о качении неуравновешенного шара по плоскости. Из рисунка видно, что все точки ложатся на некоторую поверхность, сгущения точек соответствуют асимптотическому приближению траектории к периодическим решениям. Траектория выходит из вершины и приближается к трем точкам снизу поверхности

11.2. Резиновый шар

В случае отсутствия верчения в уравнениях движения (2.18) для произвольного тела необходимо, как и в предыдущем случае, положить $\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \lambda_0\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \lambda_0 &= -\frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}))}{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

В данном случае к интегралам (11.2) добавляется уравнение связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

и, кроме того, аналог интеграла (11.3), который в данном случае принимает вид

$$F_2 = |\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}|^2 - 2Rm(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a})(\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}). \quad (11.5)$$

При $\mathbf{a} = 0$ этот интеграл, как и следовало, ожидать переходит в интеграл системы Веселовой (раздел 7).

Таким образом, для интегрируемости системы (11.4) по теореме Эйлера–Якоби (раздел 5) не хватает инвариантной меры.

В то же время общая поверхность уровня первых интегралов системы (1.4) (интегральное многообразие) является двумерной. По крайней мере при малых α , интегральное многообразие общего положения представляет собой двумерный тор, так как является возмущением интегральных многообразий (инвариантных торов) системы Веселовой (см. раздел 7). Следовательно у данной системы (вследствие двумерности инвариантных многообразий) отсутствуют хаотические траектории, типичные как для гамильтоновых систем (заполняющие трехмерный хаотический слой), так и для диссипативных (странных аттракторов в двумерных системах не возникают).

Как мы видим, вопрос о существовании или отсутствии инвариантной меры в данном случае сводится к исследованию потока на инвариантных двумерных торах [34, 45]. В случае существования интегрального инварианта возможны лишь периодические и квазипериодические траектории, в то же время в общем случае на таком торе может возникнуть асимптотические траектории и в частности могут возникать предельные циклы. Предварительные численные эксперименты в данном случае указывают на возможность существования инвариантной меры, хотя явно она не найдена.

12. Дискуссия

12.1. Модель трения Контенсу–Эрисмана

В связи с рассмотренными в данной работе различными неголономными моделями качения тел, обсудим вопрос о характере взаимодействия тела и поверхности в точке контакта. Для описания движения тела по поверхности применяются различные типы моделей контактного взаимодействия. Во многих задачах для удовлетворительного описания поведения системы требуется применение феноменологических закономерностей, в частности, законов трения. В классической и современной литературе по динамике соприкасающихся тел исследовались системы с сухим кулоновским трением (например, [46, 77, 105, и др.]), вязким трением ([25, 39, 41, и др.]), а также с более сложными моделями трения (например, в динамике камней для кёрлинга [97, 107]). Достаточно подробная библиография по механическим системам с трением имеется в книге А. П. Маркеева [38].

Одна из моделей сухого трения, учитывающая скольжение и верчение тела в точке контакта, была предложена Контенсу и Эрисманом [77, 84]. В модели Контенсу–Эрисмана локально используется закон трения Кулона, а интегрирование силы трения Кулона по площадке контакта приводит к ненулевой суммарной силе трения и к ненулевому моменту трения верчения. При этом используется распределение нормальных контактных напряжений по закону Герца и предполагается, что область контакта является круговой. Эта теория была применена Контенсу к изучению движения волчка [77]. Эрисман не касался задач динамики, а рассматривал кинематические задачи, связанные с конструкцией всякого рода интеграторов. Анализ динамики различных систем на основе модели Контенсу–Эрисмана проводился в современных работах [20–24], см. также [103]. Отметим также, что хотя модель Контенсу–Эрисмана представляет собой наиболее точный закон трения, она обладает тем недостатком, что для получения интегральных характеристик использует статическое распределение напряжений Герца. Но для многих динамических эффектов является существенным различие между динамическим и статическим трением. Эти вопросы систематически обсуждались Раусом с экспериментальной и теоретической точек зрения [46]. Соответствующий анализ имеется также у Пенлеве [105].

Остановимся подробнее на роли неголономных постановок задач в теории качения твердых тел и их взаимосвязи с различными моделями трения.

12.2. Реализация неголономных связей при качении

Как известно, существует несколько способов реализации неголономных связей. Классическим результатом, восходящим к Каратеодори и более точно доказанным в работах [25, 30, 43], является утверждение, что неголономные связи могут быть реализованы при стремлении к бесконечности коэффициента вязкого трения. Соображение о возникновении неголономной связи под влиянием диссипативных сил восходит еще классикам. В частности, Раус всегда обсуждал неголономные системы в связи с различными законами трения. Неголономные связи могут возникать в системе и другим путем. Неголономные уравнения могут хорошо описывать систему на различных, как правило, финальных стадиях движения тела. Начиная с Рауса и Пенлеве известны условия, при которых на первой стадии движения происходит скольжение и действуют различные законы трения, например кулоновского, но по мере движения трение приводит к тому, что проскальзывание прекращается и тело выходит на связь. Дальнейшее движение тела на этом промежутке, вплоть до момента схода со связи, может быть описано уравнениями неголономной механики (вообще говоря, пока тело снова не покинет связь).

Так, например, классическая неголономная модель, в которой скорость точки контакта равна нулю, но возможно верчение, может быть получена двумя способами:

- при помощи предельного перехода в системе с вязким трением, при стремлении коэффициента трения к бесконечности;
- как промежуточная стадия движения — стадия выхода на связь — в системе, где используется модель трения, учитывающая только трение скольжения в точке контакта и игнорирующая возникающий момент верчения (примером может служить простейшая модель сухого трения).

Учет момента трения верчения приводит к финальным движениям, которые описываются новой неголономной моделью качения — *rubber rolling*, которую мы подробно рассмотрели в этой работе. Такая постановка была впервые рассмотрена Раусом (см. также Пенлеве), который предполагал выполнимость кулоновского закона как для силы в точке контакта, так и для момента верчения. В конечном счете для однородного шара он получил условие, что при выходе на связь равны нулю и скорость точки контакта, и проекция угловой скорости на нормаль к поверхности [46].

Аналогичные финальные движения тел, в частности, шара, могут быть получены из модели Контенсу—Эрисмана. Здесь следует воспользоваться хорошо известным условием (полученным в [43] и передоказанным в [2, 85], и частично в [22]) о том, что скольжение и верчение диска либо однородного шара заканчиваются одновременно. В результате тело выходит на связь, которая как раз совпадает с введенной нами новой моделью неголономной механики. В статьях В. Ф. Журавлева и Д. М. Климова [21–23] высказано утверждение, что получающиеся уравнения не являются неголономными. Но, как было доказано выше (раздел 3), в этом случае связи, наложенные на систему, являются неинтегрируемыми и в общем случае для описания движения требуются уравнения неголономной механики.

Отметим, что рассматриваемую нами новую модель качения можно представлять себе не только как финальную стадию качения тел с сухим трением и моментом верчения на плоскости. Для этой модели можно предложить и другую (более традиционную) реализацию, пользуясь разложением возникающих связей на две составляющие. Одна из них — равенство нулю скорости в точке контакта (стандартная неголономная связь), может быть реализована с помощью шарового подвеса; а вторая — равенство нулю проекции угловой скорости на неподвижную ось — реализуется при помощи добавления лезвия (по аналогии с санями Чаплыгина) (см. подробно [7]).

12.3. Модели качения и динамические эффекты

В работах В. Ф. Журавлева и Д. М. Климова [20–24] содержится утверждение о принципиальной несостоятельности неголономных постановок в задачах о качении твердых тел и пропагандируется модель трения на основе теории Контенсу–Эрисмана. Такой подход нам представляется чересчур однобоким. В действительности, системы, связанные с движением соприкасающихся твердых тел, можно условно разделить на три класса.

1) С одной стороны, существуют различные системы, где в объяснении динамических эффектов (например, фрикционные автоколебания, флаттер и др.), трение играет существенную роль. В книге [106] содержится множество примеров различных механических устройств, существенно использующих трение, например, игрушка «дятел» (по-немецки Spielzeugspecht). Хотя и в этих ситуациях, как правило, для объяснения качественного (а иногда и количественного) анализа достаточно более простых моделей трения.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. В этой связи приверженность авторов вышеупомянутых работ именно к модели Контенсу–Эрисмана не совсем понятна. Ведь, как уже указывалось выше, эта модель приближенная и можно вводить еще более точные модели, при этом получая все более сложные уравнения. Хотя, даже для модели Контенсу–Эрисмана весь анализ авторов работ [20–24], как правило, сводится к численному построению лишь одной или двух траекторий.

2) С другой стороны, известны системы (например, кельтский камень, колесная пара, мобильные роботы и т. д.), для которых качественные закономерности качения определяются в основном геометрией тела, распределением масс и отсутствием полного проскальзывания точки контакта. Конкретный вид закона трения не меняет качественной картины. В этом случае оправдано применение различных неголономных постановок для описания качения. Кроме того, получающиеся неголономные системы в этом случае, как правило, существенно проще аналогичных систем с учетом трения. Это позволяет применить для их исследования более продвинутые методы (построение сечений Пуанкаре, теория устойчивости, в том числе обобщение КАМ-теории и т. п.) и соответственно получить более полное *качественное* описание возможных динамических эффектов.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Как известно, многие задачи динамики твердого тела могут быть успешно решены в рамках классических гамильтоновых уравнений механики, предполагающих полное отсутствие трения. Так, хорошо известны две основные задачи механики — уравнения Эйлера–Пуассона и задача трех тел — которые применимы для решения многих практических задач. Другой пример дает гидродинамика идеальной жидкости и вихревая теория, являющиеся основой для более сложных моделей, учитывающих вязкость.

3) Кроме того, существует еще один тип систем, для которых даже качественное объяснение закономерностей движения требует учета как динамических свойств тела, так и трения. Наиболее известным примером является волчок Томсона (называемый также «тип-топ», или китайский волчок); обширный список литературы см. [38, 39]. В этой задаче трение играет существенную роль и присутствует во всех объяснениях механизма переворота, начиная с работ классиков ([92, 96]) (надо сказать, что современные исследования мало чего к ним добавили). Трение действует так, что вращение вокруг оси симметрии, при котором центр масс занимает наинизшее положение, по мере движения теряет угловую скорость и становится неустойчивым, а устойчивым становится другое вращение, для которого центр масс занимает наивысшее положение. Согласно подходу [22], получается, что явление переворота волчка Томсона обусловлено конечностью площади пятна контакта и распределением давления в нем. Однако данный эффект никак не зависит от типа контакта (точечный или неточечный). Вообще говоря, для объяснения эффектов волчка Томсона подходит любой закон трения. Как сухое, так и вязкое трение тоже будут приводить к подъему волчка [38]. Вопрос о выборе той или иной модели трения связан, ви-

димо, с конкретными исследуемыми характеристиками движения. Использование более точной и сложной модели типа Контенсу—Эрисмана целесообразно, если целью ставится исследование каких-либо количественных закономерностей динамики волчка (как правило, временных характеристик, например, времени подъема и переворота). Обсуждение различных моделей трения для анализа волчка Томсона приводится в [103]. Следует также иметь в виду, что численные расчеты и асимптотический анализ показывают, что трение по Контенсу—Эрисману при достаточно быстром верчении приближенно пропорционально скорости скольжения, то есть имеет место вязкое трение. А в режиме чистого скольжения и малых угловых скоростях верчения следует рассматривать сухое трение.

Из наших рассуждений не следует, разумеется, что сложные модели трения не представляют пользы и интереса. Целью являлось показать необоснованность распространения какой-либо одной модели на многие задачи качения и отрицания упрощенных моделей трения и неголономных постановок задач. Применимость различных моделей должна быть связана с конкретным динамическим явлением (рассматриваем ли мы перманентные вращения или др. режимы. . .) и экспериментальными данными, и должна мотивироваться большей конкретизацией природы соприкасающихся тел.

В конце укажем, что кроме отмеченных двух неголономных моделей движения тел существует еще одна модель с неинтегрируемой связью — это модель качения диска по льду. Предполагается, что диск катится по льду и наложена кинематическая связь: вектор скорости точки контакта должен быть параллелен горизонтальному диаметру окружности диска. В этом случае диск катится по гладкому льду, так что исключается возможность подрезания льда, но нет препятствия для вращения диска вокруг его оси симметрии. Эта модель была введена в [32], где показана интегрируемость этой системы. Более сложные интегрируемые задачи были найдены и исследованы в [10].

12.4. Проблема отрыва

В заключении остановимся на вопросе о возможности отрыва тела от поверхности. Всем хорошо известна задача о диске Эйлера (см., например, [98]), не имеющая пока полного объяснения, в которой возникают колебания, сопровождающиеся звуком, частота которого возрастает при падении. Одной из возможных гипотез объяснения является многократный отрыв диска при стремлении его к горизонтальному положению.

Подобного рода эффекты (многократные невидимые глазу подскоки тел) были отмечены еще классиками. Например, у Аппеля [65] в связи с движением так называемых гироскопов Жерва и у Кориолиса [75] в задаче о соударении бильярдных шаров.

Надо иметь в виду, что так как неголономная механика является предельным вариантом задач с трением, в ней при анализе условий отрыва возникают такие же парадоксы Пенлеве, что были указаны им в замечательной книге [105] именно для систем с трением. В неголономных системах «парадоксальное поведение» возникает вследствие того, что обращения в ноль только нормальной составляющей силы реакции недостаточно для корректного описания отрыва [94, 95]. Этот вопрос отрыва в неголономной механике еще крайне мало изучен и требует анализа. На примере диска Эйлера мы видим, что отрыв может играть существенную роль и приводить к весьма любопытным динамическим эффектам.

13. Нерешенные задачи

В заключение укажем ряд задач, которые (пока) не удастся разрешить при помощи развитого в этой работе подхода. Мы попытаемся систематизировать эти нерешенные задачи и прежде всего остановимся на наиболее простых и естественных (как нам кажется) проблемах.

1. В неголономной механике имеется ряд систем (помимо рассмотренных в данной работе), о которых известно, что они представляются в конформно-гамильтоновой форме (при помощи обобщенной теоремы Чаплыгина, см. раздел 5). Тем не менее, вопрос об их явном интегрировании (в квадратурах) остается открытым.

Так, для классической задачи о качении шара Чаплыгина известны *два обобщения*: первое было получено Маркеевым [37], второе Козловым [29] (Маркеев добавил гироскат, а Козлов поместил шар в потенциальное поле Бруна.) Как показано в этой работе, обе эти системы являются конформно-пуассоновыми, но, тем не менее, при их интегрировании возникает сложный технический момент: после замены времени получается гамильтонова интегрируемая система на сфере с квадратичным интегралом, содержащим линейные по скоростям слагаемые. К сожалению, общего метода для интегрирования таких систем не разработано; в частном случае проинтегрирована только задача Козлова на нулевой константе площадей (когда этих слагаемых не возникает) [56]. Интегрирование задач такого рода связано с явным интегрированием систем типа Клебша на *ненулевой постоянной площадей*. Несмотря на усилия классиков [101] и современные попытки (например, [36, 110]), задача остается нерешенной. Полученные результаты нельзя считать окончательными, и их ценность для динамики пока неясна. Это связано с тем, что до сих пор неизвестна возможность применения результатов явного интегрирования случая Клебша ни для качественного, ни для количественного описания поведения системы.

Близкие вопросы могут быть поставлены в отношении задачи Борисова–Федорова [14], где рассматривается движение шара Чаплыгина по сфере. В данной работе она проинтегрирована на нулевой константе площадей. Однако на ненулевой константе также появляются гироскопические линейные по скоростям слагаемые и вопрос о явном интегрировании существенно усложняется. Эта задача также допускает обобщение на случай поля Бруна, но она также не проинтегрирована в квадратурах.

2. Следующие две задачи существенно сложнее: для них известно лишь, что они интегрируемы по теореме Эйлера–Якоби, и, следовательно, *в принципе* могут быть записаны в конформно-гамильтоновой форме. Тем не менее, *явное* конформно-гамильтоново описание этих систем до сих пор неизвестно, что, в свою очередь, препятствует применению методов качественного анализа гамильтоновых систем и их явного интегрирования. Первая задача — это система Федорова, описывающая движение шара в шаровом подвесе [54], а вторая — это задача о движении шара Чаплыгина по прямой, которая рассматривалась Веселовым и Веселовой [15]. Как было сказано, обе системы интегрируемы по Эйлеру–Якоби, и очень близки к обобщенным системам Чаплыгина с двумя степенями свободы. Тем не менее, указать пуассонову структуру, либо выполнить явную редукцию к системе типа Эйлера–Пуассона не удается.

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Хотя в этой работе мы уделяем значительное внимание явному интегрированию неголономных систем, это более продиктовано традицией, чем необходимостью (качественного и количественного) анализа этих систем. В современной динамике этот вопрос не имеет столь принципиального значения, как в динамике 19–20 вв., когда основной руководящей идеей являлось нахождение интегрируемых систем и явное представление их решений в тета-функциях. С современной точки зрения интегрируемые системы существенно более продуктивно исследовать не с помощью явных квадратур, а с помощью средств топологического и бифуркационного анализа (а в случае количественного описания и с помощью численного интегрирования). Методы топологического анализа гамильтоновых систем развиты в работах [4, 57], но, к сожалению, они не были применены к неголономным системам. Хотя, как нам представляется, развитие этой теории на случай неголономных систем не встретит принципиальных трудностей и должно быть очень продуктивным.

Имеется также один частный вопрос, заключающийся в следующем. Для рассмотренных в этой работе неголономных систем конформно-гамильтоново описание получено лишь для редуцированной системы (в которой, как правило, исключена эволюция угла прецессии). Вопрос

о возможности естественного расширения (поднятия) пуассоновой структуры на общую нередуцированную систему не решен.

3. Укажем теперь более сложные открытые проблемы: они связаны с многомерными обобщениями неголономных систем, рассмотренных в этой работе. Мы имеем ввиду многомерные обобщения систем Сулова, Веселовой и задачи Чаплыгина о качении шара по плоскости, которые рассматривались в целом ряде работ [87, 89, 90]. В этих работах найдена инвариантная мера для многомерных обобщений системы Веселовой и Чаплыгина, а также рассмотрены некоторые частные решения, полученные при определенном выборе начальных условий и параметров системы. Тем не менее, вопрос об интегрируемости этих систем в целом до сих пор открыт, более того, неясен даже механизм их интегрирования. Наиболее естественным, по видимому, в данном случае является представление системы в конформно-гамильтоновой форме с последующим применением теоремы Лиувилля. Однако, например, для четырехмерного аналога шара Чаплыгина мы до сих пор не можем ответить на вопрос о наличии пуассоновой структуры и условиях интегрируемости (даже несмотря на имеющуюся инвариантную меру).

4. В заключение, укажем еще одну систему, которая описывает качение по поверхности, например, по плоскости, твердого тела, имеющего эллипсоидальные полости, заполненные идеальной жидкостью. Это классическая задача, поставленная Томсоном [48], редко обсуждается в современных работах по неголономным системам (имеется исследование устойчивости частных решений [26]). Различные аспекты иерархии динамики в этой системе практически не исследованы, в частности, неизвестны условия существования различных (тензорных) инвариантов (интегралов, полей симметрий, меры, пуассоновой структуры) и интегрируемых случаев.

Авторы благодарны В. В. Козлову, Ж. Койлеру, В. В. Соколову, Ю. Н. Федорову и Е. В. Феррапонтову за полезные обсуждения. Исследования А. В. Борисова и И. С. Мамаева выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных научных исследований (коды проектов 08-01-00651 и 07-01-92210). Работа И. С. Мамаева выполнена в рамках гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых — докторов наук (код проекта МД-5239.2008.1).

Список литературы

- [1] Аграчев, А. А., Качение шаров и октавы, *Тр. МИАН*, 2007, т. 258, с. 17–27; English transl.: arXiv:math/0611812v2.
- [2] Аргатов, И. И., Условия равновесия твердого тела на шероховатой плоскости при осесимметричном распределении нормальных давлений, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, 2005, № 2, с. 15–26.
- [3] Арнольд, В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, М.: ВИНТИ. 1985, 304 с.
- [4] Болсинов, А. В., Фоменко А. Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», 1999, т. 1, 2.
- [5] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», 1999, 464 с.
- [6] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», 2005, 576 с.
- [7] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Шар Чаплыгина, задача Сулова и задача Веселовой. Интегрируемость и реализация связей, в сб. *Неголономные динамические системы*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», ИКИ, 2002, с. 118–130.



- [8] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Странные аттракторы в динамике кельтских камней, *УФН*, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [9] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Препятствие к гамильтоновости неголономных систем, *Доклады РАН*, 2002, т. 387, № 6, с. 764–766.
- [10] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Интегрируемая система с неинтегрируемой связью, *Мат. зам.*, 2006, т. 80, № 1, с. 131–134.
- [11] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара, *Мат. зам.*, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.
- [12] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем, *Сиб. мат. жур.*, 2007, т. 48, №1, с. 33–45; arxiv.org/pdf/nlin.SI/0509036.
- [13] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Марихин, В. Г., Явное интегрирование одной неголономной задачи, *Доклады РАН*, 2008 (в печати).
- [14] Борисов, А. В., Федоров, Ю. Н., О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики, *Вестн. МГУ, сер. мат. мех.*, 1995, № 6, с. 102–105.
- [15] Веселов, А. П., Веселова, Л. Е., Интегрируемые неголономные системы на группах Ли, *Мат. заметки*, 1988, т. 44, № 5, с. 604–619.
- [16] Веселова, Л. Е., Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи, в сб. *Геометрия, дифференциальные уравнения и механика*, МГУ, 1986, с. 64–68.
- [17] Воронец, П. В., Об уравнениях движения для неголономных систем, *Мат. сб.*, 1901, т. 22, вып. 4, с. 659–686.
- [18] Воронец, П. В., *Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости*, Киев: Изв. ун-та Св. Владимира, 1903, т. 43, № 1, с. 1–66.
- [19] Воронец, П. В., *Преобразования уравнений динамики с помощью линейных интегралов (с приложением к задаче о трех телах)*, Киев: Изв. ун-та Св. Владимира, 1907, т. 47, № 1–2, 192 с.
- [20] Журавлев, В. Ф., О модели сухого трения в задаче качения твердых тел, *Прикл. матем. и мех.*, 1998, т. 62, вып. 5, с. 762–767.
- [21] Журавлев, В. Ф., О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел, *Успехи механики*, 2005, No. 3, с. 58–76.
- [22] Журавлев, В. Ф., Климов, Д. М., О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, 2005, no. 6, с. 157–168.
- [23] Журавлев, В. Ф., Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, 2006, no. 6, с. 3–8.
- [24] Журавлев, В. Ф., Климов, Д. М., Глобальное движение кельтского камня, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, 2008, вып. 3, с. 8–16.
- [25] Карапетян, А. В., О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней, *Прикл. мат. мех.*, 1981, т. 45, вып. 1, с. 42–51.
- [26] Карапетян, А. В., Проконина, О. В., Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением, *Прикл. мат. мех.*, 2000, т. 64, №1, с. 85–91.
- [27] Козлов, В. В., Диффузия в системах с интегральным инвариантом на торе, *Доклады РАН*, 2001, т. 381, №5, с. 596–598.

- [28] Козлов, В. В., *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995. English translation: Kozlov, V.V., *Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics*, Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [29] Козлов, В. В., К теории интегрирования уравнений неголономной механики, *Успехи механики*, 1985, т. 8, № 3, с. 85–101; Kozlov, V.V., On the Integration Theory of Equations of Nonholonomic Mechanics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 191–176.
- [30] Козлов, В. В., О реализации неинтегрируемых связей в классической механике, *ДАН СССР*, 1983, т. 272, № 3.
- [31] Козлов, В. В., О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем, *Прикл. мат. мех.*, 1987, т. 51, №4, с. 538–545.
- [32] Козлов, В. В., Колесников, Н. Н., О теоремах динамики, *Прикл. мат. мех.*, 1978, т. 42, №1, с. 28–33.
- [33] Колмогоров, А. Н., О динамических системах с интегральным инвариантом на торе, *ДАН СССР*, т. 93, 1953, № 5, с. 763–766.
- [34] Корнфельд, И. П., Синай, Я. Г., Фомин, С. В., *Эргодическая теория*, М.: Наука, 1980.
- [35] Марихин, В. Г., Соколов, В. В., О парах коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, *ТМФ*, т. 149, №2, 2006, с. 147–160.
- [36] Марихин, В. Г., Соколов, В. В., О приведении пары квадратичных по импульсам гамильтонианов к канонической форме и о вещественном частичном разделении переменных для волчка Клебша, *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, №3 (в печати).
- [37] Маркеев, А. П., Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, 1986, т. 21, № 1, с. 64–65.
- [38] Маркеев, А. П., *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*, М.: Наука, 1992. 336 с.
- [39] Маркеев, А.П., К динамике волчка, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, №3, 1984, с. 30–38.
- [40] Мощук, Н. К., О приведении уравнений движения некоторых неголономных систем Чаплыгина к форме уравнений Лагранжа и Гамильтона, *Прикл. мат. мех.*, 1987, №51, вып. 2, с. 223–229.
- [41] Мощук, Н. К., О движении шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости, *Прикл. мат. мех.*, 1983, т. 47, № 6, с. 916–921.
- [42] Мощук, Н. К., Качественный анализ движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости, *Прикл. мат. мех.*, 1988, т. 52, № 2, с. 203–210.
- [43] Неймарк, Ю. И., Фуфаев, Н. А. *Динамика неголономных систем*, М.: Наука, 1967, 519 с.
- [44] Новиков, С. П., Тайманов, И. А., *Современные геометрические структуры и поля*, М.: МЦНМО, 2005, 584 с.
- [45] Пуанкаре, А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.: Изд-во иностр. лит, 1947.
- [46] Раус, Э., *Динамика системы твердых тел*, т. II, 1983, 544 с. Пер. с англ.: Routh E., *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*, New York: Dover Publications, 1905.
- [47] Рашевский, П. К., О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией, *Ученые записки пед. ин-та им. К. Либкнехта (сер. физ.-матем.)*, 1938, №2, с. 83–94.
- [48] Моисеев, Н. Н., Румянцев, В. В., *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*, Москва: Наука, 1965.
- [49] Синай, Я. Г., *Введение в эргодическую теорию*, М.: Фазис, 1996, 144 с.

- [50] Суслов, Г. К., *К вопросу о катании шара по поверхности*, Изв. унив. Свят. Владимира, Киев, 1982, № 6, с. 1–41.
- [51] Суслов, Г. К., *Теоретическая механика*, М.–Л.: Гостехиздат, 1946. Уточн. репринты
- [52] Татаринов, Я. В. *Построение компактных многообразий, отличных от торов в одной интегрируемой неголономной задаче*. Усп. мат. наук, 1985, т. 41, вып. 3, с. 216.
- [53] Татаринов, Я. В. *Разделяющие переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах*, Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, 1988, вып. XXIII, с. 160–174.
- [54] Федоров, Ю. Н., О движении твердого тела в шаровом подвесе, *Вестн. МГУ, сер. мат. мех.*, 1988, № 5, с. 91–93.
- [55] Федоров, Ю. Н., О двух интегрируемых неголономных системах в классической динамике, *Вестн. МГУ, сер. мат. мех.*, 1989, № 4, с. 38–41.
- [56] Федоров, Ю. Н., Об интегрировании обобщенной задачи о качении шара Чаплыгина, в сб. *Геометрия, дифференциальные уравнения и механика*, МГУ, 1986, с. 151–155.
- [57] Харламов, М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
- [58] Харламов, А. П. *Движение по инерции тела, имеющего неподвижную точку и подчиненного неголономной связи*. Мех. тв. тела, НАН Украины, Донецк, 1995, вып. 27, с. 21–31.
- [59] Харламова-Забелина, Е. И., Движение твердого тела вокруг неподвижной точки при наложении неголономной связи, *Труды Донецк. индустр. ин-та*, 1957, т. 20, вып. 1, с. 69–75.
- [60] Чаплыгин, С. А., *О катании шара по горизонтальной плоскости*. Собр. соч., т. 1, М.–Л.: ОГИЗ, 1948, с. 76–101.
- [61] Чаплыгин, С. А., К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе, *Мат. сб.*, 1911, т. 28, вып. 1; *Полн. собр. соч.*, М.–Л., 1948, т. 1, с. 15–25. English transl.: Chaplygin, S.A., On the Theory of Motion of Nonholonomic Systems. The Reducing-Multiplier Theorem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 369–376.
- [62] Чаплыгин, С. А., О движении тяжелого твердого тела вращения на горизонтальной плоскости, *Труды Отделения физ. наук Общ. люб. естеств.*, 1897, т. 9, вып. 1; *Собр. соч.*, т. 1, М.–Л.: ОГИЗ, 1948, с. 57–75. English transl.: Chaplygin, S.A., On a Motion of a Heavy Body of Revolution on a Horizontal Plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 119–130.
- [63] Чаплыгин, С. А. К теории движения неголономных систем; примеры применения метода приводящего множителя, Собр. соч., т. 3, М.–Л.: ОГИЗ, 1948, с. 248–75.
- [64] Ярошук, В. А., Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности, *Вестник МГУ, сер. мат. мех.*, 1992, №6, с. 26–30.
- [65] Appell, P., *Traité de mécanique rationnelle*, Paris: Gauthier-Villars, 1896.
- [66] Bates, L. and Cushman, R., What is a Completely Integrable Nonholonomic Dynamical System? *Rep. on Math. Phys.*, 1999, vol. 44, no. 1–2, pp. 29–35.
- [67] Bloch, A. M., *Nonholonomic Mechanics and Control*. With the collaboration of Baillieul, J., Crouch, P., and Marsden, J. With scientific input from Krishnaprasad, P.S., Murray, R.M., and Zenkov, D., vol. 24, *Interdisciplinary Applied Mathematics, Systems and Control*, New York: Springer-Verlag, 2003.
- [68] Bor, G. and Montgomery, R., G_2 and the “rolling distribution”, arXiv:math.DG/0612469v1.
- [69] Borisov, A. V. and Dudoladov, S. L., Kovalevskaya Exponents and Poisson Structures, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1999, vol. 4, no. 3, pp. 13–20.

- [70] Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., The Rolling of Rigid Body on a Plane and Sphere. Hierarchy of Dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 177–200.
- [71] Borisov, A. V., Mamaev, I. S., and Kilin, A. A., Rolling of a Ball on a Surface. New Integrals and Hierarchy of Dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–220.
- [72] Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., Rolling of a Non-homogeneous Ball Over a Sphere Without Slipping and Twisting, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
- [73] Braden, H. W., A completely integrable mechanical system, *Lett. in Math. Phys.*, 1982, vol. 6, pp. 449–452.
- [74] Cantrijn, F., de Léon, M., and de Diego, D., On the geometry of generalized Chaplygin systems, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2002, vol. 132, pp. 323–351.
- [75] Coriolis, G., *Théorie mathématique des effets du jeu de Billard*, Paris: Carilian-Goeury, 1835.
- [76] Chow, W. L., Über Systeme von linearen partiellen Differential Gleichungen erster Ordnung, *Math. Ann.*, 1939, bd. 117, p. 98–105.
- [77] Contensou, P., Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie, *Kreiselprobleme Hydrodynamics: IUTAM Symp. Celerina*, Berlin: Springer, 1963, pp. 201–216. Пер. на рус.: Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. В кн.: *Проблемы гироскопии*. М.: Мир, 1967, с. 60–77.
- [78] Dragovic, V., Gajic, B., and Jovanovic, B., Generalizations of Classical Integrable Nonholonomic Rigid Body Systems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1998, vol. 31, pp. 9861–9869.
- [79] Duistermaat, J. J., Chaplygin's sphere, in Cushman, R., Duistermaat, J. J., and Śniatycki, J., *Chaplygin and the Geometry of Nonholonomically Constrained Systems* (in preparation), 2000; arXiv:math.DS/0409019.
- [80] Eisenhart, L. P., Separable systems of Stäckel, *Annals of Mathematics*, vol. 35, no. 2, 1934, pp. 284–305.
- [81] Ehlers, K., Koiller, J., Montgomery, R., and Rios, P. M., Nonholonomic Systems via Moving Frames: Cartan Equivalence and Chaplygin Hamiltonization. The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry, Vol. 232 of *Progr. Math.*, Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2005, pp. 75–120.
- [82] Ehlers, K. and Koiller, J., Rubber Rolling over a Sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.
- [83] Ehlers, K. and Koiller, J., Rubber Rolling: Geometry and Dynamics of 2-3-5 Distributions, in *Proceedings IUTAM symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, 25-30 August, 2006)*, pp. 469–480.
- [84] Erismann, Th., Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes, *Z. angew. Math. Phys.*, 1954, vol. 5, S. 355–388.
- [85] Farkas, Z., Bartels, G., Unger, T., and Wolf, D. E., Frictional Coupling between Sliding and Spinning Motion, *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 90, no. 24, 248302 (4 pages).
- [86] Fassò, F., Giacobbe, A., and Sansonetto, N., Periodic Flows, Rank-Two Poisson Structures, and Nonholonomic Mechanics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, vol. 10, no. 3, pp. 267–284.
- [87] Fedorov, Yu.N., Dynamic Systems with the Invariant Measure on Riemann's Symmetric Pairs ($gl(n)$, $so(n)$), *Regul. Chaotic Dyn.*, 1996, vol. 1, no. 1, pp. 38–44.
- [88] Fedorov, Yu. N. and Jovanović, B., Nongholonomic LR-Systems as Generalized Chaplygin Systems with an Invariant Measure and Flows on Homogeneous Spaces, *J. of Nonlinear Science*, 2004, vol. 1, pp. 341–381.

- [89] Fedorov, Yu. N. and Jovanović, B., Quasi-Chaplygin Systems and Nonholonomic Rigid Body Dynamics, *Lett. Math. Phys.*, 2006, vol. 76, pp. 215–230.
- [90] Fedorov, Yu. N. and Kozlov, V. V., Various Aspects of n -Dimensional Rigid Body Dynamics, Vol. 168 of *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 1995, pp. 141–171.
- [91] Ferrers, N. M., Extension of Lagrange’s Equations, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1872, vol. 12, no. 45, pp. 1–5.
- [92] Gallop, M. A., On the Rise of a Spinning Top, *Trans. Cambridge Phil. Society*, 1904, vol. 19, pp. 356–373.
- [93] Garcia-Naranjo, L., Reduction of Almost Poisson Brackets for Nonholonomic Systems on Lie Groups, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 4, pp. 365–388.
- [94] Ivanov, A. P., On Detachment Conditions in the Problem on the Motion of a Rigid Body on a Rough Plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 355–368.
- [95] Ivanov, A. P., Geometric Representation of Detachment Conditions in a System with Unilateral Constraint, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 436–443.
- [96] Jellet, J. H., *A Treatise on the Theory of Friction*, London: Macmillan, 1872.
- [97] Jensen, E. T. and Shegelski, M. R. A., The Motion of Curling Rocks: Experimental Investigation and Semi-Phenomenological Description, *Can. J. Phys./Rev. Can. Phys.*, 2004, vol. 82, no. 10, pp. 791–809.
- [98] Kessler, P. and O’Reilly, O.M., The Ringing of Euler’s Disk, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, pp. 49–60.
- [99] Kilin, A. A., The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, v. 6, no. 3, p. 291–306.
- [100] Koiller, J., Reduction of Some Classical Non-holonomic Systems with Symmetry, *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 1992, v. 118, p. 113–148.
- [101] Kotter, F., Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, *Z. angew. Math. Phys.*, 1892, vol. 109, Part I: S. 51–81, Part II: S. 89–111.
- [102] Kozlov, V. V. and Fedorov, Yu. N., *A Memoir on Integrable Systems*, Springer-Verlag, to appear.
- [103] Leine, R. I., Le Saux, C., Glocker, C. *Friction models for the rolling disk*, ENOC–2005, Eindhoven, Netherlands, August, 2005.
- [104] Olver, P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second edition, *Graduate Texts in Mathematics*, 107. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [105] Painlevé P., *Lecons sur le frottement*, P.: Hermann, 1895. Рус. пер.: Пэнлеве, П., *Лекции о трении*, М.: Гостехиздат, 1954, 316 с.
- [106] Pfeiffer, F., Einführung in die Dynamik. (German) [Introduction to dynamics], Teubner Studienbücher Mechanik [Teubner Mechanics Textbooks], B.G. Teubner Stuttgart, 1989.
- [107] Persson, B. N. J., *Sliding Friction — Physical Principals and Applications, 2nd ed.*, London: Springer, 2000.
- [108] Ramos, A., Poisson Structures for Reduced Non-holonomic Systems, *J. Phys. A*, 2004, vol. 37, no. 17, pp. 4821–4842.
- [109] Rumyantsev, V. V., Sumbatov, A. V., On the Problem of Generalization of the Hamilton – Jacobi Method for Non-holonomic System, *ЗАММ*, 1978, vol. 58., pp. 477–781.
- [110] Sokolov, V. V. and Marikhin, V. G., Separation of Variables on a Non-hyperelliptic Curve, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, vol. 10, pp. 59–70.

- [111] Schneider, D. A., Non-holonomic Euler–Poincaré Equations and Stability in Chaplygin’s Sphere, *Dyn. Sys.*, 2002, vol. 17, no. 2, pp. 87–130.
- [112] Sumbatov, A. S., Nonholonomic Systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, 7 (2), pp. 221–238. Рус. вариант: Сумбатов, А. С., Неголономные системы, в сб. *Неголономные динамические системы*, М.–Ижевск: Изд-во «РХД», ИКИ, 2002, с. 20–48.
- [113] Weinstein, A., Poisson Geometry, *Diff. Geom. Appl.*, 1998, vol. 9, no. 1–2, pp. 213–238.
- [114] Woronetz, P., Über die rollende Bewegung einer Kreisscheibe auf einer beliebigen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften *Math. Annalen*, 1909, Bd. 67, S. 268–280.
- [115] Woronetz, P., Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt, *Math. Annalen*, 1911, Bd. 70, S. 410–453.
- [116] Woronetz, P., Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, *Math. Annalen*, 1912, Bd. 71, S. 392–403.