

УДК 517.958

# Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин

Получено 03 августа 2008 г.

Работа посвящена вопросам динамики жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов. Приводятся обзор литературы и оригинальные результаты авторов, полученные с помощью современных методов нелинейной динамики. Даётся четкая лагранжева и гамильтонова формулировка уравнений движения, в частности, описан гамильтонов формализм на алгебрах Ли. Формулируются и исследуются задачи, связанные с неинтегрируемостью и хаосом. Классифицируются все известные интегрируемые случаи, а также приводятся наиболее естественные гипотезы относительно неинтегрируемости уравнений движения в общем случае. Приводятся результаты численного моделирования, которые, с одной стороны, показывают хаотическое поведение системы, а с другой стороны во многих ситуациях могут служить численным компьютерным доказательством неинтегрируемости (метод трансверсально пересекающихся сепаратрис).

Ключевые слова: жидкие и газовые самогравитирующие эллипсоиды, интегрируемость, хаотическое поведение

A. V. Borisov, I. S. Mamaev, A. A. Kilin

The Hamiltonian Dynamics of Self-gravitating Liquid and Gas Ellipsoids

The dynamics of self-gravitating liquid and gas ellipsoids is considered. A literary survey and authors' original results obtained using modern techniques of nonlinear dynamics are presented. Strict Lagrangian and Hamiltonian formulations of the equations of motion are given; in particular, a Hamiltonian formalism based on Lie algebras is described. Problems related to nonintegrability and chaos are formulated and analyzed. All the known integrability cases are classified, and the most natural hypotheses on the nonintegrability of the equations of motion in the general case are presented. The results of numerical simulations are described. They, on the one hand, demonstrate a chaotic behavior of the system and, on the other hand, can in many cases serve as a numerical proof of the nonintegrability (the method of transversally intersecting separatrices).

Keywords: liquid and gas self-gravitating ellipsoids, integrability, chaotical behavior

Mathematical Subject Classifications: 70Hxx

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>I. Динамика жидкого самогравитирующего эллипсоида . . . . .</b>	366
1. Введение . . . . .	366
2. Уравнения Дирихле и Римана . . . . .	369
2.1. Уравнения Дирихле . . . . .	369
2.2. Уравнения Римана . . . . .	370
2.3. Гравитационный потенциал . . . . .	371
2.4. Задача Роша . . . . .	372
3. Первые интегралы . . . . .	373
3.1. Завихренность . . . . .	374
3.2. Момент . . . . .	374
3.3. Энергия . . . . .	374
4. Лагранжев и гамильтонов формализм . . . . .	375
4.1. Принцип Гамильтона и лагранжев формализм . . . . .	375
4.2. Группа симметрии и закон взаимности Дедекинда . . . . .	376
4.3. Гамильтонов формализм и редукция по симметрии . . . . .	377
5. Частные случаи движения . . . . .	379
5.1. Движения эллипсоида с сохранением формы . . . . .	379
5.2. Осесимметричный случай (Дирихле [36]) . . . . .	380
5.3. Случай Римана [78] . . . . .	381
5.4. Эллиптический цилиндр (Липшиц [66]) . . . . .	382
6. Хаотические колебания трехосного эллипсоида . . . . .	383
<b>II. Динамика газового облака с эллипсоидальной стратификацией . . . . .</b>	386
1. Введение . . . . .	386
2. Уравнения движения газового облака с линейным полем скоростей . . . . .	387
2.1. Модель Овсянникова [13] . . . . .	388
2.2. Модель Дайсона [39] . . . . .	390
2.3. Модель остивающего газового облака (Фуджимото [43]) . . . . .	391
2.4. Модель пылевого облака (гравитационный коллапс) . . . . .	392
3. Лагранжев формализм, симметрии, первые интегралы . . . . .	393
4. Редукция по симметрии и гамильтонов формализм . . . . .	394
5. Частные случаи движения . . . . .	395
5.1. Случай $\gamma = \frac{5}{3}$ (одноатомный газ) . . . . .	395
5.2. Случай осевой симметрии . . . . .	399
5.3. Обобщение случая Римана . . . . .	401

Обзор посвящен вопросам динамики жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов. Этот раздел механики представлен обширными исследованиями, причем многие работы были выполнены независимо учеными из разных странах и опубликованы в различных, часто малодоступных, журналах. Ряд результатов в этой области до сих пор носит дискуссионный характер. Авторами предпринята попытка систематического изложения основных результатов по динамике эллипсоидальных фигур (как классических, так и сравнительно новых). Приводятся также новые результаты авторов, показывающие хаотическое поведение колеблющегося жидкого и газового эллипса. Формулируются некоторые нерешенные задачи.

В первой части обзора в замкнутой, систематической форме представлены основные результаты по динамике эллипсоидальных фигур идеальной несжимаемой жидкости, начиная с основополагающих работ Дирихле и Римана. Этим исследованиям, как известно, предшествовал период изучения статического равновесия врачающихся жидких масс, обусловленный научным интересом к фигуре Земли и восходящий к «Началам» Ньютона и трудам Клеро и Маклорена. Краткий исторический обзор этого периода, связанного также с именами Якоби, Мейера и Лиувилля, имеется в монографии Чандрасекхара [30]. Поворотным пунктом в развитии теории фигур равновесия послужили фундаментальные открытия Дирихле [36] и Римана [78] (1857–1861), которые впервые стали изучать вопросы динамики жидких эллипсоидов. Они заметили, что существует такое конечномерное решение уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости, при котором эллипсоид сохраняет свою форму, но деформируется. Оно является точным решением гидродинамики, и, таким образом, можно корректно ставить вопрос об изучении динамики таких жидких эллипсоидов.

Основные результаты классических работ излагаются здесь в краткой замкнутой форме. Приводятся уравнения движения в различных формах, указываются интегралы движения, а также обсуждается лагранжева и гамильтонова форма уравнений, в связи с чем естественным образом производится редукция системы по группе симметрий. Далее проанализированы частные решения, начиная со стационарных конфигураций, впервые найденных Маклореном, Якоби и Риманом. Указан новый класс хаотических движений эллипсоидов, представляющий собой нерегулярные пульсации, при которых оси эллипса остаются неподвижными в абсолютном пространстве. В этом случае численно найдены периодические решения, и для них численно построены сепаратрисы, тем самым доказана (компьютерными методами) неинтегрируемость системы в общем случае. Для аналитического и численного исследования таких движений используется регуляризация уравнений движения и сформулирована гипотеза о несуществовании аналитических интегралов. Частным случаем этой гипотезы является восходящая к Риману задача о неинтегрируемости геодезического потока на простейшей двумерной кубической поверхности в  $\mathbb{R}^3$  (кубика, в отличие от квадрик — квадратных поверхностей).

Во второй части работы рассматриваются вопросы динамики газового облака с эллипсоидальной стратификацией. Отметим, что наиболее полный обзор первоначальных результатов, касающихся равновесия и устойчивости масс сжимаемой жидкости (газа), содержится в фундаментальном труде Джинса, удостоенного, кстати, премии Адамса; в этой работе рассматриваются также возможные приложения этих исследований в космогонии. Отметим, что самая элементарная постановка о фигурах равновесия, отличная от классической несжимаемой модели, восходит к Рошу [81] (см. [58], с. 147), выдвинувшему на ее базе космогоническую теорию, обобщающую гипотезу Лапласа. В этой постановке (модель Роша по Джинсу [58]) предполагается, что имеется гравитирующий ньютоновский



центр, определенный невесомой атмосферой (внутри нее мы пренебрегаем самогравитацией). Здесь мы в единой форме представляем результаты Овсянникова, Дайсона, Линден-Белла, Зельдовича, Фуджимото и др. При определенных термодинамических допущениях выведены различные формы уравнений движения газового облака. Также обсуждаются вопросы лагранжева-гамильтонова формализма. Формулируется обобщенный закон взаимности Дедекинда. Получен аналог уравнения Римана на случай сжимаемой жидкости или газа. Подробно проанализирован частный случай расширения эллипсоидального облака идеального одноатомного газа в отсутствии гравитации. Этот случай недавно был рассмотрен Гаффэ, который указал новые интегралы этой системы. Авторами уточнены результаты Гаффэ, что позволило указать интегрируемость по Лиувиллю в расширенном пространстве (у Гаффэ найдены интегралы приведенной системы, получающиеся при редукции с использованием неавтономного интеграла типа Якоби). В частности, установлена инволютивность всех интегралов Гаффэ. Указана аналогия между общей системой, рассматриваемой Гаффэ, и обобщенной системой Эйлера–Калоджеро. Обсуждается вопрос о представлении Лакса в этом случае.

В заключение приведены новые частные решения, в случае или отсутствия гравитации обладающие осевой симметрией. В случае отсутствия гравитации система сведена к квадратурам при произвольных начальных условиях. При наличии гравитации указаны хаотические движения, что связано с неинтегрируемостью этой системы. Указаны также хаотические движения для более общих ситуаций колебаний трехосного газового эллипсоида.

## I. Динамика жидкого самогравитирующегося эллипса

### 1. Введение

Исследование Л. Дирихле по динамике жидкого самогравитирующегося эллипса относится к 1856–1857 гг. Об этих исследованиях Дирихле было доложено в его лекциях в 1857 г. и одновременно в Докладах Гёттингенского математического общества в виде краткого сообщения [35]. К сожалению, он не успел оформить и публиковать свои результаты в развернутой форме (из-за болезни и преждевременной смерти в 1859 г.). Эти исследования были подготовлены к печати и посмертно изданы Дедекином в 1861 г. [36].

В работе Дирихле можно выделить три основных результата:

1. Указано новое частное решение уравнений гидродинамики, описывающее движение однородного самогравитирующегося эллипса, и выведены уравнения движения (частиц жидкости) в неподвижных осях.
2. Найдены семь первых интегралов полученных уравнений, из которых шесть линейных по скоростям интегралов соответствуют законам сохранения завихренности и полного момента, а седьмой интеграл — полная энергия движущейся жидкости.
3. Проинтегрирован в квадратурах случай движения осесимметричного эллипса, включающий в качестве частных решений сфероиды Ньютона и Маклорена (в этом случае Дирихле анализирует также возможность существования найденных решений при отсутствии внешнего давления, т. е. в вакууме).

Интересно отметить, что Дирихле указал интегралы, отвечающие сохранению вектора завихренности, до публикации известной работы Гельмгольца 1858 г. [52]. Судя по форме записанных интегралов, Дирихле знал (до Гельмгольца) о сохранении завихренности не

только для частного решения, но и для общих уравнений гидродинамики (об этом свидетельствует также заметка Дирихле [35]). Кстати говоря, это обстоятельство было указано Клейном в его известных лекциях [6].

При подготовке к печати результатов Дирихле Дедекинд обнаружил закон взаимности, согласно которому каждому решению уравнений Дирихле соответствует взаимное решение, в котором меняются местами переменные, описывающие вращение эллипсоида и движение жидкости внутри него, и, в частности, указал решение (эллипсоид Дедекинда), взаимный эллипсоид Якоби, для которого оси координат неподвижны в пространстве, а жидкость совершает движение внутри этой неизменной области [34].

Огромный вклад в исследование динамики жидкого эллипса внесла замечательная работа Римана [78], вышедшая в 1861 г. практически сразу после публикации исследований Дирихле. Основные результаты этой работы вкратце можно сформулировать следующим образом:

1. Получены уравнения движения в подвижных осях (главных осях эллипса), тем самым понижен порядок системы и выполнена редукция по линейным интегралам. Кроме того, Риман представил уравнения движения редуцированной системы в гамильтоновой форме с линейной скобкой Ли–Пуассона (сам Риман назвал это приведением к более легко обозримому виду).

2. Указаны все частные решения, соответствующие движению эллипса без изменения формы, и исследованы условия их существования (т. е. возможные величины главных полуосей). Для всех этих решений эллипс вращается вокруг оси, неподвижной в пространстве. Среди них оказались все известные к тому времени решения Ньютона, Маклорена, Якоби и Дедекинда (для которых ось вращения совпадает с одной из главных осей), а также новые решения (эллипсы Римана), для которых ось вращения лежит в одной из главных плоскостей эллипса.

3. Используя в качестве функции Ляпунова (в современной терминологии) интеграл энергии системы, Риман исследовал устойчивость движений с сохранением формы (в классе движений, сохраняющих эллипсоидальность), при этом указал границы устойчивости (по Ляпунову) для сфeroидов Маклорена и эллипсов Якоби.

4. Указан частный случай, при котором трехосный эллипс вращается (неравномерно) вокруг одной из главных осей, а его полуоси меняются со временем. При этом получается (гамильтонова) система с двумя степенями свободы, для которой Риман заметил аналогию с движением материальной точки на двумерной поверхности вида  $xyz = \text{const}$  в потенциальном поле сил (именно этот случай мы рассмотрим ниже подробно).

По своим результатам и возможностям дальнейших обобщений работа Римана совершенно уникальна и намного опередила свое время.

Известна еще относящаяся к 1861 г. работа Бриоши [27], посвященная понижению порядка в уравнениях Дирихле, при этом используется разложение движения на потенциальную и вихревую составляющие. Однако эта работа не содержит существенного продвижения вопроса.

Кирхгоф в своих лекциях по механике (1876 г.) [60] также рассматривает движение жидкоких самогравитирующих эллипсов. Он отмечает, что принцип Даламбера применим к движению Дирихле (но не использует его для вывода уравнения движения). Кирхгоф приводит квадратуру для осесимметричного случая и отдельно разбирает случай, когда эллипс сохраняет направление своих осей в пространстве (частный случай движения, указанного Риманом); Кирхгоф делает предположение (вслед за Риманом), что эта задача также не интегрируется в квадратурах.



Возможность применения вариационного принципа для вывода уравнений движения жидкого эллипсоида была независимо показана Падовой<sup>1</sup> (1871) [74] и Липшицем (1874) [66]. В работе последнего [66] также была поставлена и проинтегрирована в квадратурах задача о движении эллиптического цилиндра.

Бетти [24] также использовал вариационный принцип для вывода уравнений жидкого эллипса и представил эти уравнения в лагранжевой и гамильтоновой форме. Но, как отметил Тедоне в своем обширном обзоре [90], в своей работе Бетти допустил ошибку, применяя вариационный принцип к выводу уравнения движения неоднородного эллипсоида с эллипсоидальной стратификацией плотности жидкости. В этом случае уравнения гидродинамики стратифицированного самогравитирующегося эллипсоида не допускают решения с линейной зависимостью от начальных координат, которое рассматривал Бетти (вследствие сложной зависимости гравитационного потенциала внутри стратифицированного эллипсоида). Тем не менее для постоянной плотности все результаты Бетти остаются справедливыми. Бетти также представил уравнения движения в гамильтоновой форме (явно используя скобки Пуассона на алгебре  $so(3)$ ) с линейной скобкой Пуассона и выполнил редукцию по линейным интегралам.

Вышеперечисленные результаты составляют ключевые достижения классического периода исследований динамики эллипсоидов Дирихле.

Общие вопросы динамики и статики жидкых эллипсоидов, включая вопросы устойчивости, изучались в классических трактатах Бассе [20], Ламба [61], Томсона и Тета [91], Рауса [86], книгах Аппеля [19], Литтлтона [70], отдельных работах Бассе [21–23], Дюгема [37], Хагена [51], Хикса [53], Хилла [54], Лава [67, 68] и др. Отметим также следующие родственные вопросы, составляющие отдельные направления исследований в этой области.

1) Изучение фигур равновесия, ответвляющихся от эллипсоидов, например, грушевидных фигур, а также исследование их устойчивости (Ляпунов [10, 11], Пуанкаре [76, 77], Дарвин [33], Джинс [58], Сретенский [15]). Как известно, обширный анализ этой задачи привел Ляпунова к созданию общей теории устойчивости движения, носящей его имя. Результаты по устойчивости фигур равновесия содержатся также в классических работах Гизена [49], Брайана [28], Лиувилля [65]. В этом обзоре мы не касаемся теории устойчивости, где до сих пор остается много открытых проблем.

2) Фигуры равновесия неоднородной, но специальным образом стратифицированной жидкости. Вершиной теоретического анализа здесь является посмертная работа Ляпунова [11] (опубликованная Стекловым), которая до сих пор мало изучена. Эти исследования тесно связаны с теорией потенциала стратифицированных жидкостей (см. Дайсон [38], Феррерс [42], Вольтерра [93]). В работе [93], как и в работах Ляпунова по этому вопросу (с более современной позиции функционального анализа результаты Ляпунова представлены в книге Лихтенштейна [64]) возникают интегральные уравнения, которые в дальнейшем изучались в рамках функционального анализа. В связи с этим вопросом упомянем значительную, но практически забытую работу Вероне [92], книгу Пицетти [75], а также ряд современных работ [31, 32, 73] и [56] (последние работы вообще не содержат ссылок на классические результаты и очень дискуссионны). Новый период, связанный с астрофизическими исследованиями, связан с работами Чандraseкара и его школы (см., например [30, 62, 63]).

3) Во многих задачах, восходящих к классическим опытам Плато и модели атома Бора–Уилера [26], вместо ньютоновского притяжения рассматриваются силы поверхностного натяжения. Для изучения этого вопроса можно рекомендовать книги Аппеля [19] и Чандра-

<sup>1</sup>Другой вариант транслитерации — Падуя (Padova).

секхара [30], но стоит подчеркнуть, что излагаемая в них теория существенно менее продвинута (см. также [50, 82, 83], где дана Паде-аппроксимация потенциала поверхности натяжения). По крайней мере, нам неизвестны результаты по динамике жидкоких (масс) капель, подверженных силам поверхностного натяжения. Вопросы влияния вязкости на динамику задачи Дирихле–Римана обсуждаются, например, в [16]. Первоначальные компьютерные исследования самогравитирующих неэллипсоидальных фигур имеются, например, в [40]. 4) Укажем на интересную работу Нарликара и Лармора (1933) [72], где, видимо, впервые классические результаты (Маклорена, Якоби, Дирихле, Пуанкаре и др.) пересмотрены не в связи с эволюцией планет, а с проблемами звездной динамики. Авторами предполагалась диссиляция энергии в процессе звездной эволюции. В дальнейшем это направление получило развитие в работах Чандрасекхара.

## 2. Уравнения Дирихле и Римана

### 2.1. Уравнения Дирихле

Напомним основные этапы вывода уравнений Дирихле и Римана и представим их в современной матричной форме.

Уравнения динамики однородной несжимаемой идеальной жидкости единичной плотности в форме Лагранжа для случая, когда силы, действующие на жидкость, потенциальны, имеют вид

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \ddot{\mathbf{x}} = - \frac{\partial(U + p)}{\partial \mathbf{a}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  — начальные положения материальных точек среды (так называемые лагранжевы координаты),  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  — координаты точек среды в момент времени  $t$  (т. е.  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}$ ),  $U(\mathbf{a}, t)$  — плотность потенциальной энергии внешних сил,  $p(\mathbf{a}, t)$  — давление,  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right\|$  — матрица, составленная из частных производных. Эти уравнения необходимо дополнить условием несжимаемости, которое в данном случае записывается в форме

$$\det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right) = 1. \quad (2)$$

Таким образом, получаем систему уравнений в частных производных, где неизвестными являются четыре величины  $x_1, x_2, x_3, p$  как функции переменных  $\mathbf{a}, t$ . Для их определения помимо начальных условий ( $\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}, \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{a})$ ) необходимо также задать граничные условия, которые в нашем случае сводятся к тому, что всюду на свободной поверхности давление имеет одно и то же значение, не зависящее от  $\mathbf{a}$ .

Дирихле заметил, что если потенциал внешних сил  $U(\mathbf{a}, t)$  является однородной квадратичной функцией лагранжевых координат, т. е.

$$U(\mathbf{a}, t) = U_0(t) + (\mathbf{a}, \mathbf{V}(t)\mathbf{a}), \quad (3)$$

где  $U_0(t)$  не зависит от  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{V}(t)$  — симметрическая матрица, то уравнения движения (1), (2) допускают частное решение

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{a}, \quad \det \mathbf{F}(t) = 1. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{F}(t)$  — 3x3 матрица.



При этом, чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо, чтобы в начальный момент времени жидкость имела форму эллипсоида

$$(\mathbf{a}, \mathbf{A}_0^{-2}\mathbf{a}) \leq 1, \quad (5)$$

где  $\mathbf{A}_0 = \text{diag}(A_1^0, A_2^0, A_3^0)$  — матрица начальных полуосей, а давление имеет вид

$$p(\mathbf{a}, t) = p_0(t) + \sigma(t)(1 - (\mathbf{a}, \mathbf{A}_0^{-2}\mathbf{a})). \quad (6)$$

Подставляя (3), (4), (6) в (1), (2), находим уравнения для матрицы  $\mathbf{F}(t)$  и функции  $\sigma(t)$  в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \ddot{\mathbf{F}} &= -2\mathbf{V} - 2\sigma \mathbf{A}_0^{-2}, & (\text{уравнения Дирихле}) \\ \det \mathbf{F} &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Как показал Дирихле, система десяти уравнений (7) для десяти неизвестных функций  $F_{ij}(t), \sigma(t)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  является совместной.

Очевидно, что под действием преобразования (4) первоначальный эллипсоид (5) перейдет в эллипсоид, определяемый квадратичной формой вида

$$(\mathbf{x}, (\mathbf{F}\mathbf{A}_0^2\mathbf{F}^T)^{-1}\mathbf{x}) \leq 1. \quad (8)$$

## 2.2. Уравнения Римана

Прежде чем записать явное выражение для потенциала (3) и, соответственно, правой части уравнений (7), покажем, каким образом уравнения движения записываются в форме Римана. Для этого перейдем в подвижную систему главных осей эллипсоида. Такое преобразование, как известно, задается ортогональной матрицей

$$\zeta = \mathbf{Q}\mathbf{x}, \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \quad (9)$$

В новых координатах  $\zeta$  эллипсоид определяется соотношением

$$(\zeta, \mathbf{A}^{-2}\zeta) \leq 1, \quad (10)$$

где  $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  — матрица главных полуосей в данный момент времени.

Заметим также, что вследствие линейности преобразования (4) частицы жидкости все время движутся по эллипсоидам, для которых

$$(\zeta, \mathbf{A}^{-2}\zeta) = (\mathbf{a}, \mathbf{A}_0^{-2}\mathbf{a}) = n^2 = \text{const}, \quad 0 \leq n^2 < 1. \quad (11)$$

(В частности, частицы жидкости, бывшие на границе в начальный момент времени, остаются на границе во все моменты времени). Откуда следует, что модуль вектора  $\mathbf{A}^{-1}\zeta$  не меняется, поэтому векторы  $\mathbf{A}^{-1}\zeta$  и  $\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{a}$  также связаны ортогональным преобразованием

$$\mathbf{A}^{-1}\zeta = \Theta \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{a}, \quad \Theta^T = \Theta^{-1}. \quad (12)$$

Тем самым получаем разложение матрицы  $\mathbf{F}$  следующего вида:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \Theta \mathbf{A}_0^{-1}. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Умножая на постоянную матрицу  $\mathbf{A}_0$ , получаем разложение вида

$$\mathbf{F}\mathbf{A}_0 = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \Theta, \quad (14)$$

известное из линейной алгебры как сингулярное разложение [41].

Введем угловые скорости, соответствующие ортогональным преобразованиям,

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\Theta}\Theta^T, \quad (15)$$

которые, как известно, являются кососимметрическими матрицами [3]. Подставляя (15) в уравнения (7), получим уравнения Римана, которые в матричной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{wv} + \mathbf{v}\boldsymbol{\omega} &= -2\hat{\mathbf{V}}\mathbf{A} + 2\sigma\mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{wA} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}, \\ A_1 A_2 A_3 &= 1, \end{aligned} \quad (\text{уравнения Римана}) \quad (16)$$

где  $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A}^{-1}\Theta\mathbf{A}_0\mathbf{V}\mathbf{A}_0\Theta^T\mathbf{A}^{-1}$ .

Дополнив эту систему уравнениями для эволюции матриц  $\mathbf{Q}, \Theta$ ,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{w}\mathbf{Q}, \quad \dot{\Theta} = \boldsymbol{\omega}\Theta, \quad (17)$$

получим полную систему уравнений движения, описывающих динамику жидкого эллипсоида.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Для произвольной матрицы  $\mathbf{G} \in GL(3)$  с различными собственными значениями разложение  $\mathbf{G} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\Theta$ , где  $\mathbf{Q}, \Theta \in SO(3)$ ,  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $a_1 > a_2 > a_3$  — не единственно. Действительно, матрицы  $\mathbf{Q}, \Theta$  допускают дискретные преобразования вида [41]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &= \mathbf{QR}_i, \quad \Theta' = \Theta\mathbf{R}_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{E}, \quad \mathbf{R}_1 = \text{diag}(1, -1, -1), \quad \mathbf{R}_2 = \text{diag}(-1, 1, -1), \quad \mathbf{R}_3 = \text{diag}(-1, -1, 1). \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, пространство  $\mathbb{R}^2 \otimes SO(3) \otimes SO(3)$  (которое диффеоморфно конфигурационному пространству системы Римана) является четырехлистным накрытием реального конфигурационного пространства  $SL(3)$ . Аналогичный прием используется при кватернионной записи уравнений твердого тела [3].

### 2.3. Гравитационный потенциал

Определим теперь правые части уравнений (7) и (17). Воспользуемся известным представлением гравитационного потенциала для внутренних точек эллипса в системе главных осей

$$U(\zeta) = -\frac{3}{4}mG \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left( 1 - \sum_i \frac{\zeta_i^2}{A_i^2 + \lambda} \right), \quad \Delta^2(\lambda) = \prod_i (A_i^2 + \lambda), \quad (19)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m = \frac{4}{3}\pi\rho A_1 A_2 A_3$  — масса эллипса.

Теперь нам необходимо представить (19) через элементы матрицы преобразования  $\mathbf{F}$  и в лагранжевых координатах  $\mathbf{a}$ . Используя (13), находим  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{A}_0\Theta^T$ , откуда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{AA}^T = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{A}_0^2\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T, \\ \Delta^2(\lambda) &= \det(\mathbf{A}^2 + \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{F}\mathbf{A}_0^2\mathbf{F}^T + \lambda\mathbf{E}), \\ \sum_i \frac{\zeta_i^2}{A_i^2 + \lambda} &= (\zeta, (\mathbf{A}^2 + \lambda\mathbf{E})^{-1}\zeta) = (\mathbf{a}, \mathbf{F}^T(\mathbf{F}\mathbf{A}_0^2\mathbf{F}^T + \lambda\mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (20)$$



Таким образом, для матрицы  $\mathbf{V}$  в уравнениях Дирихле получим представление вида

$$\mathbf{V} = \varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{F}\mathbf{A}_0^2\mathbf{F}^T + \lambda\mathbf{E})}} \mathbf{F}^T (\mathbf{F}\mathbf{A}_0^2\mathbf{F}^T + \lambda\mathbf{E})^{-1} \mathbf{F}, \quad \varepsilon = \frac{3}{4}mG, \quad (21)$$

причем, как можно показать прямыми вычислениями (см. [36]),  $\mathbf{V}$  зависит от элементов матрицы  $\mathbf{F}$  только посредством симметричных комбинаций вида  $\Phi_{ij} = \sum_k F_{ik}F_{jk}$ , представляющих собой скалярные произведения столбцов матрицы  $\mathbf{F}$ .

Пользуясь соотношением  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \zeta} = \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{A}^{-1}$ , несложно показать, что в уравнениях Римана  $\hat{\mathbf{V}} = \text{diag}(\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3)$ , где

$$\hat{V}_i = \varepsilon \int_0^\infty \frac{1}{\lambda + A_i^2} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial A_i} \varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}. \quad (22)$$

#### 2.4. Задача Роша

В соответствии с терминологией Джинса [58] (см. также [30, 33]) мы называем задачей Роша задачу о взаимодействии деформируемого тела (спутника) и сферического твердого тела, движущихся по круговым кеплеровским орбитам. Действительно, в работе [80] Рош рассматривал движение жидкой массы под действием гравитирующего центра (в этой работе возникли известные зоны Роша). Более общая постановка задачи, при которой второе тело не обладает сферической симметрией (т. е., изучается движение двух произвольных тел, центры масс которых движутся по круговым орбитам) называется задачей Дарвина [33].

Пусть жидкая самогравитирующая масса движется в поле сферически симметричного твердого тела, причем оба тела вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Выберем (подвижную) систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в центре масс эллипсоида, ось  $Ox_1$  выберем в направлении общего центра, а ось  $Ox_3$  — перпендикулярно плоскости вращения (см. рис. 1).

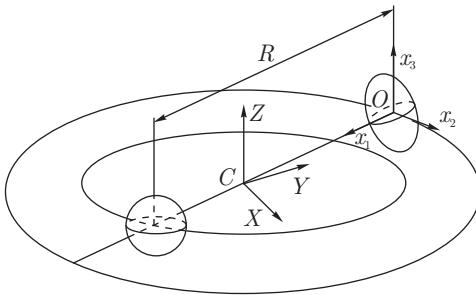


Рис. 1

Уравнения движения несжимаемой жидкости в форме Лагранжа в данном случае записываются в виде

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^T (\ddot{\mathbf{x}} + 2\omega e_3 \times \dot{\mathbf{x}}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left( p + U + U_s - \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \omega^2 \frac{m_s}{m_e + m_s} Rx_1 \right), \quad (23)$$

$$\det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right) = 1, \quad (24)$$

где, как и выше,  $\mathbf{a}$  — лагранжевы координаты элементов жидкости,  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  — их положения в данный момент,  $p(\mathbf{a}, t)$  — давление,  $R$  — расстояние между центрами масс тел,  $m_e, m_s$  — массы эллипсоида и сферы соответственно,  $\omega$  — угловая скорость вращения систем вокруг общего центра масс,  $U$  — гравитационный потенциал (19). Гравитационный потенциал сферического тела  $U_s$  имеет вид

$$U_s = -\frac{m_s G}{\sqrt{(x_1 - R)^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{m_s G}{R} \left( 1 + \frac{x_1}{R} + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + \dots \right),$$

где  $G$  — гравитационная постоянная.

Опуская слагаемые более высокого порядка по  $\frac{|\mathbf{x}|}{R}$  и используя известное соотношение для круговой кеплеровской орбиты  $R^3\omega^2 = G(m_e + m_s)$ , окончательно (после приведения подобных) получим

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^T (\ddot{\mathbf{x}} + 2\omega \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{x}}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left( p + U - \frac{1}{2}\omega^2(\mathbf{x}, \mathbf{Bx}) \right), \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right) = 1, \quad (25)$$

где  $\mathbf{B} = \text{diag} \left( \frac{3m_s + m_e}{m_e + m_s}, \frac{m_e}{m_e + m_s}, -\frac{m_s}{m_e + m_s} \right)$ . В предельном случае неподвижного ньютона-новского центра  $\left( \frac{m_e}{m_s} \rightarrow 0 \right)$  получим  $\mathbf{B} = \text{diag}(3, 0, -1)$ .

Подставляя (4) и (6) в это уравнение, получим уравнения движения в задаче Рюша в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T (\ddot{\mathbf{F}} + 2\Omega \dot{\mathbf{F}}) &= -2\mathbf{V} + 2\sigma \mathbf{A}_0^{-2} + \omega^2 \mathbf{F}^T \mathbf{BF}, \\ \det \mathbf{F} &= 1, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\Omega = \| -\omega \varepsilon_{ijk} \|$  — матрица угловой скорости вращения.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Уравнения (25) приводятся в книге Чандрасекхара, который применяет их лишь для нахождения гидростатических равновесных конфигураций жидкоких масс и исследования их устойчивости. Динамические уравнения (26) Чандрасекхар не приводит.

Ясно, что уравнения (26) могут быть также записаны в форме Римана

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{wv} - \mathbf{vw} + 2\bar{\Omega}\mathbf{v} &= -2\hat{\mathbf{V}}\mathbf{A} + 2\sigma\mathbf{A}^{-1} + \omega^2 \mathbf{ABA}, \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{wA} + \mathbf{Aw}, \\ A_1 A_2 A_3 &= 1, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\bar{\Omega} = \mathbf{Q}\Omega\mathbf{Q}^T$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{QBQ}^T$  — матрицы, преобразованные к главным осям эллипсоида. Как и выше, нужно добавить уравнения (17).

Отметим, что в данном случае уравнения (27) не образуют замкнутую систему (в отличие от уравнений Римана) — система замыкается только после добавления уравнений (17) для эволюции матрицы  $\mathbf{Q}$ .

### 3. Первые интегралы

Вернемся к первоначальной задаче Дирихле–Римана о динамике самогравитирующегося эллипсоида. Линейные по скоростям первые интегралы уравнений могут быть получены из законов сохранения завихренности и момента импульса (закон площадей).



### 3.1. Завихренность

Записывая закон сохранения завихренности для уравнений гидродинамики в лагранжевой форме (1), получим

$$\sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_l} - \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_k} \right) = \xi_{kl} = \text{const}, \quad (28)$$

причем выполнено  $\xi_{kl} = -\xi_{lk}$ . Обозначая кососимметрическую матрицу  $\boldsymbol{\Xi} = \|\xi_{kl}\|$ , для уравнений Дирихле (7) находим

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} = \text{const}. \quad (29)$$

В переменных Римана получим

$$\boldsymbol{\Xi}' = \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Xi} \mathbf{A}_0 = \boldsymbol{\Theta}^T (\mathbf{A}^2 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{A}^2 - 2 \mathbf{A} \mathbf{w} \mathbf{A}) \boldsymbol{\Theta} = \text{const}. \quad (30)$$

Непосредственное доказательство сохранения завихренности  $\boldsymbol{\Xi}$  с помощью уравнений Дирихле (7) очевидно (т. к. правая часть симметричная матрица).

Как уже было отмечено, сохранение завихренности в этой задаче было указано Дирихле еще до появления классической работы Гельмгольца, где этот закон распространен на всю гидродинамику идеальной жидкости.

### 3.2. Момент

Момент импульса относительно центра эллипсоида можно представить в форме

$$M_{ij} = \int (x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i) d^3 x = \frac{m}{5} \sum_k (F_{ik} \dot{F}_{jk} - F_{jk} \dot{F}_{ik}) (A_k^0)^2. \quad (31)$$

В матричной форме, опуская несущественный множитель, запишем

$$\mathbf{M}' = \mathbf{F} \mathbf{A}_0^2 \dot{\mathbf{F}}^T - \dot{\mathbf{F}} \mathbf{A}_0^2 \mathbf{F}^T = \text{const}, \quad (32)$$

где  $\mathbf{M}' = \|\frac{5}{m} M_{ij}\|$ . И аналогично в переменных Римана имеем

$$\mathbf{M}' = \mathbf{Q}^T (\mathbf{A}^2 \mathbf{w} + \mathbf{w} \mathbf{A}^2 - 2 \mathbf{A} \boldsymbol{\omega} \mathbf{A}) \mathbf{Q} = \text{const}. \quad (33)$$

Для доказательства постоянства момента  $\mathbf{M}$  удобно использовать уравнения Римана (16) (вычисления при этом также очевидные).

### 3.3. Энергия

Помимо линейных интегралов, уравнения движения допускают еще один квадратичный интеграл — полную энергию системы. Интегрируя кинетическую и потенциальную энергию частиц жидкости по объему эллипсоида, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{m}{5} (T_e + U_e), \\ T_e &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{A}_0^2 \dot{\mathbf{F}}^T) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathbf{A}}^2 - \mathbf{w}^2 \mathbf{A}^2 - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{A}^2 + 2 \mathbf{A} \mathbf{w} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}), \\ U_e &= -2\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda + A_1^2)(\lambda + A_2^2)(\lambda + A_3^2)}}. \end{aligned} \quad (34)$$

## 4. Лагранжев и гамильтонов формализм

### 4.1. Принцип Гамильтона и лагранжев формализм

Как известно (см., например, [60]), движение идеальной жидкости удовлетворяет принципу Гамильтона, следовательно, решение Дирихле также удовлетворяет этому принципу. Это позволяет представить уравнения движения в лагранжевой, а впоследствии и в гамильтоновой форме. Для рассматриваемой задачи принцип Гамильтона впервые был использован Липшицем [66] и Падовой [74].

В качестве функции Лагранжа необходимо выбрать разность кинетической и потенциальной энергии жидкости в эллипсоиде; с точностью до несущественного множителя имеем

$$L = T_e - U_e, \quad (35)$$

где  $T_e, U_e$  определены выше (34). В качестве обобщенных координат выступают элементы матрицы  $\mathbf{F}$ . Запишем уравнения Лагранжа–Эйлера с учетом связи  $\det \mathbf{F} = 1$ , получим

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{F}}} \right)^. - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{F}} = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{F}}, \quad (36)$$

где  $\varphi = \det \mathbf{F}$ , и для всякой функции используем матричные обозначения  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} = \left\| \frac{\partial f}{\partial F_{ij}} \right\|$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{F}}} = \left\| \frac{\partial f}{\partial \dot{F}_{ij}} \right\|$ ,  $\kappa$  — неопределенный множитель Лагранжа. Дифференцируя с учетом формулы  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = \varphi \mathbf{F}^{-1}$ , получим

$$\ddot{\mathbf{A}}_0^2 = 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{F}\mathbf{A}_0^2 \mathbf{F}^T + \lambda \mathbf{E})}} + \kappa (\mathbf{F}^{-1})^T \det \mathbf{F}. \quad (37)$$

Несложно убедиться, что эти уравнения совпадают с уравнениями Дирихле (7), если положить  $\kappa = 2\sigma$ .

В функцию Лагранжа и уравнения движения системы входит в качестве параметров матрица начальных полуосей  $\mathbf{A}_0$ . Очевидно, что эти «параметры» можно перенести в начальные условия; действительно, после замены  $\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{A}_0$  (предложенной Дедекином [34]) функция Лагранжа и уравнение связи запишутся в виде

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{G}}^T) + 2\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{G}\mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{E})}}, \quad \varphi = \det \mathbf{G} = \det \mathbf{A}_0 = \text{const.} \quad (38)$$

Начальные условия, очевидно, имеют вид  $\mathbf{G}|_{t=0} = \mathbf{A}_0$ , и уравнение движения сохраняет свою форму  $\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{G}}} \right)^. - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{G}} = \tilde{\mathcal{H}} \frac{\partial \varphi}{\partial G}$ .

Можно также показать, что заменой вида

$$\mathbf{G} \rightarrow (\det \mathbf{A}_0)^{1/3} \mathbf{G}, \quad t \rightarrow \frac{(\det \mathbf{A}_0)^{1/3}}{2\varepsilon} t$$

система (38) приводится к случаю  $\varepsilon = 1/2, \varphi = 1$ . Таким образом, динамика жидкого самогравитирующего эллипсоида описывается натуральной лагранжевой системой без параметров на группе  $SL(3)$ .

Первые интегралы — завихренность (30), момент (32) и энергия (34) представляются в форме

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi} &= \mathbf{G}^T \dot{\mathbf{G}} - \dot{\mathbf{G}}^T \mathbf{G}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{G} \dot{\mathbf{G}}^T - \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^T, \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\dot{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{G}}^T) - 2\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{G} \mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{E})}}.\end{aligned}\quad (39)$$

При помощи разложения (13) Риман представил уравнения движения на конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}^2 \otimes SO(3) \otimes SO(3)$  (прямом произведении абелевой группы трансляций и двух экземпляров групп вращений трехмерного пространства), причем элементы матриц  $\mathbf{w}, \boldsymbol{\omega}$  соответствуют компонентам скорости в базисе левоинвариантных векторных полей. Уравнения движения принимают вид уравнений Пуанкаре на группе Ли [3]; учитывая, что функция Лагранжа (38) не зависит от элементов матриц  $\mathbf{Q}, \boldsymbol{\Theta}$ , и принимая во внимание связь  $\varphi = A_1 A_2 A_3 = \text{const}$ , получим представление уравнений Римана

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} \right)^\cdot &= \frac{\partial L}{\partial A_i} + \tilde{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial A_i}, \\ \left( \frac{\partial L}{\partial w_i} \right)^\cdot &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial L}{\partial w_j} w_k, \quad \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_i} \right)^\cdot = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial L}{\partial \omega_j} \omega_k.\end{aligned}\quad (40)$$

где  $\tilde{\kappa}$  — неопределенный множитель Лагранжа (с точностью до множителя совпадает с  $\sigma$ ),  $\varepsilon_{ijk}$  — антисимметричный тензор Леви–Чивита.

Здесь и далее компоненты  $w_i, \omega_i$  связаны с элементами кососимметричных матриц (15) по обычному правилу

$$w_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k, \quad \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k. \quad (41)$$

#### 4.2. Группа симметрии и закон взаимности Дедекинда

Лагранжево представление уравнений Дирихле (36) наиболее просто позволяет указать группу симметрий системы. Действительно, можно показать, что лагранжиан со связью (38) и, следовательно, уравнения движения инвариантны относительно преобразований вида

$$\mathbf{G}' = \mathbf{S}_1 \mathbf{G} \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in SO(3). \quad (42)$$

Таким образом, система инвариантна относительно группы  $\Gamma = SO(3) \otimes SO(3)$ .

Ясно, что нетеровскими интегралами, соответствующими преобразованиям (42), являются интегралы завихренности и полного момента (39). И, как будет показано ниже, уравнения Римана описывают систему, редуцированную по данной группе симметрий.

Кроме того, используя (38), несложно показать, что уравнения движения инвариантны относительно дискретного преобразования транспонирования матриц:

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G}^T.$$

Откуда следует

**Теорема 1 (закон взаимности Дедекинда).** *Всякому решению  $\mathbf{G}(t)$  уравнений Дирихле соответствует решение  $\mathbf{G}'(t) = \mathbf{G}^T(t)$ , для которого меняются местами вращение эллипсоида и вращение жидкости в эллипсоиде (т. е.  $\boldsymbol{\Theta}$  и  $\mathbf{Q}$ , см. (13)).*

Наиболее известный пример — это эллипсоид Дедекинда, взаимный эллипсоиду Якоби: в этом случае оси трехосного эллипсоида неизменны в пространстве, а жидкость в нем совершает движение вокруг малой оси по замкнутым эллипсам [34, 78].

### 4.3. Гамильтонов формализм и редукция по симметрии

Представим уравнения Римана в гамильтоновой форме. Для этого прежде всего, используя уравнение связи  $\varphi = \text{const}$ , выразим одну из полуосей

$$A_3 = \frac{v_0}{A_1 A_2} \quad (43)$$

где  $v_0$  — объем эллипсоида (с точностью до множителя). Выполним преобразование Лежандра

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i}, \quad m_k = \frac{\partial L}{\partial w_k}, \quad \mu_k = \frac{\partial L}{\partial \omega_k}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, \\ H &= \sum_i p_i \dot{A}_i + \sum_k (m_k w_k + \mu_k \omega_k) - L |_{\dot{A}, \omega, w \rightarrow p, m, \mu}. \end{aligned} \quad (44)$$

Используя выражения для интегралов (30), (33), можно показать, что векторы  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  и  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  связаны с моментом и завихренностью эллипсоида по формулам

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}', \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\xi}', \quad (45)$$

где векторы  $\mathbf{M}'$  и  $\boldsymbol{\xi}'$  образованы из компонент антисимметричных матриц  $\mathbf{M}'$ ,  $\boldsymbol{\Xi}'$  по обычному правилу (41). Уравнения движения в новых переменных приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial A_i}, \quad i = 1, 2, \\ \dot{\mathbf{m}} &= \mathbf{m} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}}, \quad \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \end{aligned} \quad (46)$$

где гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= H_A + H_{m\mu} + U_e, \\ H_A &= \frac{1}{2} \frac{A_3^{-2} (p_1^2 + p_2^2) + (p_1 A_2^{-1} - p_2 A_1^{-1})^2}{\sum A_i^{-2}}, \\ H_{m\mu} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{цикл}} \left( \frac{m_i + \mu_i}{A_j - A_k} \right)^2 + \left( \frac{m_i - \mu_i}{A_j + A_k} \right)^2, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $U_e$  — определено формулой (34), при этом предполагается, что  $A_3$  определено согласно (43).

Кроме того, уравнения (46) необходимо дополнить уравнениями, описывающими эволюцию матриц  $\mathbf{Q}$ ,  $\boldsymbol{\Theta}$  вида

$$\dot{Q}_{ij} = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} Q_{kj} \frac{\partial H}{\partial m_l}, \quad \dot{\Theta}_{ij} = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} \Theta_{kj} \frac{\partial H}{\partial \mu_l}. \quad (48)$$

Уравнения (46), (48) представляют гамильтонову систему с восемью степенями свободы с неканоническими скобками Пуассона:

$$\{A_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{\mu_i, \mu_j\} = \varepsilon_{ijk} \mu_k, \quad (49)$$

$$\{m_r, Q_{jk}\} = \varepsilon_{ikl} Q_{jl}, \quad \{\mu_i, \Theta_{jk}\} = \varepsilon_{ikl} \Theta_{jl}, \quad (50)$$

где опущены нулевые скобки.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Исключение одной из полуосей (43) приводит к потере симметричности гамильтониана (47), поэтому, как правило, уравнения для полуосей  $A_i$  оставляют в лагранжевой форме с неопределенным множителем [30, 78].

Из приведенных соотношений видно, что отделяется система уравнений (46), описывающая эволюцию переменных  $A_i, p_i, \mathbf{m}, \boldsymbol{\mu}$ , и при этом скобка Пуассона этих переменных (49) также оказывается замкнута. Несложно показать, что уравнения (46) описывают редуцированную по группе симметрий (42) систему.

Ограничение скобки (49) обладает двумя очевидными функциями Казимира

$$\Phi_m = (\mathbf{m}, \mathbf{m}), \quad \Phi_\mu = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \quad (51)$$

и имеет ранг восемь (при условии, что  $\Phi_m \neq 0, \Phi_\mu \neq 0$ ).

*То есть в общем случае редуцированная система имеет четыре степени свободы.*

В частных случаях, когда один из интегралов (51) равен нулю, редуцированная система имеет три степени свободы. Это так называемые безвихревые ( $\Phi_\mu = 0$ ) и безмоментные ( $\Phi_m = 0$ ) эллипсоиды.

*Если оба интеграла (51) обращаются в нуль, то редуцированная система имеет две степени свободы и описывает колебательные движения эллипсоида без изменения направления осей и без внутренних течений (ниже этот случай разобран подробно).*

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Впервые канонические переменные в уравнениях Римана были введены Бетти [24], который задолго до современной теории гамильтоновых систем на алгебрах Ли использовал коммутационные представления алгебры  $so(4)$ . Используя коммутацию, он вполне современным способом ввел канонические переменные для приведения интегрирования уравнений Римана к интегрированию уравнения Гамильтона–Якоби. Вопросы гамильтонова характера уравнений Римана рассматриваются также в современных работах [50, 83, 84]. Исследования авторов этих работ связаны с представлением уравнений движения на расширенной алгебре Ли, для которой реальные движения лежат на специальных орбитах; нам пока неясна ценность такого вычисления для динамики. Более формальная процедура редукции и гамильтонизации уравнений Римана, близкая к приводимым здесь исследованиям, имеется в статье [41]. Родственный анализ имеется в [55] в связи с рассмотрением движений Дирихле идеальной магнито-гидродинамики. В [25] имеется некоторый альтернативный подход к гамильтоновости, который также требует обсуждения.

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Линейное преобразование

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} + \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{m} - \boldsymbol{\mu}$$

приводит «угловую» часть  $H_{m\mu}$  гамильтониана (47) к диагональной форме

$$\begin{aligned} H_{m\mu} &= \frac{1}{4}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{L}) + \frac{1}{4}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\pi}), \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \text{diag} \left( \frac{1}{(A_2 - A_3)^2}, \frac{1}{(A_3 - A_1)^2}, \frac{1}{(A_1 - A_2)^2} \right), \\ \boldsymbol{\Pi} &= \text{diag} \left( \frac{1}{(A_2 + A_3)^2}, \frac{1}{(A_3 + A_1)^2}, \frac{1}{(A_1 + A_2)^2} \right), \end{aligned} \quad (52)$$

при этом скобки Пуассона преобразуются к виду

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijk} \pi_k, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

и соответствуют, как известно, алгебре  $so(4)$ . Соответствующие уравнения движения можно представить в матричной форме

$$\dot{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}, \boldsymbol{\Omega}], \quad (53)$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} 0 & L_3 & -L_2 & \pi_1 \\ -L_3 & 0 & L_1 & \pi_2 \\ L_2 & -L_1 & 0 & \pi_3 \\ -\pi_1 & -\pi_2 & -\pi_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial H}{\partial L_3} & -\frac{\partial H}{\partial L_2} & \frac{\partial H}{\partial \pi_1} \\ -\frac{\partial H}{\partial L_3} & 0 & \frac{\partial H}{\partial L_1} & \frac{\partial H}{\partial \pi_2} \\ \frac{\partial H}{\partial L_2} & -\frac{\partial H}{\partial L_1} & 0 & \frac{\partial H}{\partial \pi_3} \\ -\frac{\partial H}{\partial \pi_1} & -\frac{\partial H}{\partial \pi_2} & -\frac{\partial H}{\partial \pi_3} & 0 \end{vmatrix}, \quad (54)$$

а уравнения для  $A_i, p_i$  сохраняют прежний вид (46).

Уравнения (53) по форме совпадают с уравнениями движения свободного четырехмерного твердого тела. При этом в динамике твердого тела момент и угловая скорость связаны линейными соотношениями вида

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}), \quad (55)$$

где  $\mathbf{J}$  — постоянная симметрическая матрица — момент инерции тела в осях связанных с телом. Несложно показать, что матрицы (54) для задачи Дирихле–Римана не удовлетворяют соотношению (55) ни при какой матрице  $\mathbf{J}$ , т. е. аналогия с динамикой твердого тела в данном случае носит чисто формальный характер. Напомним, что для четырехмерного твердого тела матрицы  $\boldsymbol{\Lambda}$  и  $\boldsymbol{\Pi}$  имеют вид [3]

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3}, \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}, \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right), \quad \boldsymbol{\Pi} = \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1}, \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_2}, \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_3} \right).$$

Такая форма уравнений (53) была отмечена Дайсоном [39] для случая динамики сжимаемого эллипса (см. ниже).

## 5. Частные случаи движения

### 5.1. Движение эллипса с сохранением формы

Простейшие движения жидкоких эллипсоидов — это семейство решений, для которых все три оси эллипса не меняются с течением времени

$$A_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (56)$$

Ясно, что эллипсы Маклорена и Якоби являются примерами таких движений. В этом случае эллипс вращается как твердое тело вокруг главной оси (в случае Маклорена — это ось симметрии, а в случае Якоби — наименьшая ось).

Эллипс Дедекинда — еще один пример таких движений, при этом оси неизменны как по величине, так и по направлению. Как отмечалось выше, эллипс Дедекинда взаимен в смысле теоремы 1 эллипсу Якоби (эллипс Маклорена взаимен сам себе).

Для всех вышеуказанных решений (эллипсы Маклорена, Якоби, Дедекинда) две пары компонент векторов  $\mathbf{m}, \boldsymbol{\mu}$  обращаются в нуль, а оставшиеся постоянны (например, без ограничения общности можно полагать  $m_1 = \mu_1 = m_2 = \mu_2 = 0, m_3 = \text{const}, \mu_3 = \text{const}$ ).

В работе Римана [78] доказан более общий результат:

**Теорема 2.** Пусть выполнено (56) и все  $A_i$  различны, тогда  $\mathbf{m}, \boldsymbol{\mu}$  не зависят от времени и по крайней мере одна пара компонент этих векторов обращается в нуль (т. е.  $m_i = \mu_i = 0$  для некоторого  $i$ ).

Как следствие, получаем, что любое движение жидкого эллипсоида с несовпадающими осями, для которого сохраняется форма, является неподвижной точкой редуцированной системы (46) или, что то же самое, уравнений Римана (27). Другое доказательство этого результата, было дано в работе [74].

Риман также указал новые решения — эллипсоиды Римана — при условии, что только пара компонент  $\mathbf{m}, \boldsymbol{\mu}$  обращается в нуль (т. е.  $m_1 = \mu_1 = 0, m_2, m_3, \mu_2, \mu_3 \neq 0$ ).

Б. А. Стеклов [88,89] подробно проанализировал случай равенства пары осей ( $A_i = A_j \neq A_k$ ) и показал, что в этом случае не существует движений с сохранением формы, отличных от эллипсоидов (сфериоидов) Маклорена. В этом смысле он обобщил результат Римана на осесимметричный случай (сам Риман не дал в этом случае подробного доказательства). В работе [71] сделана попытка пересмотреть результаты Римана.

## 5.2. Осесимметричный случай (Дирихле [36])

Несложно показать, что уравнения движения, определяемые функцией Лагранжа (38), допускают (двумерное) инвариантное многообразие, состоящее из матриц вида

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ -v & u & 0 \\ 0 & 0 & w \end{vmatrix},$$

где  $\det \mathbf{G} = (u^2 + v^2)w = v_0 = \text{const}$  — объем эллипсоида. Это многообразие соответствует осесимметричному движению жидкого эллипсоида (см. [36]). При этом матрица главных полуосей имеет вид

$$\mathbf{A} = (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{u^2 + v^2}, \sqrt{u^2 + v^2}, w).$$

С учетом условия  $\det \mathbf{G} = v_0$  сделаем замену переменных следующего вида

$$u = v_0^{1/3} r \cos \psi, \quad v = v_0^{1/3} r \sin \psi, \quad w = \frac{v_0^{1/3}}{r^2},$$

для функции Лагранжа (38) получим

$$L = v_0^{2/3} \left( \left( 1 + \frac{2}{r^6} \right) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 + U_s \right),$$

где

$$U_s = -\frac{2\varepsilon}{v_0} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda + r^2)\sqrt{\lambda + 1/r^4}} = -\frac{2\varepsilon}{v_0} r^2 \times \begin{cases} \frac{2\arctg \sqrt{r^6 - 1}}{\sqrt{r^6 - 1}}, & r > 1, \\ \frac{\ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - r^6}}{1 - \sqrt{1 - r^6}} \right)}{\sqrt{1 - r^6}}, & r < 1. \end{cases}$$

Переменная  $\psi$  является циклической, следовательно, имеем первый интеграл вида

$$p_\psi = \frac{1}{v_0^{2/3}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 2r^2 \dot{\psi},$$

который с точностью до множителя совпадает с единственной ненулевой компонентой момента  $M'_{12}$  (32). Используя интеграл энергии (34), получим квадратуру, определяющую эволюцию  $r$ :

$$\left(1 + \frac{2}{r^6}\right) \dot{r}^2 = h - U_*, \quad U_* = U_s + \frac{c}{r^2},$$

где  $h = \frac{\mathcal{E}}{mv_0^{2/3}}$ ,  $c = \frac{p_\psi}{4}$  — фиксированные значения интегралов энергии и момента. Минимум приведенного потенциала  $U_*$  соответствует сфероиду Маклорена.

### 5.3. Случай Римана [78]

Имеется более общее (чем описанное выше) инвариантное многообразие, которое задается блочно-диагональной матрицей общего вида

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Вычисляя интегралы (30), (32), получим

$$\begin{aligned} M'_{12} &= u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1 + v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1, & M'_{23} = M'_{13} = 0, \\ \xi'_{12} &= u_1 \dot{v}_1 - v_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{v}_2 - v_2 \dot{u}_2, & \xi'_{23} = \xi'_{13} = 0, \end{aligned}$$

Очевидно также, что  $\mathbf{Q}$ ,  $\Theta$  в данном случае имеют аналогичный (57) блочно-диагональный вид, следовательно, данный случай соответствует указанному Риманом случаю, для которого в уравнениях (46) нужно положить

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 0, & m_3 &= \text{const}, \\ \mu_1 &= \mu_2 = 0, & \mu_3 &= \text{const}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем гамильтонову систему с двумя степенями свободы, описывающую эволюцию главных полуосей  $A_1$ ,  $A_2$ ; ее гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \frac{A_3^{-2}(p_1^2 + p_2^2) + (p_1 A_2^{-1} - p_2 A_1^{-1})^2}{\sum A_i^{-2}} + U_*(A_1, A_2), \quad (58)$$

где приведенный потенциал

$$U_* = U_e + \frac{c_1^2}{(A_1 - A_2)^2} + \frac{c_2^2}{(A_1 + A_2)^2},$$

и  $c_1^2 = \frac{1}{4}(m_3 + \mu_3)^2$ ,  $c_2^2 = \frac{1}{4}(m_3 - \mu_3)^2$  — фиксированные постоянные интегралов.

Частный случай системы (58) при  $c_1 = c_2 = 0$  (т. е. при условии неизменности направлений главных осей эллипса) был отмечен также Кирхгофом [60], который высказал предположение, что задача не сводится к квадратурам.

При  $U_* = 0$  гамильтониан (58) описывает геодезический поток на кубике  $A_1 A_2 A_3 = \text{const}$ . Эта замечательная аналогия между двумя разными динамическими системами также была отмечена Риманом.



#### 5.4. Эллиптический цилиндр (Липшиц [66])

Данный случай можно получить при помощи предельного перехода в случае Римана, устремляя к бесконечности одну ось эллипсоида ( $A_3 \rightarrow \infty$ ). Тем не менее, удобнее сразу рассматривать случай плоскопараллельного движения жидкости, полагая матрицу  $\mathbf{F}$  имеющей вид

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{F}} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det \bar{\mathbf{F}} = 1, \quad (59)$$

где  $\bar{\mathbf{F}}$  —  $2 \times 2$  матрица с единичным детерминантом.

Очевидно, что рассуждения, использованные при выводе уравнений Дирихле [10], могут быть без изменений перенесены на этот случай, нужно лишь поменять соответствующим образом правую часть уравнений. Для этого необходимо воспользоваться известным представлением потенциала внутренних точек эллиптического цилиндра большой длины  $l$  в системе главных осей

$$U(\zeta) = \bar{\varepsilon} \left( U_0(l) - \frac{\zeta_1^2}{A_1(A_1 + A_2)} - \frac{\zeta_2^2}{A_2(A_1 + A_2)} \right) + O(1/l),$$

где  $\bar{\varepsilon} = G\bar{m}$ ,  $G$  — гравитационная постоянная,  $\bar{m} = \pi\rho A_1 A_2$  — масса на единицу длины цилиндра. Постоянная  $U_0(l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$ , но не входит в уравнения движения и может быть опущена.

Переходя, по аналогии с предыдущим, к лагранжеву представлению и делая замену  $\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{A}}_0$ , где  $\bar{\mathbf{A}}_0 = \text{diag}(A_1^0, A_2^0)$ , получим лагранжиан системы в форме

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \dot{\bar{\mathbf{G}}} \dot{\bar{\mathbf{G}}}^T \right) - \bar{U}_e,$$

$$\bar{U}_e = -2\bar{\varepsilon} \ln(A_1 + A_2)^2 = -2\bar{\varepsilon} \ln(\text{Tr}(\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{G}}^T) + 2\det \bar{\mathbf{G}}).$$

Подставляя в сингулярное разложение матрицы  $\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\Theta}$  в явном виде

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix}, \quad \bar{\Theta} = \begin{vmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix},$$

получим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2} \left( \dot{A}_1^2 + \dot{A}_2^2 + (A_1 \dot{\phi} - A_2 \dot{\psi})^2 + (A_2 \dot{\phi} - A_1 \dot{\psi})^2 \right) - \bar{U}_e(A_1, A_2).$$

Мы видим, что переменные  $\phi, \psi$  циклические и имеется два линейных интеграла

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = p_\psi. \quad (60)$$

Параметризуем соотношение  $A_1 A_2 = \bar{v}_0$  с помощью гиперболических функций

$$A_1 = \bar{v}_0^{1/2} (\ch u + \sh u), \quad A_2 = \bar{v}_0^{1/2} (\ch u - \sh u).$$

Используя интеграл энергии и интегралы (60), получим квадратуру для переменной  $u$ :

$$\bar{v}_0 (\ch 2u) \dot{u}^2 = h - \bar{U}_*,$$

$$\bar{U}_* = 2\bar{\varepsilon} \ln(\ch u) + \frac{\bar{c}_1^2}{\ch^2 u} + \frac{\bar{c}_2^2}{\sh^2 u},$$

где  $\bar{c}_1^2 = \frac{1}{16}(p_\phi - p_\psi)^2$ ,  $\bar{c}_2^2 = \frac{1}{16}(p_\phi + p_\psi)^2$ ,  $h$  — фиксированные константы первых интегралов.

## 6. Хаотические колебания трехосного эллипсоида

Рассмотрим подробнее колебания (пульсации) жидкого эллипсоида в случае Римана (57). Представим теперь уравнения движения системы (58) в гамильтоновой форме, наиболее удобной для численного исследования системы. Параметризуем поверхность  $A_1 A_2 A_3 = v_0$  при помощи цилиндрических координат

$$\begin{aligned} A_1 &= r \cos \phi, \quad A_2 = r \sin \phi, \quad A_3 = \frac{2v_0}{r^2 \sin^2 2\phi}, \\ p_1 &= p_r \cos \phi - \frac{p_\phi}{r} \sin \phi, \quad p_2 = p_r \sin \phi - \frac{p_\phi}{r} \cos \phi \end{aligned} \quad . \quad (61)$$

Гамильтониан (58) можно представить в форме

$$H = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c_0^2}{r^6 \sin^4 2\phi} \right)^{-1} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{c_0^2}{r^6 \sin^4 2\phi} \left( p_r \cos 2\phi - \frac{p_\phi}{r} \sin 2\phi \right)^2 \right) + U_*(r, \phi), \quad (62)$$

где  $c_0 = 4v_0$ .

Поскольку исходная система определена в квадранте  $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$ , то в данном случае  $0 < \phi < \pi/2$ . Сделаем в этой системе преобразование переменных вида

$$\rho = r^2, \quad \psi = 2\phi, \quad (63)$$

получим гамильтониан в форме

$$H = \frac{2(\rho^2(c_0^2 \cos^2 \psi + \rho^3 \sin^4 \psi)p_\rho^2 + \sin^2 \psi(c_0^2 + \rho^3 \sin^2 \psi)p_\phi^2 - 2\rho c_0^2 \cos \psi \sin \psi p_\psi p_\phi)}{\rho(c_0^2 + \rho^3 \sin^4 \psi)} + U_*(\rho, \psi). \quad (64)$$

Переходя к новым декартовым координатам по формулам

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad (65)$$

получаем

$$H = 2\rho \left( p_x^2 + \frac{y^4 p_y^2}{y^4 + \bar{c}_0^2 \rho} \right) + U_*(x, y), \quad (66)$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , при этом очевидно, что система (66) определена в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ). В этом случае, как мы видим, кинетическая энергия системы имеет наиболее простой вид.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.** Преобразование (63) — это известное в небесной механике преобразование Леви–Чивита (называемое также преобразованием Болина), которое обычно записывается в комплексной форме

$$x + iy = \rho e^{i\psi} = (A_1 + iA_2)^2.$$

Как уже отмечалось выше, при  $U_* = 0$  гамильтониан (66) описывает геодезический поток на кубической поверхности  $A_1 A_2 A_3 = \text{const}$ , вложенной в евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Почти все траектории (геодезические) этой системы некомпактные, поэтому не удается поставить компьютерный эксперимент для численного доказательства неинтегрируемости при  $U_* = 0$ . Как показал недавно С. Л. Зиглин [5], эта система (при  $U_* = 0$ , т.е. геодезические потоки) не допускает мероморфного дополнительного интеграла.

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.** Различные алгебраические поверхности в трехмерном пространстве и особые линии на них (асимптотические линии, линии кривизны, геодезические) были предметом активного изучения математиков XIX века. Большой энтузиазм вызывала открытая Якоби интегрируемость задачи о геодезических на эллипсоиде и вообще на квадриках. Эта интегрируемость справедлива также в многомерном случае. Эта задача является классическим примером разделения переменных. Ее изучению как с аналитической (интегрирование с помощью тета-функций), так и с качественной точки зрения посвящена обширная литература. Однако математики XIX века мало преуспели, а в XX веке почти ничего не добавили в направлении нахождения геодезических потоков на поверхностях более высокого порядка. Видимо, в связи с этой задачей Дарбу развил науку об ортогональных семействах поверхностей, изучив на этом пути интересные поверхности 3-й (циклиды Дарбу) и 4-й степени (которые также были обнаружены Робертсоном [79] и Вангерином [94]). Отличительное свойство этих семейств поверхностей в том, что они являются семейством Ламэ, образуют триортогональную сетку в трехмерном пространстве, и для них можно в виде эллиптических квадратур выписать решение для асимптотических линий и линий кривизны. Однако геодезические для этих поверхностей найти не удалось. Причина этого, как показали проведенные нами численные эксперименты, заключается в неинтегрируемости геодезического потока. В связи с этой задачей отметим работы Шлефли [87] и Келли [29] по классификации различных кубических поверхностей в пространстве, которые, следом за фундаментальной работой Якоби о геодезических на квадриках, положили начало современной алгебраической геометрии. Недавно В. В. Козлов [7] нашел топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на некомпактных алгебраических поверхностях (в частности, в третьей и четвертой степени). К сожалению, его результаты не применимы к поверхностям Римана  $A_1 A_2 A_3 = \text{const}$ .

На рис. 2 приведены фазовые портреты системы (66). В качестве плоскости сечения Пуанкаре была выбрана плоскость  $x = 1$ . Как видно из рисунков, при энергиях, близких к минимальной, фазовый портрет практически регулярный (см. рис. 1a, 1c). При увеличении энергии происходит хаотизация фазового портрета, что хорошо видно на рис. 1b, 1d. На рис. 1e, 1f также изображено пересечение неустойчивых инвариантных многообразий (сепаратрис), что может служить численным доказательством неинтегрируемости данной системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 9.** При численном интегрировании уравнений движения удобно пользоваться представлением потенциала  $U_e$  (34) и его производных при помощи эллиптических функций

$$I(A_1, A_2, A_3) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} = \frac{2}{\alpha} F(\varphi, k),$$

$$\alpha = \sqrt{A_1^2 - A_3^2}, \quad k = \sqrt{\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 - A_3^2}}, \quad \varphi = \arcsin \left( \sqrt{\frac{A_1^2 - A_3^2}{A_1^2}} \right),$$

где  $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$  — эллиптический интеграл первого рода.

Вследствие инвариантности относительно перестановок величин  $A_1, A_2, A_3$ , их можно упорядочить таким образом, чтобы все значения  $\alpha, \varphi, k$  оказались вещественными. При нахождении производных (которые очевидно не инвариантны относительно перестановок  $A_i$ ) требуется вначале выполнить необходимое упорядочение величин  $A_1, A_2, A_3$ , а затем вычислить производную интеграла  $I$  по соответствующему аргументу.

Для производных  $F(\varphi, k)$  справедливы следующие соотношения

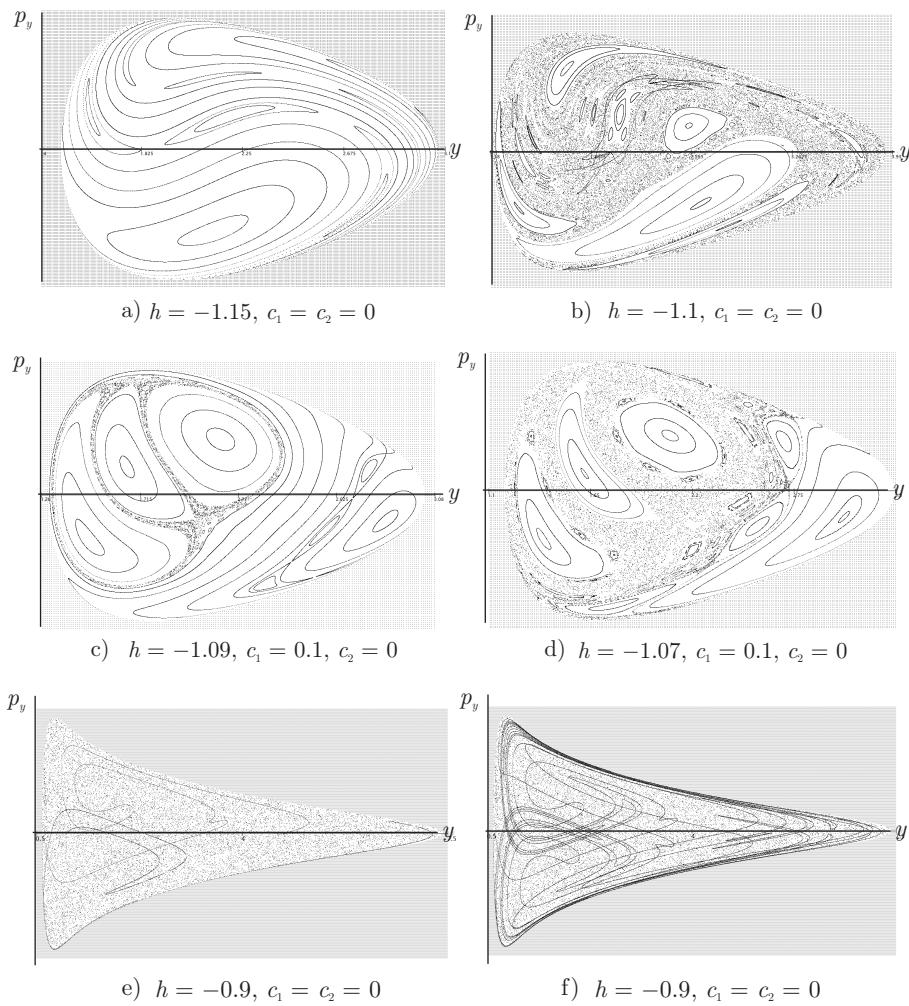


Рис. 2. Отображение Пуанкаре системы (66). Для всех рисунков  $c_0 = 1, \varepsilon = 0, 6$  и в качестве плоскости сечения выбраны плоскости  $x = 1$  (рис. а)-д)) и  $x = 0.1$ (рис.e, f)).

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}, \\ \frac{\partial F}{\partial k} &= \frac{1}{1 - k^2} \left( \frac{E(\varphi, k) - (1 - k^2)F(\varphi, k)}{k} - \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right), \end{aligned}$$

где  $E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$  — эллиптический интеграл второго рода.

## II. Динамика газового облака с эллипсоидальной стратификацией

### 1. Введение

Изучение динамики газовых эллипсоидов начинается с работы Л. В. Овсянникова [13] (1956), в которой изучены наиболее общие уравнения, описывающие движение идеального политропического газа без учета гравитации с полем скоростей, линейным по координатам частиц газа (здесь и далее под газовым эллипсоидом подразумевается обобщение решения Дирихле на случай различных моделей сжимаемой жидкости). Отметим, что работа [13] — очень краткая и носит чисто математический характер: фактически в ней получены уравнения движения, указан ряд возможных случаев существования данного решения и для двух случаев приводится неполный набор первых интегралов. Любопытно, что в работе Л. В. Овсянникова нет ни одной ссылки, вследствие чего не выявлена связь полученного решения с решением Дирихле.

Позже Д. Линден-Белл [69] (1962), также без каких-либо ссылок, показал существование решения в виде сфераида для самогравитирующегося пылевого облака (т. е. среды не сопротивляющейся деформациям,  $p \equiv 0$ ).

Я. Б. Зельдович [96] (1965) получил уравнения движения самогравитирующегося пылевого эллипсоида в общей постановке и исследовал (на физическом уровне строгости) возможность коллапса и разлета в этой задаче. Я. Б. Зельдович, по-видимому, также не заметил связи этой задачи с задачей Дирихле–Римана, т. к. для того чтобы получить модель пылевого облака, достаточно положить в уравнениях Дирихле  $p = 0$ .

Ф. Дайсон [39] (1968) независимо от Овсянникова (по крайней мере без ссылки) получает уравнения движения облака идеального газа в случае изотермического течения (но без гипотезы о политропности газа), при этом для плотности получается гауссово распределение с эллипсоидальной стратификацией. Дайсон указал связь полученного решения с задачей Дирихле и записал уравнения движения газового эллипсоида в форме Римана.

М. Фуджимото [43] (1968), также независимо от Овсянникова, описывает модель остывающего эллипсоидального газового облака, фактически он получает обобщение одного из случаев Овсянникова (полагая параметр «остывания»  $\alpha = 0$ , получим уравнения Овсянникова). Кроме того, в модели Фуджимото плотность постоянна, что позволило ему учесть гравитационное взаимодействие между частицами облака. Фуджимото также указал связь этой задачи с задачей Дирихле и использовал для ее изучения методы, развиваемые Чандraseкхаром [30] и Рёснером [85].

Отметим еще работу [1] (1970), в которой, опираясь на работы [13] и [39], рассматривается два интегрируемых случая динамики газового эллипсоида без учета гравитации, но при дополнительном условии одноатомности газа (показатель политропы  $\gamma = \frac{5}{3}$ ). Первый случай — это движение осесимметричного эллипсоида, второй — эллиптический цилиндр. При этом авторы обнаружили неавтономный интеграл Якоби (обусловленный однородностью потенциала со степенью однородности  $-2$ ), этот интеграл существенно необходим для интегрирования рассматриваемых случаев; как мы покажем ниже, в общем случае эти системы неинтегрируемы.

В работе [2] (1976) исследуется (на физическом уровне строгости) динамика газового эллипсоида с учетом гравитации (т. е. модель Фуджимото без остывания). При этом используется явное представление системы в лагранжевой и гамильтоновой форме.



В цикле работ Гаффэ [46–48] показано, что система, описывающая безвихревые газовые эллипсоиды без учета гравитации и при условии одноатомности ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ), удовлетворяет свойству Пенлеве, найдены первые интегралы и выполнено в частных случаях явное интегрирование в квадратурах.

Имеется также ряд работ, в которых рассматривается сферически симметричное движение газового облака; одно из наиболее общих решений описывается в работе [9], в которой рассмотрены одномерные адиабатические неуставновившиеся движения тяготеющей массы совершенного газа при наличии сферической симметрии.

В работе [12] решение для эллипсоидального разлета газового облака применяется для нахождения характерных особенностей несферических взрывов (в частности, указывается увеличение напора в направлении одной из главных осей по сравнению с соответствующим взрывом сферической формы), исследуется также влияние подогрева облака на скорость его разлета.

В заключение отметим цикл работ (см. [4] и библиографию в этой работе) посвященные обобщению расширению эллипсоидального облака в вакуум (либо сжатию эллипсоидальной полости) при наличии волн разрежения (сжатия).

## 2. Уравнения движения газового облака с линейным полем скоростей

Рассмотрим теперь аналогичным образом случай, когда движение *сжимаемой жидкости*, точнее *газа*, также определяется линейным преобразованием лагранжевых координат

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{a}, \quad (67)$$

при этом в случае сжимаемой среды, очевидно, отсутствует условие  $\det \mathbf{F} = 1$ . Ясно, что поле скоростей в этом случае является линейным по координатам частиц жидкости:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{x}.$$

Уравнения, описывающие течение газа в данном случае (для потенциальных сил) в лагранжевом представлении имеют вид

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{a}}, \quad (68)$$

а уравнение непрерывности в лагранжевом представлении

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{Tr} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^{-1} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{a}} \right) = 0, \quad (69)$$

здесь  $\operatorname{Tr} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^{-1} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{a}} \right) = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

Для рассматриваемого течения вида (67) уравнения непрерывности легко интегрируются. Действительно, обозначив  $\varphi(t) = \det \mathbf{F}(t)$  с помощью соотношения  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = \varphi \mathbf{F}^{-1}$ , находим, что  $\operatorname{Tr} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^{-1} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{a}} \right) = \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}$ , следовательно,

$$\rho(\mathbf{a}, t) = \frac{f(\mathbf{a})}{\varphi(t)}, \quad (70)$$

где функция  $f(\mathbf{a})$  не зависит от времени.



Помимо четырех функций  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), p(\mathbf{a}, t)$  рассматриваемая среда описывается еще тремя дополнительными скалярными величинами: плотностью  $\rho(\mathbf{a}, t)$ , удельной внутренней энергией  $U_{\text{in}}(\mathbf{a}, t)$  и температурой  $T(\mathbf{a}, t)$ . Следовательно, необходимо дополнить систему (68), (69) еще тремя уравнениями. Как известно [8], эти дополнительные уравнения имеют не механическую, а термодинамическую природу, и существенно зависят от сделанных нами допущений о свойствах среды, а также от характера течения.

В зависимости от этих допущений получаются различные модели динамики газа. Рассмотрим три наиболее известные, выделяя явным образом сделанные предположения. В дальнейшем будем предполагать, если явно не оговорено обратное, что потенциал внешних сил  $U$ , действующих на систему, равен нулю.

## 2.1. Модель Овсянникова [13]

1°. Газ — идеальный и описывается уравнением состояния

$$p = \rho RT, \quad (71)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная.

2°. Газ — политропный и его внутренняя энергия линейно зависит от температуры

$$U_{\text{in}} = c_V T, \quad (72)$$

где  $c_V = \text{const}$  — теплоемкость при постоянном объеме.

3°. Течение газа адиабатическое (т. е. отсутствует передача тепла между различными частями газа), следовательно, изменение энергии описывается уравнением

$$\dot{U}_{\text{in}} = -p \left( \frac{1}{\rho} \right)^{\dot{}}. \quad (73)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Уравнение (73) — следствие первого начала термодинамики  $\delta Q = dU_{\text{in}} + p dV$ , где вследствие предположения 3° необходимо положить  $\delta Q = 0$ , ( $V = \frac{1}{\rho}$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Напомним, что вследствие известного термодинамического тождества

$$\left( \frac{dU_{\text{in}}}{dV} \right)_T = \left( T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right)$$

для идеального газа (71) внутренняя энергия зависит только от температуры  $U_{\text{in}} = U_{\text{in}}(T)$ .

С помощью уравнений (71)–(73) и с учетом соотношения (70) получаем

$$\frac{\dot{p}}{p} + \gamma \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = 0,$$

где  $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V}$  — безразмерная константа — показатель адиабаты. Итак, для термодинамических величин имеем

$$p(\mathbf{a}, t) = \frac{g(\mathbf{a})}{\varphi^{\gamma}(t)}, \quad U_{\text{in}}(\mathbf{a}, t) = \frac{1}{\gamma - 1} RT(\mathbf{a}, t) = \frac{1}{\gamma - 1} \varphi^{1-\gamma}(t) \frac{g(\mathbf{a})}{f(\mathbf{a})},$$

где  $g(\mathbf{a})$  — произвольная функция, не зависящая от времени.

Таким образом, для существования решения вида (67) в данном случае необходимо потребовать, чтобы

$$\frac{1}{f(\mathbf{a})} \nabla_a g(\mathbf{a}) = \mathbf{V}\mathbf{a}, \quad (74)$$

где  $\mathbf{V}$  — некоторая постоянная матрица,  $\nabla_a = \left( \frac{\partial}{\partial a_1}, \frac{\partial}{\partial a_2}, \frac{\partial}{\partial a_3} \right)$ . При этом уравнения движения для  $\mathbf{F}(t)$  имеют вид

$$\mathbf{F}^T \ddot{\mathbf{F}} + (\det \mathbf{F})^{1-\gamma} \mathbf{V} = 0 \quad (\text{уравнения Овсянникова}). \quad (75)$$

Как показал Овсянников [13], достаточно рассмотреть следующие решения уравнения (74).

**Теорема 3.** *Все решения уравнения (74) при помощи линейного преобразования лагранжевых координат приводятся к одному из следующих четырех типов (в зависимости от ранга матрицы  $\mathbf{V}$ ):*

I.  $\mathbf{V} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  
 $g(\mathbf{a}) = g(s)$ ,  $f(\mathbf{a}) = 2g'(s)$ ,  $s = (\mathbf{a}, \mathbf{V}\mathbf{a})$ ;

II.  $\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \delta & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  ( $i = 1, 2$ ),  
если  $\delta \neq 0$ , то  $g(\mathbf{a}) = g(s)$ ,  $f(\mathbf{a}) = \frac{a_1 g'(s)}{(\mathbf{a}, \mathbf{V}\mathbf{a})}$ ,  $s = a_1 \bar{s} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)$ ,  $\ln \bar{s}(\lambda) = \int \frac{\varepsilon_2 \lambda d\lambda}{\varepsilon_1 + \delta \lambda + \varepsilon_2 \lambda}$ ;  
если  $\delta = 0$ , то  $g(\mathbf{a}) = g(s)$ ,  $f(\mathbf{a}) = 2g'(s)$ ,  $s = (\mathbf{a}, \mathbf{V}\mathbf{a})$ ;

III.  $\mathbf{V} = \text{diag}(\varepsilon, 0, 0)$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $g(\mathbf{a}) = g(a_1)$ ,  $f(\mathbf{a}) = \frac{\varepsilon}{a_1} g'(a_1)$ ;

IV.  $\mathbf{V} = 0$ ,  $g(\mathbf{a}) = \text{const}$ ,  $f(\mathbf{a})$  — произвольная функция.

*Доказательство.*

Укажем вкратце основные моменты доказательства. Переписывая условие разрешимости (74) в форме  $\nabla_a \times \nabla_a g(\mathbf{a}) = \nabla_a \times f(\mathbf{a}) \mathbf{V}\mathbf{a} = 0$ , получим

$$\nabla_a f(\mathbf{a}) \times (\mathbf{V}\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \boldsymbol{\omega}_V, \quad (76)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_V = (V_{23} - V_{32}, V_{31} - V_{13}, V_{12} - V_{21})$ . Домножая скалярно на  $\mathbf{V}\mathbf{a}$ , представим условия разрешимости в виде векторного уравнения

$$\mathbf{V}^T \boldsymbol{\omega}_V = 0. \quad (77)$$

Кроме того, ясно, что уравнения (75) инвариантны относительно неособых преобразований лагранжевых переменных, для которых

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}\mathbf{a}', \quad \mathbf{V}' = \mathbf{S}^T \mathbf{V} \mathbf{S}, \quad \mathbf{F}' = (\det \mathbf{S})^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} \mathbf{F} \mathbf{S}, \quad \det \mathbf{S} \neq 0. \quad (78)$$



Если  $\text{rank } \mathbf{V} < 3$ , то с помощью преобразований (78) наиболее общая матрица соответствующего ранга приводится к виду, указанному в случаях II–IV. Если  $\text{rank } \mathbf{V} = 3$ , то  $\omega_V = 0$ , следовательно,  $\mathbf{V}$  симметрична и приводится к виду случая I.

По известной матрице  $\mathbf{V}$  с помощью соотношений (74) и (76) несложно найти соответствующие функции  $f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})$ . ■

Наиболее интересным с физической точки зрения является случай I при знакоопределенной матрице  $\mathbf{V}$ . В частности, если положить  $\mathbf{V} = \text{diag}(-1, -1, -1)$  (т. е.  $s = -(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ ) и выбрать линейную функцию  $g(s)$ , то получим

$$g(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\rho_0(d_0^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{a})), \quad f(\mathbf{a}) = \rho_0, \quad (79)$$

где необходимо положить  $\rho_0 > 0$  (вследствие положительности плотности газа). В этом случае газ распределен с одинаковой плотностью  $\rho = \rho_0 / \det(\mathbf{F})$  внутри конечного объема эллипсоидальной формы

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{FF}^T)^{-1}\mathbf{x}) \leq d_0^2. \quad (80)$$

Следовательно, в этом случае решение вида (67) сохраняется при добавлении сил гравитации (при этом в правую часть уравнения (75) добавляется матрица (21), в которой необходимо положить  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{E}$ ). Задача о движении сжимаемого самогравитирующего газового облака была поставлена в работе [2]. Однако в свете современных представлений о хаотических и регулярных движениях в динамических системах выполненный в этой работе анализ выглядит несколько наивно.

## 2.2. Модель Дайсона [39]

*Предположения 1° и 3° совпадают с предыдущим случаем, а вместо полигропности положим*

2°. *В начальный момент газ изотермический, т. е.  $T(\mathbf{a}, t = 0)$  не зависит от  $\mathbf{a}$ .*

Подставляя давление из уравнения состояния (71) в (73) и используя (70) находим

$$\frac{\dot{U}_{\text{in}}}{RT} = -\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}. \quad (81)$$

В то же время, как было отмечено выше (см. замечание 9), внутренняя энергия зависит только от температуры, а правая часть (81) не зависит от  $\mathbf{a}$ , следовательно, газ останется изотермическим во все последующие моменты времени. Поэтому (81) можно представить в форме

$$\varphi \frac{dU_{\text{in}}}{d\varphi} + RT = 0. \quad (82)$$

Интегрируя это уравнение с учетом (72), получим соотношение между  $T$  и  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi_0 \exp \left( - \int (RT)^{-1} \left( \frac{dU_{\text{in}}}{dT} \right) dT \right). \quad (83)$$

Таким образом, согласно (70), (71), (82) давление окончательно можно записать в виде

$$p(\mathbf{a}, t) = \frac{RT(\varphi(t))}{\varphi(t)} f(\mathbf{a}). \quad (84)$$

Подставив (84) в (68) и ограничиваясь случаем, когда отсутствуют внешние силы (т. е.  $U = 0$ ), получаем, что для существования решения вида (67) необходимо, чтобы  $\ln f(\mathbf{a})$  являлось однородной квадратичной функцией лагранжевых координат. Учитывая, что лагранжевые координаты определены с точностью до неособой линейной замены (78), можем представить  $f(\mathbf{a})$  в форме

$$f(\mathbf{a}) = \frac{m}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{a}, \mathbf{a})\right), \quad (85)$$

где  $m = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x = \int f(\mathbf{a}) d^3a$  — масса газа.

Окончательно для элементов матрицы  $\mathbf{F}$  получаем уравнения движения

$$\mathbf{F}^T \ddot{\mathbf{F}} = RT(\varphi) \mathbf{E} \quad (\text{уравнения Даисона}). \quad (86)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 12.** Согласно (85) получаем, что газ во время движения имеет эллипсоидальную стратификацию плотности вида

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varphi(t)} f(n^2), \quad n^2 = (\mathbf{x}, (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}\mathbf{x}). \quad (87)$$

Таким образом, всюду на эллипсоиде  $n^2 = \text{const}$  плотность  $\rho$  имеет одно и то же значение. Гравитационный потенциал таких тел, как известно, не является однородной квадратичной функцией координат, следовательно, в присутствии гравитации не существует решения вида (67).

### 2.3. Модель остывающего газового облака (Фуджимото [43])

В этой модели предположения  $1^\circ, 2^\circ$  совпадают со случаем Овсянникова, т. е. газ предполагается идеальным полигропическим, а третье допущение в данном случае имеет вид

$3^\circ$ . Движение газа неадиабатическое, при этом для изменения внутренней энергии выполнено уравнение

$$\rho \dot{U}_{in} + p \operatorname{Tr} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)^{-1} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{a}} \right) = -\alpha \rho^n T^m. \quad (88)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.** Уравнения (88) отличаются от уравнений адиабатического процесса (73) слагаемыми  $-\alpha \rho^n T^m$ .

Пользуясь уравнениями (70)–(72), исключим  $U_{in}$  из уравнения (88), находим

$$\frac{\dot{p}}{p} + \gamma \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = -\frac{\alpha(\gamma-1)}{R} \rho^{n-1} T^{m-1}. \quad (89)$$

Для нахождения решения в форме (67) дополнительно потребуем, что

$$m = 1, \quad \rho(\mathbf{a}, t) = \frac{\rho_0}{\varphi(t)},$$

где  $\rho_0 = \text{const}$  не зависит от  $\mathbf{a}$ , т. е. плотность одинакова внутри облака. Решение уравнения (89) в этом случае представляется в виде  $p(\mathbf{a}, t) = \sigma(t)g(\mathbf{a})$ , где  $\sigma(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \gamma \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = -\bar{\alpha} \varphi^{1-n}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha(\gamma-1)}{R} \rho_0^{n-1}. \quad (90)$$

Функция  $g(\mathbf{a})$  очевидно должна удовлетворять уравнению (74), причем несложно показать, что согласно теоремы 3, можно выбрать

$$g(\mathbf{a}) = 1 - (\mathbf{a}, \mathbf{a}), \quad f(\mathbf{a}) = \text{const.}$$

Условие конечности общей массы газа приводит к тому, что  $\mathbf{V} = \text{diag}(-1, -1, -1)$ , при этом в начальный момент газ занимает область  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \leq 1$  (в исходных физических переменных это неравенство определяет эллипсоид вида  $(\mathbf{x}, (\mathbf{F}, \mathbf{F})^{-1}|_{t=0} \mathbf{x}) \leq 1$ ).

Окончательно получим систему уравнений, описывающих динамику остывающего облака, в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \ddot{\mathbf{F}} &= \frac{2\sigma\varphi}{\rho_0} \mathbf{E} \left( +2\varepsilon \int_0^\infty \mathbf{F}^T (\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{F} \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \lambda \mathbf{E})}} \right), \\ (\ln(\sigma\varphi^\gamma))' &= -\bar{\alpha}\varphi^{1-n}. \end{aligned}$$

В скобках добавлено слагаемое, описывающее гравитационное взаимодействие между частицами облака. Учет гравитационного взаимодействия в рамках решения вида (68) в данном случае возможен вследствие однородности газа в облаке ( $\rho_0 = \text{const}$ ).

Численные результаты работы [43] показывают возможность гравитационного коллапса в этой системе (при  $\alpha > 0$ ).

#### 2.4. Модель пылевого облака (гравитационный коллапс)

1°. Среда (пыль) не сопротивляется деформациям

$$p \equiv 0.$$

2°. Частицы в начальный момент равномерно распределены (внутри эллипсоида):

$$\rho(t, \mathbf{a})|_{t=0} = \rho_0 = \text{const.}$$

Очевидно, что для решения вида (68) плотность не зависит от координат во все последующие моменты времени и определяется соотношением

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{F}(t)}.$$

Следовательно, в этой модели в рамках линейного решения (68) возможен учет гравитационного притяжения частиц облака, и уравнения движения запишутся в форме

$$\mathbf{F}^T \ddot{\mathbf{F}} = 2\varepsilon \int_0^\infty \mathbf{F}^T (\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{F} \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \lambda \mathbf{E})}}. \quad (91)$$

Эта модель используется в астрофизике для описания гравитационного коллапса [96]. В частности, в работе [69] она рассматривается для описания коллапса газового эллиптического облака при нулевой температуре.

### 3. Лагранжев формализм, симметрии, первые интегралы

Покажем теперь, что уравнения Дайсона (86), уравнения Овсянникова (75) при условии (79) и уравнения пылевого облака (91) допускают естественное лагранжево представление. При помощи непосредственных вычислений можно показать, что уравнения движения записываются в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{F}}} \right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{F}} &= 0, \\ L &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{F}}^T) - U_g(\mathbf{F}), \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$U_g(\mathbf{F}) = \begin{cases} U_{in}(\varphi) - \text{для модели Дайсона,} \\ \frac{1}{\gamma-1} \varphi^{1-\gamma} - 2\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \lambda\mathbf{E})}} - \text{для модели Овсянникова с гравитацией,} \\ - 2\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \lambda\mathbf{E})}} - \text{для модели пылевого облака,} \end{cases} \quad (93)$$

где, как и выше,  $\varphi = \det \mathbf{F}, \mathbf{F} \in GL(3)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.** В модели Дайсона лагранжево представление (92) может быть непосредственно получено из принципа Гамильтона для баротропных течений (см. [60])

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt, \quad (94)$$

где  $T, U$  — кинетические и потенциальные энергии жидкости, а  $W$  — баротропный потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\delta W = \int p \frac{\delta \rho}{\rho} d^3x. \quad (95)$$

Вследствие сделанных выше предположений в нашем случае с точностью до константы находим

$$W = \int RT \ln \rho d^3x = U_{in}. \quad (96)$$

Можно обобщить эти рассуждения и на модель Овсянникова.

По аналогии с жидким эллипсоидом (см. п. 2, § 4) заключаем, что система (92) инвариантна относительно линейных преобразований вида

$$\mathbf{F}' = \mathbf{S}_1 \mathbf{F} \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in SO(3), \quad (97)$$

которые образуют группу симметрий  $\Gamma = SO(3) \otimes SO(3)$ .

*Закон взаимности Дедекинда (теорема 1 первой части), отвечающий дискретному преобразованию  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}^T$ , также справедлив в динамике газовых облаков.*

В соответствии с теоремой Нетер, преобразованиям (97) соответствуют линейные по скоростям интегралы движения — завихренность и полный угловой момент системы, которые можно представить в матричной форме

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{F}}^T - \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (98)$$

Кроме того, имеется также квадратичный интеграл — полная энергия системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{F}}^T) + U_g(\mathbf{F}). \quad (99)$$

#### 4. Редукция по симметрии и гамильтонов формализм

Пользуясь результатами предыдущей части, несложно выполнить редукцию по линейным интегралам (98). Воспользуемся для этого разложением Римана

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \Theta, \quad \mathbf{Q}, \Theta \in SO(3), \quad \mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3).$$

С учетом уравнений

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{w}\mathbf{Q}, \quad \dot{\Theta} = \boldsymbol{\omega}\Theta$$

для функции Лагранжа газового облака (92) получим выражение

$$L = \frac{1}{2} \sum \dot{A}_i^2 + \frac{1}{4} \sum (A_j + A_k)^2 (\mathbf{w}_i - \boldsymbol{\omega}_i)^2 + (A_j - A_k)^2 (\mathbf{w}_i + \boldsymbol{\omega}_i)^2 - U_g(\mathbf{A}).$$

Обозначая трехмерный вектор полуосей  $\mathbf{q} = (A_1, A_2, A_3)$ , представим уравнения движения в форме

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^\cdot - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} &= 0, \\ \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} \right)^\cdot &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} \times \mathbf{w}, \quad \left( \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)^\cdot = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Это аналог уравнений Римана (16), (40) для случая газового облака (отличие состоит в том, что отсутствует слагаемое, содержащее давление). Несложно записать эти уравнения в матричном виде, аналогичном (16) [39].

После преобразования Лежандра

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{m} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{w}}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}}$$

получим гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{p}}}, \quad \mathbf{p} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}}, \quad \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \\ H &= \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \frac{1}{4} \sum \left( \frac{m_i + \mu_i}{q_j - q_k} \right)^2 + \left( \frac{m_i - \mu_i}{q_j + q_k} \right)^2 + U_g(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (100)$$

Пуассонова структура системы (100) имеет вид

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{\mu_i, \mu_j\} = \varepsilon_{ijk} \mu_k, \quad (101)$$

где опущены нулевые скобки. Как и выше скобка (101) обладает двумя функциями Казимира

$$\Phi_m = (\mathbf{m}, \mathbf{m}), \quad \Phi_\mu = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})$$

которые соответствуют квадрату полного момента и завихренности системы.

В общем случае ( $\Phi_m \neq 0, \Phi_\mu \neq 0$ ) имеем гамильтонову систему с пятью степенями свободы.

В частных случаях  $\Phi_m = 0$  либо  $\Phi_\mu = 0$  имеем систему с четырьмя степенями свободы.

Если  $\Phi_m = \Phi_\mu = 0$ , получим систему с тремя степенями свободы, аналогичную задаче о движении точки единичной массы в  $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{q}\}$ .

## 5. Частные случаи движения

### 5.1. Случай $\gamma = \frac{5}{3}$ (одноатомный газ)

Рассмотрим подробнее случай расширения эллипсоидального облака идеального одноатомного газа в отсутствие гравитации; покажем, что в этом случае система обладает дополнительными симметриями. Как известно, в этом случае  $c_V = \frac{3}{2}R$  и, следовательно,  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

Пользуясь (92), представим лагранжиан системы в виде

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{F}}^T) - U_g(\mathbf{F}), \quad U_g(\mathbf{F}) = \frac{3}{2}k \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{2/3}}, \quad (102)$$

где  $k = \text{const}$  — положительная постоянная (введена для удобства). Интегралы — завихренность  $\boldsymbol{\Xi}$ , момент  $\mathbf{M}$ , энергия  $\mathcal{E}$  — были указаны выше (98), (99).

Собственные числа матрицы  $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$  обозначим  $A_1^2, A_2^2, A_3^2$  и будем называть  $A_i$  главными полуосами газового эллипсоида ( $A_i$  совпадает с полуосами газового эллипсоида в модели Овсянникова при распределении давления и плотности (79), в модели Дайсона с нормальным распределением плотности (85) это название условно). Определим аналог центрального момента инерции системы по формуле

$$I = \text{Tr } \mathbf{F}\mathbf{F}^T = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \quad (103)$$

Как мы видим, согласно (102) динамика облака в этом случае описывается натуральной лагранжевой системой с однородным потенциалом степени однородности  $\alpha = -2$  (для произвольного  $\gamma$  степень однородности  $\alpha = 3(1 - \gamma)$ .) Используя формулу Лагранжа–Якоби для однородных систем [57], получим

$$\ddot{I} = 4\mathcal{E} = \text{const},$$

где  $\mathcal{E}$  — энергия системы (для произвольного  $\gamma$  получим  $\ddot{I} = 4\mathcal{E} - 2(3(1 - \gamma) + 2)U_g$ ).

Интегрируя это соотношение, получим

$$I = 2\mathcal{E}t^2 + at + b, \quad (104)$$

где константы интегрирования  $a, b$  могут быть выражены через фазовые переменные и время по формулам

$$a = 2 \text{Tr}(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) - 4\mathcal{E}t, \quad b = 2\mathcal{E}t^2 - 2 \text{Tr}(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})t + I. \quad (105)$$

Фактически  $a, b$  являются неавтономными (явно зависящими от времени) интегралами рассматриваемой системы.



Впервые интеграл (104) для однородных, степени  $-2$ , систем был указан Якоби в задаче о движении частиц на прямой. В задаче о движении газового облака интеграл Якоби был найден в работе [1]. Интегралы (105) для системы (102) были указаны в работе [46], а соответствующие им симметрии в частном случае  $\Xi = 0$ , в работе [47].

Вследствие того, что для системы (102) заведомо  $\mathcal{E} > 0$ , из соотношения (104) получим

**Предложение 1.** *При  $t \rightarrow \pm\infty$  по крайней мере одна из полуосей  $A_i$  газового облака стремится к бесконечности.*

Помимо неавтономных интегралов (105) система в данном случае допускает (автономный) квадратичный интеграл, не зависящий от интеграла энергии

$$J = 2I\mathcal{E} - [\text{Tr}(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})]^2. \quad (106)$$

Для однородных степени  $-2$  систем этот интеграл в общем виде был указан в работе [18]. Для системы (102) в частном случае  $\Xi = 0$  он также содержится в работе [47]. Предварительные результаты по поводу симметрий, связанных с этим интегралом, приведены в работах [44, 45].

Для однородных натуральных систем степени  $-2$  может быть выполнена специальная редукция, уменьшающая число степеней свободы на единицу. Опишем ее применительно к рассматриваемой системе (102).

Выполним замену времени и (проективную) замену переменных

$$dt = I d\tau, \quad \mathbf{G} = I^{-1/2} \mathbf{F}. \quad (107)$$

Прямыми вычислениями несложно показать, что эволюция матрицы  $\mathbf{G}(t)$  описывается лагранжевой системой со связью  $\varphi$  в следующей форме

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{d\mathbf{G}}{d\tau} \frac{d\mathbf{G}^T}{d\tau} \right) - \bar{U}_g(\mathbf{G}), \quad \bar{U}_g(\mathbf{G}) = \frac{3}{2} k \frac{1}{(\det \mathbf{G})^{2/3}}, \\ \varphi = \text{Tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T) = 1. \end{aligned} \quad (108)$$

Связь между «старым» временем  $t$  и «новым»  $\tau$  может быть получена с помощью соотношения (104). Отметим, что система (108) отличается от системы Дирихле, поскольку связь  $\varphi$  в этом случае другая (в задаче Дирихле  $\det \mathbf{G} = 1$ ). Интересно, что интеграл энергии для системы (108) совпадает с интегралом (106):

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{4} J = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{d\mathbf{G}}{d\tau} \frac{d\mathbf{G}^T}{d\tau} \right) - \bar{U}_g(\mathbf{G}).$$

Линейные интегралы в системе (108) остаются те же

$$\Xi = \mathbf{G}^T \frac{d\mathbf{G}}{d\tau} - \frac{d\mathbf{G}^T}{d\tau} \mathbf{G}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{G} \frac{d\mathbf{G}^T}{d\tau} - \frac{d\mathbf{G}}{d\tau} \mathbf{G}^T,$$

и кроме того система (108) инвариантна относительно тех же преобразований (97), образующих группу  $\Gamma = SO(3) \otimes SO(3)$ . Следовательно, возможна редукция по симметрии, аналогичная изложенной выше (см. п. 3, часть II), с той лишь разницей, что между полуосами в данном случае выполняется соотношение

$$\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 + \bar{A}_3^2 = 1. \quad (109)$$

Пользуясь разложением Римана матрицы  $\mathbf{G} = \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{A}} \Theta$ ,  $\mathbf{Q}, \Theta \in SO(3)$ ,  $\bar{\mathbf{A}} = \text{diag}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$ , получим в этом случае систему, аналогичную (100), но с дополнительной связью (109). Чтобы учесть эту связь и представить уравнения в наиболее симметричной форме, определим переменные  $\mathbf{q}, \mathbf{K}$  по формулам

$$q_i = A_i, \quad \mathbf{K} = \mathbf{q} \times \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}. \quad (110)$$

Тогда окончательно получим редуцированную систему в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}}{d\tau} &= \mathbf{K} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{K}} + \mathbf{q} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \mathbf{q} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{K}}, \\ \frac{dm}{d\tau} &= \mathbf{m} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{m}}, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \\ \bar{H} &= \frac{1}{2}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) + \frac{1}{4} \sum \left( \frac{m_i + \mu_i}{q_j - q_k} \right)^2 + \left( \frac{m_i - \mu_i}{q_j + q_k} \right)^2 + U_g(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (111)$$

Скобки Пуассона (ненулевые), соответствующие системе (110), имеют вид

$$\{K_i, K_j\} = \varepsilon_{ijk} K_k, \quad \{K_i, q_j\} = \varepsilon_{ijk} q_k, \quad \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{\mu_i, \mu_j\} = \varepsilon_{ijk} \mu_k.$$

Эта пуассонова структура соответствует, как известно, алгебре  $e(3) \oplus so(3) \oplus so(3)$  и обладает четырьмя функциями Казимира

$$\begin{aligned} \Phi_K &= (\mathbf{K}, \mathbf{q}), \quad \Phi_q = (\mathbf{q}, \mathbf{q}), \\ \Phi_m &= (\mathbf{m}, \mathbf{m}), \quad \Phi_\mu = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

причем вследствие определения (110) переменных  $\mathbf{K}, \mathbf{q}$  в данном случае имеем

$$\Phi_K = 0, \quad \Phi_q = 1.$$

Таким образом, окончательно заключаем, что

1. если  $\Phi_m, \Phi_\mu \neq 0$ , то уравнения (100) соответствуют гамильтоновой системе с четырьмя степенями свободы;
2. если  $\Phi_m = 0$  (либо  $\Phi_\mu = 0$ ), то получаем систему с тремя степенями свободы;
3. если  $\Phi_m = \Phi_\mu = 0$ , то получаем систему с двумя степенями свободы.

Как уже отмечалось выше, для случая  $\Phi_\mu = 0$  Гаффэ [48] указал два дополнительных первых интеграла (шестой степени по скоростям), независимых от интеграла энергии, и высказал гипотезу об интегрируемости системы в этом случае.

Более того, в работе [48] сформулировано утверждение о том, что система (102) при  $\Xi = 0$  (либо  $\mathbf{M} = 0$ ) интегрируема по Лиувиллю, и приведены недостающие интегралы, хотя не показано, что они коммутируют. Недостающие интегралы являются полиномами шестой степени по импульсам и имеют вид

$$\begin{aligned} I_6 &= 36k^2 \left( Y_0 Y_2 - \frac{1}{4} Y_1^2 + 3X_2 + T(X_0 + Y_0^2) \right) + \\ &\quad + 6k(4T^2 Y_0 + 3PY_1 + 6TY_2) + 27P^2 + 4T^3, \\ L_6 &= \left( \mathbf{A}^2 m, \mathbf{V}_0 \mathbf{A}^2 m \times (\mathbf{V}_0^2 \mathbf{A}^2 m + \frac{3k}{(q_1 q_2 q_3)^{2/3}} m) \right), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{A} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3)$ , а величины  $X_i, Y_i, P, T$  выражаются через симметричную матрицу

$$\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i}{q_i} - \frac{K_1}{q_1} & \frac{m_3}{q_1^2 - q_2^2} & \frac{m_3}{q_3^2 - q_1^2} \\ \frac{m_3}{q_1^2 - q_2^2} & \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i}{q_i} - \frac{K_2}{q_2} & \frac{m_1}{q_2^2 - q_3^2} \\ \frac{m_2}{q_3^2 - q_1^2} & \frac{m_1}{q_2^2 - q_3^2} & \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i}{q_i} - \frac{K_3}{q_3} \end{pmatrix}$$

следующим образом

$$\begin{aligned} X_k &= (q_1 q_2 q_3)^{2(k-1)/3} \text{Tr}(\mathbf{V}_0^k \mathbf{A}^2), & Y_k &= (q_1 q_2 q_3)^{2(k+1)/3} \text{Tr}(\mathbf{V}_0^k \mathbf{A}^{-2}), \\ T &= -\frac{1}{2} (q_1 q_2 q_3)^{4/3} \text{Tr}(\mathbf{V}_0^2), & P &= (q_1 q_2 q_3)^2 \det \mathbf{V}_0. \end{aligned}$$

В случае  $\Phi_\mu = 0$  система (100) представляет собой систему Эйлера–Калоджеро–Мозера типа  $D_3$  [14, 95] с потенциалом  $U_g$ . Представление Лакса данной системы в отсутствие потенциала можно найти, например, в работе [59]. В случае, когда  $U_g = \frac{3}{2} \frac{k}{(q_1 q_2 q_3)^{2/3}}$ , уравнения (100) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{L}, \mathbf{A}] + \frac{k}{(q_1 q_2 q_3)^{2/3}} \mathbf{D}^{-1}, \\ \dot{\mathbf{D}} = [\mathbf{D}, \mathbf{A}] + \mathbf{L}, \\ \dot{\mathbf{l}} = [\mathbf{l}, \mathbf{A}], \end{cases} \quad (112)$$

где матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} p_1 & \frac{m_3}{q_2 - q_1} & \frac{-m_2}{q_3 - q_1} & \frac{-m_2}{q_3 + q_1} & \frac{m_3}{q_2 + q_1} & 0 \\ \frac{m_3}{q_2 - q_1} & p_2 & \frac{m_1}{q_3 - q_2} & \frac{m_1}{q_3 + q_2} & 0 & \frac{-m_3}{q_2 + q_1} \\ \frac{-m_2}{q_3 - q_1} & \frac{m_1}{q_3 - q_2} & p_3 & 0 & \frac{-m_1}{q_3 + q_2} & \frac{m_2}{q_3 + q_1} \\ \frac{-m_2}{q_3 + q_1} & \frac{m_1}{q_3 + q_2} & 0 & -p_3 & \frac{-m_1}{q_3 - q_2} & \frac{m_2}{q_3 - q_1} \\ \frac{m_3}{q_2 + q_1} & 0 & \frac{-m_1}{q_3 + q_2} & \frac{-m_1}{q_3 - q_2} & -p_2 & \frac{-m_3}{q_2 - q_1} \\ 0 & \frac{-m_3}{q_2 + q_1} & \frac{m_2}{q_3 + q_1} & \frac{m_2}{q_3 - q_1} & \frac{-m_3}{q_2 - q_1} & -p_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 & m_3 & -m_2 & m_2 & -m_3 & 0 \\ -m_3 & 0 & m_1 & -m_1 & 0 & m_3 \\ m_2 & -m_1 & 0 & 0 & m_1 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 & 0 & 0 & -m_1 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 & m_1 & 0 & -m_3 \\ 0 & -m_3 & m_2 & -m_2 & m_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m_3}{(q_2 - q_1)^2} & \frac{-m_2}{(q_3 - q_1)^2} & \frac{m_2}{(q_3 + q_1)^2} & \frac{-m_3}{(q_2 + q_1)^2} & 0 \\ \frac{-m_3}{(q_2 - q_1)^2} & 0 & \frac{m_1}{(q_3 - q_2)^2} & \frac{-m_1}{(q_3 + q_2)^2} & 0 & \frac{m_3}{(q_2 + q_1)^2} \\ \frac{m_2}{(q_3 - q_1)^2} & \frac{-m_1}{(q_3 - q_2)^2} & 0 & 0 & \frac{m_1}{(q_3 + q_2)^2} & \frac{-m_2}{(q_3 + q_1)^2} \\ \frac{-m_2}{(q_3 + q_1)^2} & \frac{m_1}{(q_3 + q_2)^2} & 0 & 0 & \frac{-m_1}{(q_3 - q_2)^2} & \frac{m_2}{(q_3 - q_1)^2} \\ \frac{m_3}{(q_2 + q_1)^2} & 0 & \frac{-m_1}{(q_3 + q_2)^2} & \frac{m_1}{(q_3 - q_2)^2} & 0 & \frac{-m_3}{(q_2 - q_1)^2} \\ 0 & \frac{-m_3}{(q_2 + q_1)^2} & \frac{m_2}{(q_3 + q_1)^2} & \frac{-m_2}{(q_3 - q_1)^2} & \frac{m_3}{(q_2 - q_1)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

образуют  $L - A$  пару для системы без потенциала, а матрица  $\mathbf{D}$  имеет вид  $\mathbf{D} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, -q_3, -q_2, -q_1)$ .

Нам не удалось записать общие уравнения (112) в виде обычной  $L - A$  пары. Для приведенной системы с интегралом третьей степени  $L - A$  пара была получена в [17] с использованием совсем другой техники. Здесь надо поставить вопрос об обобщении построения этой  $L - A$  пары на систему Гаффэ.

## 5.2. Случай осевой симметрии

Как и в случае жидкого эллипсоида, несложно показать, что система (92) допускает трехмерное инвариантное многообразие, образуемое матрицами вида

$$F = \begin{pmatrix} u & v & 0 \\ -v & u & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Линейные интегралы (98) в этом случае упрощаются

$$\Xi_{12} = -M_{12} = 2(u\dot{v} - v\dot{u}), \quad \Xi_{13} = \Xi_{23} = M_{13} = M_{23} = 0. \quad (114)$$

Рассмотрим модель Овсянникова с гравитацией (93) и сделаем замену переменных

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}r \cos \psi, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \psi, \quad w = z.$$

При этом функция Лагранжа системы запишется в форме

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + \dot{z}^2) - U_g(r, z), \\ U_g &= \frac{k}{\gamma - 1} \frac{1}{(r^2 z)^{\gamma-1}} + U_e(r, z), \end{aligned} \quad (115)$$

где энергия гравитационного поля  $U_e$  выражается через элементарные функции

$$U_e = -2\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda + \frac{r^2}{2})\sqrt{\lambda + z^2}} = -\frac{2\varepsilon}{z} \times \begin{cases} \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\chi^2 - 1}}{\sqrt{\chi^2 - 1}}, & \chi > 1, \\ \frac{\ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \chi^2}}{1 - \sqrt{1 - \chi^2}} \right)}{\sqrt{1 - \chi^2}}, & \chi < 1, \end{cases}$$

где  $\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r}{z}$  — отношение полуосей. Вследствие того, что лагранжиан (115) не зависит от  $\psi$ , имеется циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = r^2 \dot{\psi} = c = \text{const},$$

который с точностью до множителя совпадает с интегралами (114).

Фиксируя значение этого интеграла, сделаем преобразование Лежандра  $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}$ ,  $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$  и получим гамильтонову систему с двумя степенями свободы в канонической форме

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_z^2) + U_*(r, z), \quad U_* = \frac{c^2}{2r^2} + U_g(r, \psi), \quad (116)$$

здесь  $U_*$  — приведенный потенциал.

Рассмотрим простейший (интегрируемый) случай — движение одноатомного газа ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ) без учета гравитации (т. е.  $U_e = 0$  см. также предыдущий раздел).

Выше было показано, что в этом случае система допускает редукцию еще на одну степень свободы и, следовательно, приводится к квадратуре. Действительно, сделаем замену переменных и времени вида

$$r = R \cos \theta, \quad z = R \sin \theta, \quad dt = R^2 d\tau,$$

где, вследствие условий  $r > 0, z > 0$ , переменная  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Для  $R, \theta$  получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(R^2) &= 4H = \text{const}, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\cos^2 \theta} + \frac{3}{2} \frac{k}{(\cos^2 \theta \sin \theta)^{2/3}} &= h_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Квадратура для  $\theta$  при  $c = 0$  и некоторых ограничениях на начальные условия была получена в работе [1]. Как мы видим, эволюция  $\theta(t)$  определяется приведенным потенциалом

$$\bar{U}_*(\theta) = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\cos^2 \theta} + \frac{3}{2} \frac{k}{(\cos^2 \theta \sin \theta)^{2/3}}.$$

При всех значениях параметров  $c, k$  эта функция имеет одно критическое значение  $\theta_0$  на интервале  $(0, \pi/2)$ , в котором  $\bar{U}_*$  обращается в минимум. Этому значению соответствует самоподобный разлет сфероидального газового облака. В остальных случаях разлет облака сопровождается колебанием размеров полуосей, при которых  $\theta$  меняется на отрезке  $(\theta_1, \theta_2)$ , где  $\theta_i$  — корни уравнения  $\bar{U}_*(\theta) = h_1$ .

В общем случае  $U_e \neq 0$  траектории системы (116) не ограничены. Однако нетрудно показать, что при  $k > \frac{1}{96} 2^{2/3} (\sqrt{665} - 21) c^2 \approx 0,43 c^2$  приведенный потенциал обладает минимумом в точке

$$\theta_0 = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad R_0 = \frac{\sqrt{3}}{8\varepsilon} (c^2 + 3 \cdot 2^{1/3} k).$$

Следовательно, вблизи минимального значения энергии  $U_*(\theta_0, R_0)$  траектории системы ограничены и можно построить отображение Пуанкаре. На рис. 3 приведено такое отображение, для которого в качестве плоскости сечения выбрана плоскость  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . На рисунке

хорошо виден хаотический слой, возникающий при расщеплении резонансных торов, что говорит о неинтегрируемости системы (116).

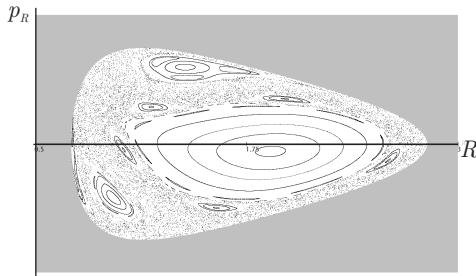


Рис. 3. Отображение Пуанкаре системы (116) при  $k = c = \varepsilon = 1$  и плоскости сечения  $\theta = \frac{\pi}{4}$

### 5.3. Обобщение случая Римана

Для газовых эллипсоидов также имеется инвариантное многообразие вида (57), т. е.

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (117)$$

Как и в случае Римана, для жидкого эллипсоида можно показать, что для газа также выполняются соотношения

$$m_1 = m_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0, \quad m_3 = \text{const}, \quad \mu_3 = \text{const}.$$

Откуда заключаем, что согласно (100) эволюция полуосей  $A_i = q_i, i = 1, 2, 3$  описывается трехстепенной гамильтоновой системой вида

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + U_*(\mathbf{q}), \quad U_* = \frac{c_1^2}{(q_1 - q_2)^2} + \frac{c_2^2}{(q_1 + q_2)^2} + U_g(\mathbf{q}), \quad (118)$$

где  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  — канонически сопряженные переменные,  $c_1 = \frac{1}{2}(m_3 + \mu_3)$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}(m_3 - \mu_3)$  — фиксированные константы.

Выше было показано, что для одноатомного газа ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ) без учета гравитации ( $U_e = 0$ ) система допускает редукцию еще на одну степень свободы. В результате в данном случае мы получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}}{d\tau} &= \mathbf{K} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{K}} + \mathbf{q} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}}, & \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} &= \mathbf{q} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{K}}, \\ \bar{H} &= \frac{1}{2}\mathbf{K}^2 + \bar{U}_*(\mathbf{q}), & \bar{U}_*(\mathbf{q}) &= \frac{3}{2} \frac{k}{(q_1 q_2 q_3)^{2/3}} + \frac{c_1^2}{(q_1 - q_2)^2} + \frac{c_2^2}{(q_1 + q_2)^2}. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна задаче о движении шарового волчка в осесимметричном потенциале [3]. Как показано в работе [46], эта система интегрируема при условии  $c_1^2 = c_2$ . Если

$c_1 = c_2 = 0$ , то дополнительный интеграл третьей степени по скоростям имеет вид

$$F_3 = K_1 K_2 K_3 - 3k \frac{K_1 q_2 q_3 + K_2 q_3 q_1 + K_3 q_1 q_2}{(q_1 q_2 q_3)^{2/3}}.$$

В случае  $c_1 = c_2 = c \neq 0$  получается дополнительный интеграл шестой степени

$$F_6 = (F_3 + F_a)^2 + 4 \frac{f(q_1^2 \theta + 3kq_3^2)(q_2^2 \theta + 3kq_3^2)}{q_3^4},$$

где

$$F_a = \frac{4c^2 q_1 q_2 q_3^2}{q_1^2 - q_2^2} K_3, \quad f = \frac{4c^2 (q_1 q_2 q_3)^{2/3}}{(q_1^2 - q_2^2)^2} q_3^2, \quad \theta = \frac{(q_1 q_2 q_3)^{2/3}}{q_1^2 q_2^2} K_1 K_2 - 3k + f.$$

В более общем случае  $c_1^2 \neq c_2^2$  система (117) становится неинтегрируемой.

На рис. 4 приведено соответствующее отображение Пуанкаре в переменных Андуайе, традиционно используемых для редукции в задачах о движении твердого тела с закрепленной точкой [3]. На рисунке хорошо видно разрушение резонансных торов и рождение изолированных периодических решений, что свидетельствует о неинтегрируемости задачи.

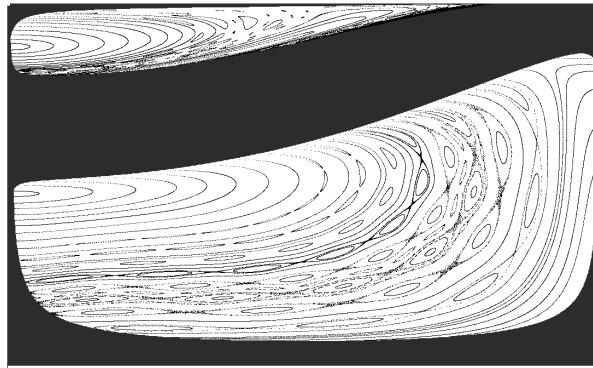


Рис. 4. Отображение Пуанкаре системы (117) на уровне энергии  $\bar{H} = 30$  при  $k = 1/3, c_1 = 1, c_2 = 0.3$ , в качестве плоскости сечения выбрана плоскость  $g = \pi$

**Благодарности.** Авторы благодарят В.В. Козлова, Б. Гаффэ, Ф. Фассо за полезные обсуждения. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08-01-00651 и 07-01-92210). Работа И. С. Мамаева и А. А. Килина выполнена в рамках гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых — докторов наук (код проекта МД-5239.2008.1) и кандидатов наук (код проекта МК-6376.2008.1) соответственно.

## Список литературы

- [1] Анисимов С. И., Лысиков Ю. И., О расширении газового облака в вакуум, *Прикл. мат. и мех.*, 1970, т. 34, с. 926–929.
- [2] Богоявленский О. И., Динамика гравитирующего газового эллипсоида, *Прикл. мат. мех.*, 1976, том. 40, № 2, с. 270–280.

- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, М.–Ижевск: ИКИ, НИЦ «РХД», 2005, 576 с.
- [4] Дерябин С. Л., Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум, *Вычислительные технологии*, том 8, №4, 2003, с. 32–44.
- [5] Зиглин С. Л., неопубликовано, личное общение.
- [6] Клейн Ф., *Лекции о развитии математики в XIX столетии, Том 1*, Пер с нем., Москва: Наука, 1989, 456 с.
- [7] Козлов В. В., Топология вещественных алгебраических кривых и интегрируемость геодезических потоков на алгебраических поверхностях, *Функциональный анализ и его приложения*, 2008, т. 42, вып. 2, с. 23–27.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика. Гидродинамика*, том 6, М.: Физматлит, 2003.
- [9] Лидов М. Л., Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютонаского тяготения, *Докл. АН СССР*, 1954, т. 97, вып. 3.
- [10] Ляпунов А. М., *Собрание сочинений, Том 5*, М.: Изд-во АН СССР, 1965, 496 с.
- [11] Ляпунов А. М., *О некоторых рядах фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости*. Посмертное издание в: *Собрание сочинений, Том 5*, М.: Изд-во АН СССР, 1965, с. 7–378. См. также Стеклов В.А., *Посмертные труды Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости*, с. 379–384.
- [12] Немчинов В. С., Разлет трехсного газового эллипса в регулярном режиме, *Прикл. мат. мех.*, 1965, т. 29, вып. 1, с. 134–140.
- [13] Овсянников Л. В., Новое решение уравнений гидродинамики, *Докл. Акад. наук СССР*, 1956, том 111, № 1, стр. 47–49.
- [14] Переломов А. М., Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли, М.–Ижевск, НИЦ «РХД», ИКИ, 2002.
- [15] Сретенский Л. Н., Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы, 1938, УМН, вып. 5, с. 187–230.
- [16] Судаков С. Н., О колебаниях вращающихся гравитирующих жидкоких эллипсоидов переменной вязкости, *Механика твердого тела*, ИПММ НАНУ, Донецк, 2002, вып. 32, с. 208–217.
- [17] Цыганов А. В., Об одной интегрируемой системе, связанной с шаровым волчком и цепочкой Тоды, *Теор. и матем. физика*, т. 124, №2, 2000, с. 310–322.
- [18] Albow A., Chenciner A. Le problème des  $n$  corps et les distances mutuelles, *Invent. Math.*, 1998. vol. 131, pp. 151–184. Пер. на рус: Албуи А., Шенсице А., Задача  $n$  тел и взаимные расстояния, в сб. *Задача Кеплера. Столкновения. Регуляризация*, М.–Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2006, с. 413–451.
- [19] Appell P., *Traité de Mécanique rationnelle*, tome IV: *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation*, 2 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1932 (IV-1), 1937 (IV-2). Пер. с франц.: Аппель, П. *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости*, Л.–М.: ОНТИ, 1936, 376 с.
- [20] Basset A., *A Treatise on Hydrodynamics: With Numerous Examples*, Vol. II, Ch. 15., Cambridge: Deighton, Bell and Co., 1888.
- [21] Basset A., On the Motion of a Liquid Ellipsoid under the Influence of its Own Attraction, *Proc. London Math. Soc.*, 1885, vol. s1-17, no. 1, pp. 255–262.
- [22] Basset A., On the Stability of a Liquid Ellipsoid which is Rotating about a Principal Axis under the Influence of its Own Attraction, *Proc. London Math. Soc.*, 1887, s1-19, pp. 46–56.



- [23] Basset A., On the Steady Motion of an Annular Mass of Rotating Liquid, *Amer. J. Math.*, 1889, vol. 11, no. 2, pp. 172–181.
- [24] Betti E., Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea, *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie II*, 1881, vol. X, pp. 173–187.
- [25] Biello J.A., Lebovitz N.R., Morison P.J., Hamiltonian Reduction of Incompressible Fluid Ellipsoids, Preprint, <http://people.cs.uchicago.edu/~lebovitz/hamred.pdf>.
- [26] Bohr N., Wheeler J., The Mechanism of Nuclear Fission, *Phys. Rev.*, 1939, vol. 56, pp. 426–450.
- [27] Brioschi F., Développements relatifs au § 3 des Recherches de Dirichlet sur un problème d’Hydrodynamique, vol. 58, pag. 181 et suivantes de ce Journal, *J. reine angew. Math. (Crelle’s Journal)*, 1861, Bd. 59, S. 63–73.
- [28] Bryan G. H., On the Stability of a Rotating Spheroid of Perfect Liquid, *Proc. Roy. Soc. London*, 1889–1890, vol. 47, pp. 367–376.
- [29] Cayley A., A Memoir on Cubic Surfaces, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1869, vol. 159, pp. 231–326.
- [30] Chandrasekhar S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, New Haven, London: Yale University Press, 1969. Пер. на рус.: С. Чандraseкхар, *Эллипсоидальные фигуры равновесия*, М.: Мир, 1973.
- [31] Cisneros J. U., Martinez F. J., Montalvo J. D. On the Stability of a Self-Gravitating Inhomogeneous Fluid in the form of Two Confocal Spheroids Rotating with Different Angular Velocities, *Rev. Mexicana Astron. Astrov.*, 2000, vol. 36, pp. 185–210.
- [32] Cisneros J. U., Martinez F. J., Montalvo J. D., On the Stability of a Self-Gravitating Inhomogeneous Fluid in the Form of Two Confocal Ellipsoids Carrying Dedekind-type Internal Currents, *Rev. Mexicana Astron. Astrov.*, 2004, vol. 40, pp. 167–180.
- [33] Darwin G. H., On the Figure and Stability of a Liquid Satellite, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1906, vol. 206, pp. 161–248; см. также *Scientific Papers*, vol. 3, Cambridge University Press, 1910, p. 436.
- [34] Dedekind R., Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung, *J. reine angew. Math. (Crelle’s Journal)*, 1861, Bd. 58, S. 217–228.
- [35] Dirichlet G. L., Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Mathematisch-Physikalische Klasse)*, Jg. 1857, No. 14, Aug. 10. S. 203–207 (Dirichlet’s Werke, Bd. 2, S. 28).
- [36] Dirichlet G. L., Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik (Aus dessen Nachlass hergestellt von Herrn R. Dedekind zu Zürich), *J. reine angew. Math. (Crelle’s Journal)*, 1861, Bd. 58, S. 181–216.
- [37] Duhem M. P., Sur la stabilité de l’équilibre relatif d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation, *J. de Math. Pures et Appl.*, 1905, vol. 7, ser. 5, pp. 331–350.
- [38] Dyson F. W., The Potentials of Ellipsoids of Variable Densities, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1891, vol. 25, pp. 259–288.
- [39] Dyson F. J., Dynamics of a Spinning Gas Cloud, *J. Math. Mech.*, 1968, vol. 18, no. 1, pp. 91–101.
- [40] Eriguchi Y., Muller E., A General Computational Method for Obtaining Equilibria of Self-gravitating and Rotating Gases, *Astron. Astrophys.*, 1985, vol. 146, pp. 260–268.
- [41] Fasso F., Lewis D., Stability Properties of the Riemann Ellipsoids, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2001, vol. 158, pp. 259–292.
- [42] Ferrers N. M., On the Potentials, Ellipsoids, Ellipsoidal Shells, Elliptic Laminae, and Elliptic Rings, of Variable Densities, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1875, vol. 14, pp. 1–23.

- [43] Fujimoto F., Gravitational Collapse of Rotating Gaseous Ellipsoids, *Astrophys. J.*, 1968, vol. 152, no. 2 pp. 523–536.
- [44] Gaffet B., Two Hidden Symmetries of the Equations of Ideal Gas Dynamics, and the General Solution in a Case of Nonuniform Entropy Distribution, *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 134, p.179–194.
- [45] Gaffet B., SU(3) Symmetry of the Equations of Unidimensional Gas Flow, with Arbitrary Entropy Distribution, *J. Math. Phys.*, 1984, vol. 25, no. 2, pp. 245–255.
- [46] Gaffet B., Expanding Gas Clouds of Ellipsoidal Shape: New Exact Solutions, *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 325, pp. 113–144.
- [47] Gaffet B., Spinning Gas without Vorticity: the Two Missing Integrals, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2001, vol. 34, pp. 2087–2095.
- [48] Gaffet B., Spinning Gas Clouds: Liouville Integrability, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2001, vol. 34, pp. 2097–2109.
- [49] Giesen A., Über die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit, *Jahres-Bericht über die höhere Schule in Opladen*, 1872–1873 гг.
- [50] Graber J. L., Rosensteel G., Circulation of a Triaxial, Charged Ellipsoidal Droplet, *Phys. Rev. C*, 2002, vol. 66, 034309.
- [51] Hagen J., Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer auf einem dreiaxigen Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten ausgebreiteten Flüssigkeit, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1877, vol. 22, pp. 65–86.
- [52] Helmholtz H., Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, *J. reine angew. Math.*, 1858, B. 55, S. 25–55. Reprinted in: *Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann Helmholtz*, I, Barth, Leipzig, 1882, S. 101–134.
- [53] Hicks W. M., On the Motion of a Mass of Liquid under its Own Attraction, When the Initial Form is an Ellipsoid, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1883, Vol. IV, Pt. VI, pp. 1–4.
- [54] Hill M. J. M., Note on the Motion of a Fluid Ellipsoid under its own Attraction, *Proc. London Math. Soc.*, 1891, s1-23, pp. 88–95.
- [55] Holm D. D., Magnetic Tornadoes: Three-Dimensional Affine Motions in Ideal Magnetohydrodynamics, *Phys. D*, 1983, vol. 8, pp. 170–182.
- [56] Ipser J. R., Managan R. A., On the Existence and Structure of Inhomogeneous Analogs of the Dedekind and Jacobi Ellipsoids, *Astrophys. J.*, 1981, vol. 250, pp. 362–372.
- [57] C. G. J. Jacobi, Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium, *Gesammelte Werke*, Vol. 4, Berlin: Reimer, 1886. S. 531–539.
- [58] Jeans J. H., *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics*, Cambridge University Press, 1919.
- [59] Khvedelidze A., Mladenov D., Euler-Calogero-Moser system from SU(2) Yang-Mills theory, [arXiv:hep-th/9906033v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/9906033v3).
- [60] Kirchhoff G., *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik*, Leipzig: Teubner, 1876.
- [61] Lamb H., *Hydrodynamics*, New York: Dover Publications, 1932. Пер. на рус: Г. Ламб, *Гидродинамика*, М.: Гостехиздат, 1947; доступн. изд.: М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2003.
- [62] Lebovitz N. R., On the Principle of the Exchange of Stabilities. I. The Roche Ellipsoids, *Astrophys. J.*, 1963, vol. 138, pp. 1214–1217.
- [63] Lebovitz N. R., The Mathematical Development of the Classical Ellipsoids, *Intern. Jour. Engineering Science*, 1998, vol. 36, no. 12, pp. 1407–1420.



- [64] Lichtenstein L., *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, Berlin: Springer-Verlag, 1933. Лихтенштейн Л., *Фигуры равновесия вращающейся жидкости*, М.: «Наука», 1965. Репринтное издание: Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 252 стр.
- [65] Liouville J., Formules générales relatives à la question de la Stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe, *J. Math. Pures Appl.*, 1855, vol. 20, pp. 164–184.
- [66] Lipschitz R., Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals, und Bestimmung der Bewegung für den Grenzfall eines unendlichen elliptischen Cylinders, *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)*, 1874, Bd. 78, S. 245–272.
- [67] Love A. E. H., On the Motion of a Liquid Elliptic Cylinder under its Own Attraction, *Quart. J. of Pure and Appl. Math.*, 1889, vol. 23, pp. 153–158.
- [68] Love A. E. H., The Oscillations of a Mass of Gravitating Liquid in the Form of an Elliptic Cylinder which Rotates as if Rigid about its Axis, *Quart. J. of Pure and Appl. Math.*, n.d., pp. 158–165.
- [69] Lynden-Bell D., On the gravitational collapse of a cold rotating gas cloud, *Proc. Camb. Phys. Soc.*, 1962, vol. 58, pp. 709–711.
- [70] Lyttleton R. A., *The Stability of Rotating Liquid Masses*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953. Пер. на рус: Р.А. Литтлтон, *Устойчивость вращающихся масс жидкости*, М.-Ижевск: НИЦ «РХД», 2001.
- [71] Marshalek E. R., An overlooked figure of equilibrium of a rotating ellipsoidal self-gravitating fluid and the Riemann theorem, *Phys. Fluids*, 1996, vol. 8, no. 12, pp. 3414–3422.
- [72] Narlikar V. V., Larmor J., The Kelvin–Poincaré Problem of Stellar Evolution, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1934, vol. 144, no. 851, pp. 28–46.
- [73] Martinez F. J., Cisneros J., Montalvo D., On Equilibrium Figures for Ideal Fluids in the Form of Confocal Ellipsoids Rotating with Common Angular Velocity, *Rev. Mexicana Astron. Astrof.*, 1990, vol. 20, pp. 15–22. See also: Erratum, *ibid.*, pp. 153–154.
- [74] Padova E., Sul moto di un ellissoide fluido ed omogeneo, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, t. 1, 1871, p. 1–87.
- [75] Pizzetti P., *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*, Pisa, 1912. Пер. на рус.: П. Пицетти, *Основы механической теории фигуры планет*, М.–Л.: ГТТИ, 1933, 170 с.
- [76] Poincaré H., Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Acta Math.*, vol. 7, 1885, pp. 259–380.
- [77] Poincaré H., *Figures d'équilibre d'une masse fluide (Leçons professées à la Sorbonne en 1900)*, Paris: Gauthier-Villars, 1902. Пер. на рус: А. Пуанкаре, *Фигуры равновесия жидкой массы*, М.-Ижевск: НИЦ «РХД», 2001.
- [78] Riemann B., Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoïdes, *Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen*, 1861. Пер. на рус: Б. Риман, О движении жидкого однородного эллипсоида, в кн: Б. Риман, *Сочинения*, М.–Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 339–366.
- [79] Roberts W., Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)*, 1863, vol. 62, pp. 50–60.
- [80] Roche E., Mémoire sur la figure d'une masse fluide, soumise à l'attraction d'un point éloigné, *Acad. des Sci. de Montpellier*, 1849–1850 т. 1, pp. 243–262, 333–348; 1852, т. 2, pag. 21.
- [81] Roche E., Essai sur la Constitution et l'Origine du Système solaire, *Aca. de Montpellier Section des Sciences*, 1873, vol. 8, p. 235.

- [82] Rosenkilde C. E., Stability of Axisymmetric Figures of Equilibrium of a Rotating Charged Liquid Drop, *J. Math. Phys.*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 98–118.
- [83] Rosensteel G., Tran H. Q., Hamiltonian Dynamics of Self-gravitating Ellipsoids, *The Astrophysical Journal*, 1991, vol. 366, pp. 30–37.
- [84] Rosensteel G., Gauge Theory of Riemann Ellipsoids, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2001, vol. 34, L1–L10.
- [85] Rossner L. F., The Finite-amplitude Oscillations of the Maclaurin Spheroids, *Astrophys. J.*, 1967, vol. 149, pp. 145–168.
- [86] Routh E. J., *A Treatise on Analytical Statics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1922, Vol. 2.
- [87] Schläfli L., On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of Their Lines, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1863, vol. 153, pp. 193–241.
- [88] Stekloff W., Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale les parties s'attirent suivant la loi de Newton, *Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, 1908, t. 25, pp. 469–528.
- [89] Stekloff W., Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale les parties s'attirent suivant la loi de Newton (Suite.), *Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, 1909, t. 26, pp. 275–336.
- [90] Tedone O., Il moto di un ellissoide fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1895, t. 7, pp. I–IV+1–100.
- [91] Thomson W. and Tait P. G., *Treatise on Natural Philosophy*, Cambridge University Press, Part II, 1912 (first edition 1883).
- [92] Veronnet A., Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte, *J. de Math. Pures et Appl.*, 1912, vol. 8, ser. 6, pp. 331–463.
- [93] Volterra V., Sur la Stratification d'une Masse Fluide en Équilibre, *Acta Math.*, 1903, vol. 27, no. 1, pp. 105–124.
- [94] Wangerin A., Über ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus gewissen Flächen vierter Ordnung, *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)*, 1876, vol. 82, pp. 145–157.
- [95] Wojciechowski S., An Integrable Marriage of the Euler Equations with the Calogero-Moser System, *Phys. Lett. A*, 1985, vol. 111, no. 3, pp. 101–103.
- [96] Zel'dovich Ya. B., Newtonian and Einsteinian Motion of Homogeneous Matter, *Soviet Astronomy*, 1964, vol. 8, №5, (transl. from *Astronom. Zh.*, 1964, vol. 41, № 5, pp. 872–883).

