

Движение газа из распределенного источника в поперечном магнитном поле

К. К. Измайлова, А. П. Чупахин

Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15
E-mails: k-iz@yandex.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru

Получено 04 апреля 2008 г.

Построено двумерное стационарное решение уравнений магнитной газовой динамики (МГД), описывающее состояние проводящей газовой среды при наличии магнитного поля. Ключевым уравнением при описании решения является уравнение Бендиксона с вырожденной особой точкой. На основе теории Фроммера исследовано поведение интегральных кривых вблизи этой точки и на бесконечности. Дана физическая интерпретация в терминах движения газа. Показано, что существуют два режима течения газа из линейно распределенного источника в поперечном магнитном поле, отличающиеся асимптотиками на большом удалении от источника.

Ключевые слова: магнитная газовая динамика, частично инвариантное решение, линейно распределенный газовый источник в поперечном магнитном поле, уравнение Бендиксона, метод Фроммера.

K. K. Izmaylova and A. P. Chupakhin

Gas flow from the distributed source in a cross-section magnetic field

We investigate the partial invariant solution of the system of the equations of the magneto hydrodynamics (MHD). This solution describes plane, steady motions of infinitely conducting gas in attendance of a magnetic field. The key-equation is the Bendikson equation type with degenerated singular point. We research topology of integral curves in a neighborhood of this singular point and infinity applying method of Frommer. There are two regimes of gas motions.

Keywords: magneto hydrodynamics, partial invariant solution, distributed source in a cross-section magnetic field, Bendikson equation, method of Frommer.

Mathematical Subject Classifications: 76W05, 35C05, 34C05

1. Физическая постановка задачи, общая система уравнений

Состояние движущейся проводящей газовой среды при наличии магнитного поля напряженности $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ описывается заданием скорости $\vec{u} = (u, v, w)$, плотности ρ , давления p и энтропии S как функций времени t и пространственных координат $\vec{x} = (x, y, z)$. Система уравнений магнитной гидродинамики для невязкого бесконечно проводящего газа имеет вид [1]

$$\begin{cases} \rho D\vec{u} + \nabla p = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \vec{H} \times \vec{H}, \\ D\rho + \rho \text{div} \vec{u} = 0, \\ D\vec{H} + \vec{H} \text{div} \vec{u} - (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{u} = 0, \\ \text{div} \vec{H} = 0, \\ DS = 0, \\ p = F(\rho, S). \end{cases} \quad (1)$$

Последним в системе (1) является уравнение состояния газа. Далее рассматривается, как правило, политропное уравнение состояния $p = S\rho^\gamma$, где $\gamma \geq 1$ — показатель адиабаты.

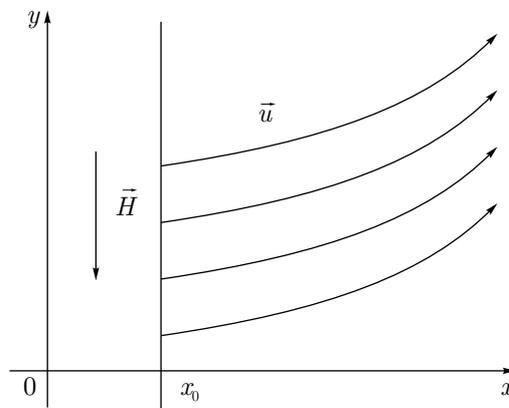


Рис. 1. Схема течения газа

Напряженность электрического поля E находится после решения системы (1) из закона Ома.

Групповые свойства системы (1) описаны в [2], там же приведены и некоторые инвариантные решения (Коробейников, Фукс и Рихтер, Гриднев, Фукс и др.). Оптимальная система подалгебр алгебры симметрии (1) для политропного уравнения состояния построена в [3].

Запишем подробно систему (1) для случая плоских стационарных течений газа ($H_3 = w = 0$), который и будет изучаться в дальнейшем:

$$\begin{cases} uu_x + vv_y = -\frac{1}{\rho} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right)_x + \frac{1}{4\pi\rho} (H_1 H_{1x} + H_2 H_{1y}), \\ uv_x + vv_y = -\frac{1}{\rho} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right)_y + \frac{1}{4\pi\rho} (H_1 H_{2x} + H_2 H_{2y}), \\ u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0, \\ uH_{1x} + vH_{1y} - H_1 u_x - H_2 u_y + H_1(u_x + v_y) = 0, \\ uH_{2x} + vH_{2y} - H_1 v_x - H_2 v_y + H_2(u_x + v_y) = 0, \\ H_{1x} + H_{2y} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $H^2 = |\vec{H}|^2 = H_1^2 + H_2^2$.

2. Характеристики системы уравнений магнитной газовой динамики

Слабые разрывы, имеющие скорости относительно сплошной среды a_{\pm} , a_A , a_+ и a_- , где $a_{\pm} \equiv 0$, $a_A \equiv b_1 \left(\vec{b} \equiv \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)$, $a_{+,-} \equiv \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_0^2 + b^2 + 2a_0b_x} \pm \sqrt{a_0^2 + b^2 - 2a_0b_x} \right)$, $a_0 = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, называются, соответственно, *энтропийными*, *альфвеновскими*, *быстрыми магнитозвуковыми* и *медленными магнитозвуковыми* [1].

Характеристическими поверхностями называются поверхности, на которых возможны слабые разрывы. В случае плоских движений характеристические поверхности являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси z . Линии пересечения этих поверхностей с плоскостью (x, y) называются *характеристическими линиями* или просто *характеристиками*. Скорость распространения поверхностей слабого разрыва равна сумме нормальной составляющей скорости газа и одной из скоростей распространения малых возмущений. В случае стационарных движений, когда характеристики неподвижны, это условие принимает вид

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \pm a_i = 0, \tag{3}$$

где a_i — одна из указанных выше скоростей слабых разрывов, \vec{n} — единичный вектор нормали к характеристике, лежащий в плоскости x, y , и служит для определения направления характеристик. Для плоских движений, в которых $H_z = 0, w = 0$, альфвеновские возмущения невозможны в силу (3). Характеристики, соответствующие энтропийным разрывам, совпадают с линиями тока. Направления характеристик, соответствующих быстрым и медленным магнитозвуковым разрывам, определяются из условия

$$u_n^2 = a_{+,-}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(a_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right) \pm \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right)^2 - \frac{H_n^2 a_0^2}{\pi\rho}} \right], \tag{4}$$

где верхний знак соответствует быстрой магнитозвуковой скорости, нижний знак — медленной. Перейдем в (4) к безразмерным переменным

$$M_i = \frac{u_i}{a_0} \text{ и } N_i^2 = \frac{H_i^2}{4\pi\gamma p} = \frac{H_i^2}{4\pi\rho a_0^2}, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Пусть $y = y(x)$ — уравнение характеристики в плоскости течения.

Воспользовавшись тем, что

$$u_n = u_1 \sin \alpha - u_2 \cos \alpha, \quad H_n = H_1 \sin \alpha - H_2 \cos \alpha, \\ H^2 = H_1^2 + H_2^2, \quad \tan \alpha = y'(x), \quad N^2 = N_1^2 + N_2^2,$$

преобразуем уравнение (4) к следующему виду:

$$(y')^4 [M_1^4 + N_1^2 - M_1^2(1 + N^2)] + (y')^3 [2M_1M_2(1 + N^2) - 4M_1^2M_2 - 2N_1N_2] + \\ + (y')^2 [6M_1^2M_2^2 - M^2(1 + N^2) + N^2] + y' [M_1M_2(1 + N^2) - 4M_1M_2^3 - 2N_1N_2] + \\ + M_2^4 - M_2^2(1 + N^2) + N_2^2 = 0, \tag{6}$$

где y' означает производную по x .

3. Точное решение уравнений МГД

В данной работе исследуется частично инвариантное решение уравнений МГД (2), которое наследуется из газовой динамики в отсутствие магнитного поля [4]. Оно имеет представление

$$u = \frac{1}{\sigma'}, v = \frac{y}{\sigma}, \rho = \rho(x), p = S_0 \rho^\gamma, \vec{H} = (0, H(x)), \quad (7)$$

где $\sigma = \sigma(x)$ — неизвестная функция ($\gamma \geq 1, S_0 = \text{const}$). Решение (7) описывает установившееся двумерное движение газа в поперечном магнитном поле.

Штрихом в (7) и далее обозначена производная по x .

После подстановки представления (7) в систему (2) и частичного интегрирования, получаются выражения для плотности, давления и магнитного поля

$$\rho = \rho_0 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|, p = p_0 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^\gamma, H = H_0 \sigma', \quad (8)$$

где $\rho_0 > 0, p_0 > 0, H_0$ — некоторые постоянные.

Функция $\sigma = \sigma(x)$ является решением первого уравнения импульсов в (2)

$$uu' + \frac{1}{\rho} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right)' = 0. \quad (9)$$

В отличие от газовой динамики, уравнение (9) не интегрируется. В магнитной гидродинамике интеграл Бернулли существует лишь в специальных случаях [1].

Подставляя в (9) представление (7) и (8), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{\sigma''}{\sigma'^2} + \frac{1}{\rho_0} \left| \frac{\sigma}{\sigma'} \right| \left(p_0 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^\gamma + \frac{H_0^2 \sigma'^2}{8\pi} \right)' = 0. \quad (10)$$

Сложность исследования уравнения (10) заключается в том, что оно не разрешено относительно производной и в нем присутствует ее модуль. Это уравнение принадлежит к классу неявных дифференциальных уравнений [5].

4. Вывод и преобразования ключевого уравнения

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Уравнение (10) приводится к уравнению первого порядка

$$z^{\gamma+2} \frac{dX}{dz} = -\beta^2 X^\gamma + z^3 X^{\gamma+1} + z^{\gamma+1} X \quad (11)$$

следующей заменой переменных

$$X(x) = \varepsilon \frac{H_0}{2\sqrt{p_0 \pi^\gamma}} \sigma(x), \text{ где } \varepsilon = \text{sgn}(\sigma(x)), \quad (12)$$

$$X' = \varepsilon_1 z(X), \text{ где } \varepsilon_1 = \text{sgn}(\sigma'(x)), \quad (13)$$



с характерным параметром

$$\beta^2 = \frac{\rho_0 H_0^2}{4\pi\gamma^2 p_0^2}. \tag{14}$$

Доказательство.

Рассмотрим различные случаи:

1. Пусть $\sigma > 0, \sigma' < 0$. Тогда $|\sigma'/\sigma| = (-\sigma')/\sigma$.

В силу формул (12), (14) получим уравнение

$$(X^{\gamma+1}(-X')^3 + X(-X')^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma) X'' = (-X')^{\gamma+2}. \tag{15}$$

После замены (13), в которой $\varepsilon_1 = -1$, и изменения ролей переменных z и X уравнение (15) приводится к уравнению (11).

Остальные случаи ($\sigma > 0, \sigma' > 0, \sigma < 0, \sigma' > 0$ и $\sigma < 0, \sigma' < 0$) рассматриваются аналогично. ■

Уравнение (11) называется *уравнением Бендиксона* [6] и является **ключевым уравнением** задачи. Точка покоя $O(0, 0)$ является вырожденной, поскольку собственные числа линеаризации равны нулю в этой точке и, кроме того, матрица линеаризации является тождественно нулевой при $\gamma > 1$. Заметим, что введенные переменные z и X положительны. Значит, достаточно исследовать ключевое уравнение при $z > 0, X > 0$.

Лемма 1. При $\gamma = 1$ уравнение (11) интегрируется явно:

$$X = \frac{4ze^{\frac{\beta^2}{2z^2}}}{\beta^2(\Phi(z) + c)}, \text{ где } \Phi(z) = \int z^{-2}e^z dz, c = \text{const}.$$

5. Общая характеристика уравнения Бендиксона

Одним из эффективных методов исследования поведения интегральных кривых в окрестности вырожденной особой точки является метод расщепления, предложенный Фроммером [7, 8]. Он является распространением метода многоугольника Ньютона на дифференциальные уравнения. В дальнейшем этот метод был развит А. Ф. Андреевым [7].

Для уравнения Бендиксона

$$x^{h_0} y' = a_0 y^{m_0} (1 + \varphi_0(y)) + f_0(x, y), \tag{16}$$

где φ_0, f_0 — голоморфные функции и $\varphi_0(0) = 0, f_0(0, y) = 0, h_0, m_0$ — вещественные числа, рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x^{h_0}, \frac{dy}{dt} = a_0 y^{m_0} (1 + \varphi_0(y)) + f_0(x, y). \tag{17}$$

Справедлива следующая теорема [7].



Теорема 2. Траектории системы (17) образуют в окрестности точки покоя O расположение

- 1) типа узел, если m_0, h_0 — нечетные и $a_0 > 0$;
- 2) типа четырехсепаратрисное седло, если m_0, h_0 — нечетные, $\min\{m_0, h_0\} = 1$ и $a_0 < 0$;
- 3) типа седло-узел с двумя гиперболическими и одним параболическим сектором, если $m_0 = 1, h_0$ — четное или $h_0 = 1, m_0$ — четное;
- 4) типа четырехсепаратрисное седло или типа седло-узел с четырьмя гиперболическими и одним или с двумя параболическими секторами, если m_0, h_0 — нечетные, $a_0 < 0, m_0 > 1, h_0 > 1$;
- 5) типа седло-узел с двумя гиперболическими и одним или двумя параболическими секторами, если $m_0 > 1$ — нечетное, а h_0 — четное;
- 6) типа двухсепаратрисное седло или типа седло-узел с двумя гиперболическими и одним или с двумя параболическими секторами, если m_0 — четное, $h_0 > 1$.

Применим ее к исследованию решения (7). Ключевое уравнение (11) имеет вид (16):

$$z^{\gamma+2} \frac{dX}{dz} = -\beta^2 X^\gamma + z^3 X^{\gamma+1} + z^{\gamma+1} X.$$

Разберем следующие классификационные случаи.

а) Пусть γ — целое число.

Тогда $h_0 = \gamma + 2, m_0 = \gamma, a_0 = -\beta^2 < 0$.

1) Если γ — четное, то m_0, h_0 — четные, следовательно, имеем случай 6 теоремы 2.

2) Если γ — нечетное, то m_0, h_0 — нечетные и имеем случай 4 теоремы 2.

б) Пусть γ — рациональное число: $\gamma = a/b > 1$, т. е. $a > b$.

Тогда заменой $t = z^{\frac{1}{b}}, Y = X^{\frac{1}{b}}$ исходное уравнение (11) приводится к такому:

$$t^{a+b+1} Y' = -\beta^2 Y^{a-b+1} + t^{3b} Y^{a+1} + t^{a+b} Y. \quad (18)$$

В этом случае: $h_0 = a + b + 1, m_0 = a - b + 1, a_0 = -\beta^2 < 0$.

1) Пусть a — четное, b — нечетное (или наоборот). Тогда m_0, h_0 — четные, следовательно, имеем случай 6 теоремы 2;

2) Пусть a, b — нечетные, тогда m_0, h_0 — нечетные, имеем случай 4 теоремы 2.

Итак, по теореме 2 для различных γ траектории имеют расположение либо типа седло, либо типа седло-узел.

Для более детального анализа поведения интегральных кривых в первой четверти воспользуемся теорией Фроммера. Для удобства изложения приведем в следующем параграфе основные определения и понятия этой теории, основываясь на оригинальной работе [8]. О некоторых других аспектах этой теории см. [9, 10].

6. Элементы теории Фроммера

Рассматривается уравнение

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad P(0, 0) = Q(0, 0) = 0, \quad (19)$$



в котором P и Q могут быть разложены в степенные ряды в окрестности начала координат, т. е.

$$P(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k = P_m(x, y) + \varphi(x, y),$$

$$Q(x, y) = \sum b_{ik} x^i y^k = Q_n(x, y) + \psi(x, y),$$

где P_m и Q_n — однородные полиномы степени m и n соответственно, а остатки степенных рядов φ и ψ удовлетворяют следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\varphi(x, y)}{|x|^m + |y|^m} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\psi(x, y)}{|x|^n + |y|^n} = 0.$$

Возникает вопрос: существуют ли непрерывно дифференцируемые функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$, которые являются решением уравнения (19) в окрестности начала координат и для которых при некотором значении параметра, например при $t = 0$, $x(0) = y(0) = 0$. Пусть $x'(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = p$, $y'(0) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = q$, так что p и q не равны одновременно нулю.

Так как должно удовлетворяться дифференциальное уравнение (19), то

$$y'(t) \left\{ \frac{1}{t^n} Q_n + \frac{|x|^n + |y|^n}{t^n} \frac{\psi}{|x|^n + |y|^n} \right\} = x'(t) \left\{ \frac{1}{t^m} P_m + \frac{|x|^m + |y|^m}{t^m} \frac{\varphi}{|x|^m + |y|^m} \right\} t^{m-n}. \quad (20)$$

Если в уравнении (20) перейти к пределу при $t \rightarrow 0$, то получится уравнение для определения p/q , т. е. направлений, вдоль которых интегральные кривые могут входить в особую точку. Эти направления называются *критическими*, а определяющее их уравнение $G(p, q) = 0$ — *характеристическим уравнением*.

Различаются три случая:

$$\begin{aligned} m > n, & \quad G(p, q) \equiv qQ_n(p, q) = 0, \\ m < n, & \quad G(p, q) \equiv pP_m(p, q) = 0, \\ m = n, & \quad G(p, q) \equiv qQ_n(p, q) - pP_m(p, q) = 0. \end{aligned}$$

В зависимости от свойств характеристического уравнения различаются три типа:

1. Особый тип: $G(p, q) \equiv 0$.
2. Определенный тип: $G(p, q)$ определенная форма; нет (действительных) критических направлений.
3. Неопределенный тип: $G(p, q)$ неопределенная форма; существует некоторое конечное число (действительных) критических направлений.

В дальнейшем нам понадобится более детально изучать неопределенный тип.

Чтобы определить характер интегральных кривых в окрестности критического направления, примем исследуемое критическое направление за ось x . Будем различать два вида критических направлений.

1. Обыкновенное критическое направление (общий случай).
2. Особое критическое направление.

Ось x называется особым критическим направлением в том случае, если $y = 0$ одновременно удовлетворяет как характеристическому уравнению $G(x, y) = 0$, так и уравнению $Q_m(x, y) = 0$, т. е. если кривая $Q(x, y) = 0$ касается оси x в начале координат. В этом случае в любой близости начала координат имеются направления поля, перпендикулярные критическому направлению.



Если последнее условие не выполнено, то ось x называется обыкновенным критическим направлением.

Обыкновенные критические направления также различаются по двум видам:

а) Простые обыкновенные критические направления, получающиеся в случае простого корня характеристического уравнения.

б) Кратные обыкновенные критические направления, получающиеся в случае кратного корня характеристического уравнения.

Пусть $y = 0$ обыкновенное критическое направление. Образует функцию

$$\psi(u, x) = \frac{P(x, ux)}{Q(x, ux)} - u,$$

представляющую собой разность направления поля и направления радиуса-вектора. Если ось x есть критическое направление, то $\psi(0, 0) = 0$. Если ось x есть простое обыкновенное критическое направление, то, кроме того, $\frac{\partial \psi}{\partial u}(0, 0) \neq 0$. Здесь могут представиться два разных случая:

1. Пусть $\frac{\partial \psi}{\partial u}(0, 0) > 0$. Тогда все интегральные кривые входят в особую точку с горизонтальной касательной.

2. Пусть $\frac{\partial \psi}{\partial u}(0, 0) < 0$. Тогда существует одна и только одна интегральная кривая, которая входит в особую точку вблизи критического направления.

Для дальнейшего исследования поведения интегральных кривых в секторе, заключающем ось x , являющуюся критическим направлением, этот сектор разбивается на части с криволинейными границами. Эти кривые должны соприкоснуться с интегральными кривыми теснее касательных.

Введем понятие порядка и меры кривизны функции [8,9]. Пусть $y(x)$ — непрерывная функция, определенная для $x > 0$, u и ν — вещественные числа, причем $0 < |u| < \infty$. Если $\lim_{x \rightarrow +0} (y(x)/x^\nu) = u$, то ν называется *порядком кривизны*, а число u — *мерой кривизны* функции $y(x)$. Геометрически это означает, что график функции $y = y(x)$ входит в начало координат, касаясь параболы $y = ux^\nu$. Если график функции $y = y(x)$ расположен ниже каждой параболы вида $y = ux^\nu$, то говорят, что ее мера кривизны равна нулю.

В дальнейшем рассматриваем ν не меньше единицы, так как исследуются интегральные кривые, касающиеся оси x .

Чтобы установить теперь, какие из порядков кривизны вообще могут встретиться, сделаем в дифференциальном уравнении (19) подстановку $y(x) = x^{\nu(x)}$. Тогда получим

$$\frac{d\nu}{dx} = \nu' = \frac{P(x, x^\nu) - \nu x^{\nu-1} Q(x, x^\nu)}{x^\nu Q(x, x^\nu) \ln x}. \quad (21)$$

Если отвлечься от интегральных кривых плоскости (x, y) , имеющих очень большой порядок кривизны, т. е. большой некоторого фиксированного числа N , то дифференциальное уравнение (21) нужно исследовать в области

$$1 \leq \nu \leq N, 0 \leq x \leq \delta.$$

В частности, нужно установить, существуют ли на оси ν , которая сама оказывается интегральной кривой, такие точки $(0, \nu_i)$, через которые могут проходить интегральные кривые, отличные от самой оси ν . Эти значения ν_i и будут возможными порядками кривизны.

В правой части дифференциального уравнения (21) числитель и знаменатель можно сократить на определенную степень x . Для этой цели необходимо установить, какой из показателей

сумм $P(x, x^\nu)$ и $Q(x, x^\nu)$ будет наименьшим. Эти показатели имеют вид $i + k\nu$ и, следовательно, в интервале $1 \leq \nu \leq N$ принимают наименьшее значение при $\nu = 1$ и наибольшее при $\nu = N$. Но при определенном значении ν из этого интервала наименьшее значение могут принимать только те показатели, минимум которых меньше, чем максимум M каждого из этих показателей; следовательно, только те, для которых $i + k < M$, т. е. лишь конечное число (см. рис. 2).

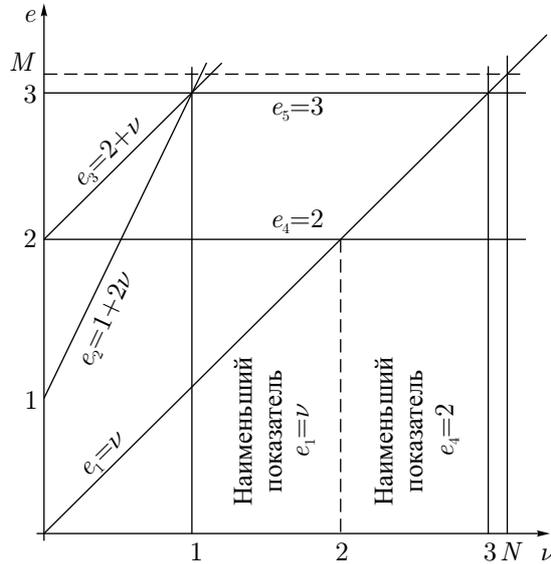


Рис. 2. Схема Фроммера

Таким образом, весь интервал может быть разбит на конечное число частичных интервалов, которые определяются так, что внутри каждого такого интервала из слагаемых $a_{ik}x^{i+k\nu}$ выделяется определенный член $a_{I_1K_1}x^{I_1+K_1\nu}$, степень которого является наименьшей на этом интервале. Значения ν_i , осуществляющие это разбиение, будут получаться из линейных уравнений и, следовательно, будут рациональными числами. Такое же разбиение получается для суммы $\sum b_{ik}x^{i+k\nu}$. Объединяя эти два разбиения, получим конечное число рациональных точек ν_i , разбивающих интервал $1 \leq \nu \leq N$ на такие частичные интервалы, в каждом из которых из $\sum a_{ik}x^{i+k\nu}$ можно выделить степень $x^{e_1} \equiv x^{I_1+K_1\nu}$ и $\sum b_{ik}x^{i+k\nu}$ из степени $x^{e_2} \equiv x^{I_2+K_2\nu}$.

Можно показать, что внутри каждого из таких интервалов не может существовать более одного значения ν , которое может быть порядком кривизны интегральных кривых. Тогда в качестве возможных порядков кривизны мы получим множество рациональных точек разбиения и некоторое конечное же множество внутренних точек.

Для нахождения внутренних точек рассмотрим дифференциальное уравнение (21) в таком частичном интервале. В этом интервале

$$P(x, x^\nu) = x^{e_1} \sum a_{ik}x^{i+k\nu-e_1}, \quad Q(x, x^\nu) = x^{e_2} \sum b_{ik}x^{i+k\nu-e_2}.$$

Таким образом,

$$\nu' = \frac{x^{e_1} \sum a_{ik}x^{i+k\nu-e_1} - \nu x^{e_2+\nu-1} \sum b_{ik}x^{i+k\nu-e_2}}{x^{e_2+\nu} \ln x \sum b_{ik}x^{i+k\nu-e_2}}.$$

Если $e_1 \leq e_2 + \nu - 1$, то это частное можно сократить на x^{e_1} , в противном случае — на $x^{e_2+\nu-1}$.



Таким образом, получаем

$$\nu' = \frac{Z(x, \nu)}{x^r N(x, \nu) \ln x}, \quad r \geq 1, \quad N(0, \nu) = b_{I_2 K_2} \neq 0.$$

Можно показать, что ось ν может иметь общую точку с отличной от нее интегральной кривой только в той точке $(0, \nu_i)$, где $Z(0, \nu) = 0$.

Определим границу N . Так как P и Q предполагаются несократимыми, то они не могут одновременно содержать множитель y . Могут представиться два различных случая.

1. $P(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k$ не содержит множителя y . Тогда в этой сумме имеются члены вида $a_{r0} x^r$ и среди них член $a_{\rho 0} x^\rho$, показатель которого является наименьшим. Можно показать, что в этом случае в качестве N можно взять $\rho + 1$.

2. $P(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k$ содержит множитель y ; тогда этого множителя не содержит $Q(x, y) = \sum b_{ik} x^i y^k$. Следовательно, в последней сумме существует член $b_{\rho 0} x^\rho$, где ρ снова является наименьшим. Тогда в качестве N можно взять $\rho + 1$ либо $\rho + i$, где i столь большое, что частное $\frac{a_{J1} - (\rho + i)b_{\rho 0}}{b_{\rho 0}}$ отрицательное, где $J = \rho - 1$.

Пусть теперь ν_1 значение возможного порядка кривизны. Чтобы установить меру кривизны интегральных кривых порядка ν_1 , делаем в дифференциальном уравнении (19) подстановку $y = u(x)x^{\nu_1}$. Получим

$$u' = \frac{P(x, ux^{\nu_1})}{x^{\nu_1} Q(x, ux^{\nu_1})} - \nu_1 \frac{u}{x} = \frac{x^{l_1} [P_1(u) + x^{\lambda_1} R_1(x, u)]}{x^{l_2} [P_2(u) + x^{\lambda_2} R_2(x, u)]},$$

где P_1 и P_2 полиномы относительно u . Могут представиться два различных случая.

1. $l_1 > l_2 - 1$; каждому значению u , для которого $P_2(u) \neq 0$, соответствует одна и только одна интегральная кривая. Но $P_2(u)$ обращается в нуль лишь при $u = 0$. Таким образом, если парабола с порядком кривизны ν_1 является соприкасающейся параболой интегральной кривой, то вдоль каждой параболы семейства $y = px^{\nu_1}$, где $p \neq 0$, в особую точку входит одна и только одна интегральная кривая.

2. $l_1 \leq l_2 - 1$; интегральные кривые могут входить в особую точку только вдоль тех парабол $y = u_i x^{\nu_1}$, коэффициенты которых u_i служат корнями полинома $P_1(u)$. Следовательно, существует лишь конечное число таких парабол, которые могут быть соприкасающимися параболоми интегральных кривых.

Заметим, что, определяя порядок кривизны, мы находим *возможные* для них значения. Некоторые из них могут отсеяться, если мы получим для данных кривых нулевую меру кривизны. В этом случае интегральной кривой будет ось координат.

7. Применение теории Фроммера

7.1. Критические направления

Исходное уравнение (11) имеет вид

$$z^{\gamma+2} \frac{dX}{dz} = -\beta^2 X^\gamma + z^3 X^{\gamma+1} z^{\gamma+1} X.$$

1) Пусть γ — целое число. Имеем

$$X' = \frac{-\beta^2 x^\gamma + z^3 X^{\gamma+1} z^{\gamma+1} X}{z^{\gamma+2}} = \frac{P(z, X)}{Q(z, X)} = \frac{P_m(z, X) + \varphi(z, X)}{Q_n(z, X) + \psi(z, X)},$$



где P_m, Q_n — однородные полиномы, аппроксимирующие P, Q , т. е. $P_m(z, X) = -\beta^2 X^\gamma$ ($m = \gamma$), $Q_n(z, X) = z^{\gamma+2}$ ($n = \gamma + 2$). Тогда $n > m$ ($\gamma + 2 > \gamma$).

Пусть $z'(0) = p, X'(0) = q$. Тогда характеристическое уравнение $G(p, q) = 0$ выглядит так:

$$G(p, q) \equiv pP_m(p, q) = -\beta^2 pq^\gamma = 0.$$

Таким образом, $p = 0$ или $q = 0$. Критическими направлениями являются оси координат.

2) Пусть γ — рациональное число: $\gamma = a/b > 1$, то есть $a > b$.

Характеристическое уравнение имеет вид $G(p, q) = -\beta^2 pq^{a-b+1} = 0$. Аналогично предыдущему случаю, его решения суть $p = 0, q = 0$. Таким образом, при любом γ критическими направлениями являются оси координат.

Следовательно, вся плоскость разбивается осями координат на 4 сектора, в каждом из которых интегральные кривые ведут себя определенным образом. Тогда согласно теореме 2 в случае 4 точка $O(0, 0)$ является четырехсепаратрисным седлом, а в случае 6 — седло-узел с двумя гиперболическими и двумя параболическими секторами.

Итак, для ключевого уравнения (11) при различных γ траектории уравнения образуют в окрестности особой точки либо четырехсепаратрисное седло, либо седло-узел с двумя гиперболическими и двумя параболическими секторами. Для изучения этих возможностей рассмотрим уравнение (11) для двух частных значений γ . Эти характерные примеры обобщаются на случай произвольных γ .

7.2. Изучение случая $\gamma = 5/3$

В случае $\gamma = 5/3$ уравнение (18) принимает вид:

$$t^9 \frac{dY}{dt} = -\beta^2 Y^3 + t^9 Y^6 + t^8 Y.$$

Исследуем поведение его интегральных кривых методом Фроммера. В этом случае $P(t, Y) = -\beta^2 Y^3 + t^9 Y^6 + t^8 Y, Q(t, Y) = t^9$.

Установим возможные порядки кривизны. Подстановка $Y(t) = t^{\nu(t)}$ дает

$$\nu' = \frac{P(t, t^\nu) - \nu t^{\nu-1} Q(t, t^\nu)}{t^\nu Q(t, t^\nu) \ln t} = \frac{-\beta^2 t^{3\nu} + t^{9+6\nu} + (1-\nu)t^{8+\nu}}{t^{\nu+9} \ln t}.$$

Имеем: $N = \rho + 1 = 9 + 1 = 10$. Значит, $1 \leq \nu \leq 10$.

Характерная схема Фроммера для уравнения (18) при $\gamma = 5/3$ изображена на рис. 3.

Рассмотрим интервал $1 \leq \nu \leq 4$. В нем наименьшей степенью является 3ν . Тогда

$$P(t, t^\nu) = -\beta^2 t^{3\nu} + t^{9+6\nu} + t^{8+\nu} = t^{3\nu} (-\beta^2 + t^{9+3\nu} + t^{8-2\nu}),$$

$$Q(t, t^\nu) = t^{\nu+9}.$$

Следовательно, $e_1 = 3\nu, e_2 = \nu + 9$, тогда $e_1 \leq e_2 + \nu - 1$, сокращаем дробь на $t^{3\nu}$. Получим

$$\nu' = \frac{-\beta^2 + t^{9+3\nu} + (1-\nu)t^{8-2\nu}}{t^{9-2\nu} \ln t}.$$

Тогда

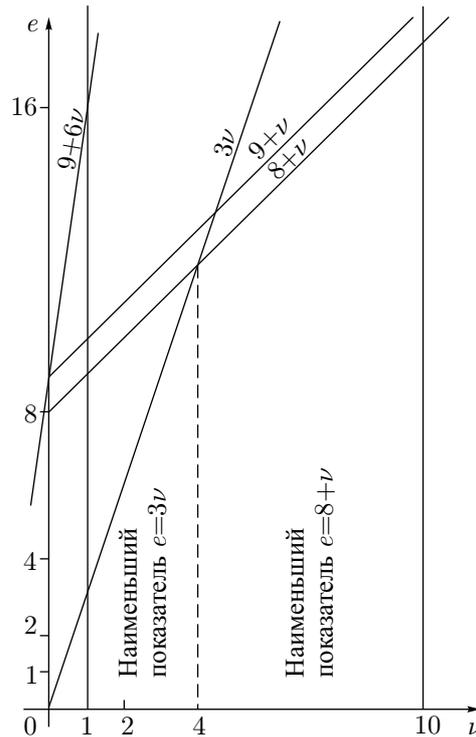
$$Z(t, \nu) = -\beta^2 + t^{9+3\nu} + (1-\nu)t^{8-2\nu},$$

$$r = 9 - 2\nu \geq 1,$$

$$N(t, \nu) \equiv 1 \neq 0 \text{ при } t = 0.$$

$Z(0, \nu) = 0$ тогда и только тогда, когда $-\beta^2 = 0$.



Рис. 3. Схема Фроммера при $\gamma = 5/3$

Противоречие, поскольку $\beta \neq 0$. Следовательно, внутри интервала $(1, 4)$ нет возможных кривизн.

Аналогично рассматривается интервал $4 \leq \nu \leq 10$. В этом случае наименьшая степень равна $8 + \nu$. Тогда имеем

$$\nu' = \frac{-\beta^2 t^{2\nu-8} + t^{9+6\nu} + (1-\nu)}{t \ln t}.$$

Значит,

$$Z(t, \nu) = -\beta^2 t^{2\nu-8} + t^{9+6\nu} + (1-\nu), \\ r = 1, N(t, \nu) \equiv 1 \neq 0 \text{ при } t = 0.$$

Из $Z(0, \nu) = 0$ следует $\nu = 1$. Но $\nu > 1$, следовательно, внутри интервала $(4, 10)$ также нет возможных кривизн.

Итак, возможными кривизнами могут быть лишь следующие значения: $\nu = 1, 4, 10$.

Установим меру кривизны для каждого найденного ν .

Пусть $\nu = 1$.

Подстановка $Y = u(t)t$ в уравнение (18) приводит к

$$u' = \frac{-\beta^2 u^3 t^3 + t^{9+6} u^6 + ut^9 - ut^9}{t^{10}} = \frac{t^3(-\beta^2 u^3 + t^{15} u^6)}{t^{10}}.$$

Имеем $l_1 = 3, P_1(u) = -\beta^2 u^3, \lambda_1 = 15, R_1(t, u) = u^6, l_2 = 10, P_2(u) \equiv 1, R_2(t, u) \equiv 0$. Из неравенства $l_1 < l_2 - 1$ следует, что возможные меры кривизны являются корнями уравнения $P_1(u) = 0$, где $P_1(u) = -\beta^2 u^3 = 0$, следовательно, $u = 0$.

Пусть $\nu = 4$.

Подстановка $Y = u(t)t^4$ в уравнение (18) приводит к

$$u' = \frac{-\beta^2 u^3 t^{12} + t^{9+24} u^6 + ut^{8+4} - 4ut^{12}}{t^{13}} = \frac{t^{12}[(-\beta^2 u^3 - 3u) + t^{21} u^6]}{t^{13}}.$$

Имеем $l_1 = 12, P_1(u) = -\beta^2 u^3 - 3u, \lambda_1 = 21, R_1(t, u) = u^6, l_2 = 13, P_2(u) \equiv 1, R_2(t, u) \equiv 0$. Из неравенства $l_1 = l_2 - 1$ следует, что возможные меры кривизны являются корнями уравнения $P_1(u) = 0$, где $P_1(u) = -\beta^2 u^3 - 3u = -u(\beta^2 u^2 + 3) = 0$. Следовательно, $u = 0$.

Пусть $\nu = 10$.

Подстановка $Y = u(t)t^{10}$ в уравнение (18) приводит к

$$u' = \frac{-\beta^2 u^3 t^{30} + t^{9+60} u^6 + ut^{8+10} - 10ut^{12}}{t^{19}} = \frac{t^{18}[-9u + t^{30}(-\beta^2 u^3 + u^6 t^{39})]}{t^{19}}.$$

Аналогично предыдущим случаям также получим, что $u = 0$.

Следовательно, в особую точку $O(0, 0)$ входят только интегральные кривые, совпадающие с осями координат (рис. 4).

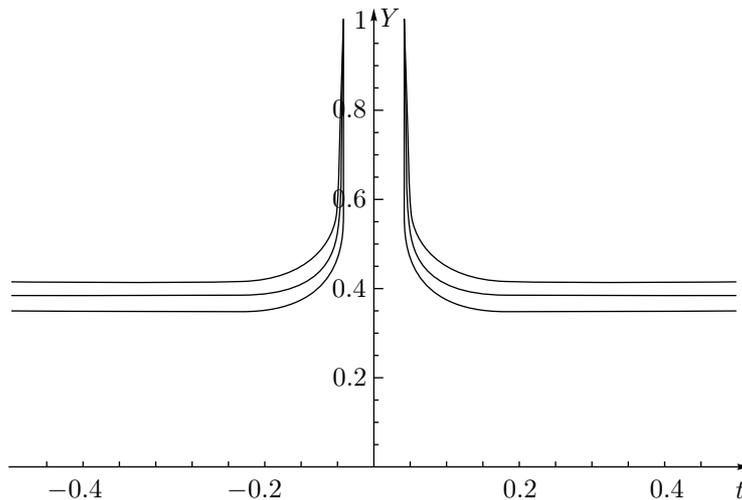


Рис. 4. Интегральные кривые при $\gamma = 5/3$

Сравнивая полученный результат с теоремой 2, заключаем, что для $\gamma = 5/3$ особая точка является четырехсепаратрисным седлом (случай 4 теоремы 2).

7.3. Изучение случая $\gamma = 4/3$

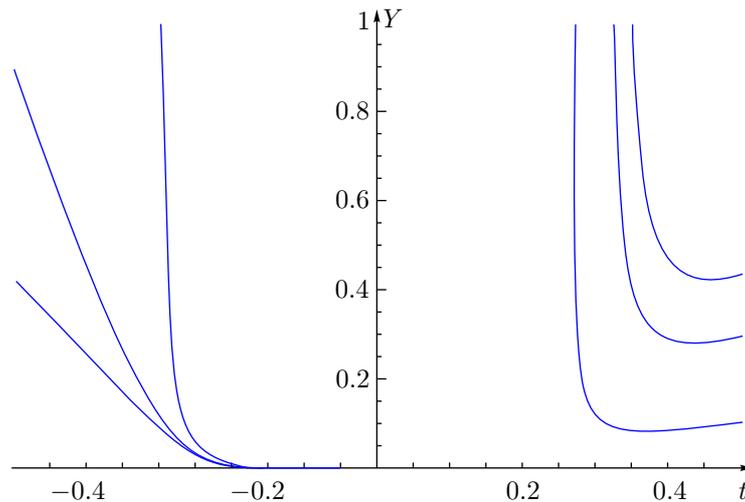
В случае $\gamma = 4/3$ исходное уравнение имеет вид

$$t^8 \frac{dY}{dt} = -\beta^2 Y^2 + t^9 Y^5 + t^7 Y.$$

Аналогично исследуем поведение интегральных кривых.

Следовательно, в особую точку $O(0, 0)$ входят только интегральные кривые, совпадающие с осями координат и касающиеся параболы: $Y = -\frac{6}{\beta^2} t^7$.



Рис. 5. Интегральные кривые при $\gamma = 4/3$

Согласно теореме 2 имеем случай 6, параболическими секторами являются вторая и четвертая четверти (рис. 6).

Таким образом, в обоих случаях в первой четверти плоскости $R^2(z, X)$ имеем седло. Следовательно, в плоскости $R^2(\sigma, \sigma')$ точка $O(0, 0)$ является четырехсепаратрисным седлом.

8. Исследование поведения интегральных кривых в окрестности бесконечности

Рассмотрим уравнение (18) в окрестности бесконечности. Для этого сделаем замену: $q = 1/t$. В новых переменных уравнение (18) принимает вид

$$-q \frac{dY}{dq} = -\beta^2 q^{a+b} Y^{a-b+1} + q^{a-2b} Y^{a+1} + Y.$$

Воспользуемся теоремой 2 при $h_0 = 1, a_0 = -1, m_0 = 1$. Особая точка $q = 0$ является четырехсепаратрисным седлом для любого показателя адиабаты γ .

Следовательно, в плоскости $R^2(z, X)$ имеем следующее поведение интегральных кривых в окрестности особой точки $O(0, 0)$ и при $z \rightarrow \infty$ (рис. 7).

9. Ключевая система на фазовой плоскости

Уравнение (15) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} X' = Y, \\ (X^{\gamma+1} Y^3 + X Y^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma) Y' = Y^{\gamma+3}, \end{cases} \quad (22)$$

или, в разрешенном относительно производных виде:

$$\begin{cases} dX/dx = Y, \\ dY/dx = Y^{\gamma+3} / (X^{\gamma+1} Y^3 + X Y^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma). \end{cases}$$

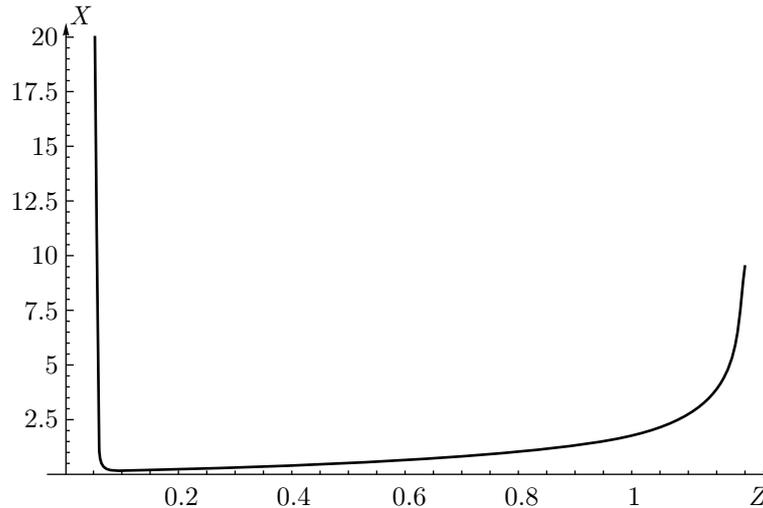


Рис. 6. Интегральная кривая

В соответствии с замечанием в п. 5 далее рассматривается только первая четверть плоскости $R^2(Y, X)$.

Тогда особыми многообразиями системы (22) являются кривые в плоскости $R^2(Y, X)$, задаваемые уравнениями

$$Y = 0, X^{\gamma+1}Y^3 + XY^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma = 0.$$

Возможны особые многообразия следующего вида:

прямая $C_1: Y = 0,$

прямая $C_2: X = 0,$

кривая $C_3: P(X, Y) = X^\gamma Y^3 + Y^{\gamma+1} - \beta^2 X^{\gamma-1} = 0.$

Прямые C_1 и C_2 являются осями координат OX и OY . Рассмотрим кривую C_3 в первой четверти (рис. 8). Правее этой кривой $X' = Y > 0, P(X, Y) > 0$, следовательно, $Y' > 0$. Левее нее имеем $X' > 0, P(X, Y) < 0$, следовательно, $Y' < 0$.

Значит, точки кривой $P(X, Y) = 0$ являются точками экстремума интегральных кривых.

Лемма 2. Для данного решения (7), (8) линия $P(X, Y) = 0$ является образом на плоскости $R^2(Y, X)$ характеристики уравнений МГД (1) на решении (7), (8), соответствующей быстрым магнитозвуковым волнам и задающейся на физической плоскости прямой $x = x_0$.

Доказательство.

Рассмотрим на физической плоскости $R^2(x, y)$ прямую $x = x_0 = \text{const}$. Перепишем уравнение (6) относительно функции $x = x(y)$. Тогда для данной характеристики $dx/dy = 0$, следовательно, она задается уравнением

$$M_1^4 + N_1^2 - M_1^2(1 + N^2) = 0.$$

В переменных X, Y это уравнение имеет вид

$$X^\gamma Y^3 + Y^{\gamma+1} - \beta^2 X^{\gamma-1} = 0.$$

Следовательно, характеристикой, соответствующей быстрым магнитозвуковым волнам, является линия $P(X, Y) = 0$.

(Для медленных магнитозвуковых волн $a_- = 0$.) ■

Лемма 3. Максимум отношения Y/X на фазовой плоскости задается кривой

$$Q(X, Y) \equiv \beta^2 X^{\gamma-1} - X^\gamma Y^3 + Y^\gamma - Y^{\gamma+1} = 0.$$

Доказательство.

Вычислим производную отношения Y/X .

$$\left(\frac{Y}{X}\right)' = \frac{Y^2 Q(X, Y)}{X^2 P(X, Y)}, \text{ где } Q(X, Y) = \beta^2 X^{\gamma-1} - X^\gamma Y^3 + Y^\gamma - Y^{\gamma+1}.$$

Рассмотрим кривую $Q(X, Y) = 0$ на фазовой плоскости (рис. 8). Кривые $P = 0$ и $Q = 0$ пересекаются в точке $O(0, 0)$, то есть в первой четверти $Y > 0, X > 0$ эти кривые не имеют точек пересечения и разделяют ее на три части: $P < 0$ и $Q > 0$, $P > 0$ и $Q > 0$, $P > 0$ и $Q < 0$ (рис. 9). Значит, точки кривой $Q(X, Y) = 0$ являются точками локального максимума отношения Y/X . ■

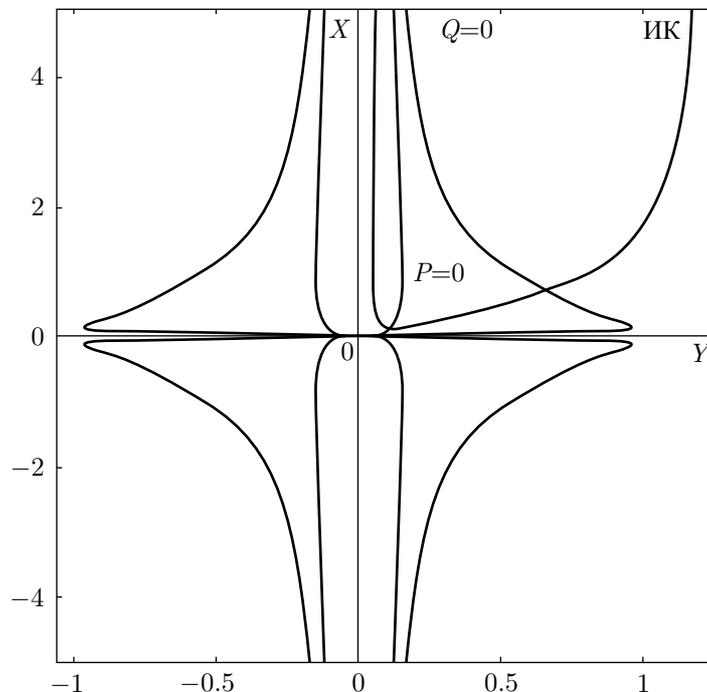


Рис. 7. Фазовая плоскость

На рисунке 8 изображены кривые $P(X, Y) = 0, Q(X, Y) = 0$ и интегральная кривая (ИК).

10. Физическая интерпретация полученных результатов

В силу требования однозначности функции $X(x)$ в решении существует два режима движения, соответствующих монотонным ветвям $\{1\}$ и $\{2\}$ интегральной кривой, начинающимся с характеристики $P = 0$. Каждое такое движение может трактоваться как течение газа из источника (стока), распределенного на прямой $x = x_0$, являющейся звуковой характеристикой уравнений МГД на решении (7), (8).



В силу представления решения (7), (8) имеем:

$$u \sim \frac{1}{Y}, v \sim \frac{y}{X}, \rho \sim \frac{Y}{X}, H \sim Y. \tag{23}$$

Рассмотрим две ветви интегральной кривой. В силу (31) при фиксированном y ветви {1} интегральной кривой будет соответствовать движение, при котором $Y \rightarrow 0, X \rightarrow \infty$. Тогда $u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0, H \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Ветвь {2} пересекается с кривой максимумов плотности ($Q(X, Y) = 0$). Таким образом, эта ветвь соответствует движению, в котором при росте x плотность возрастает, достигает своего максимума, а затем при $x \rightarrow \infty$ убывает до 0, так как, согласно п. 9, в окрестности бесконечности имеется седло. В силу (31) при $x \rightarrow \infty$ получаем: $u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0, H \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ ($Y \rightarrow \infty, X \rightarrow \infty$).

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Существуют два режима течения газа, описываемые решением (4)–(5). Они имеют следующие асимптотики:*

{1} разрежение потока, ускорение по горизонтали ($u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0, H \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$);

{2} остановка потока, его разрежение, возрастание магнитного поля ($u \rightarrow 0, v \rightarrow 0, H \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$).

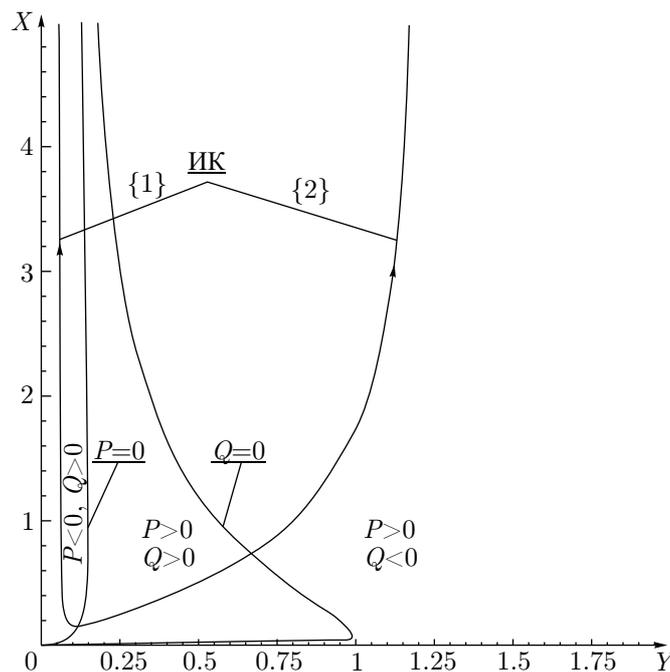


Рис. 8. Первая четверть фазовой плоскости

На рисунке 9, иллюстрирующем теорему 3, изображена первая четверть фазовой плоскости $R^2(Y, X)$, где $Y = X'$, и кривые: $P(X, Y) = 0$ — характеристика, соответствующая быстрым магнитозвуковым волнам, $Q(X, Y) = 0$ — кривая экстремума плотности, ИК — интегральные кривые.



11. Влияние силы тяжести

В этой части мы рассмотрим аналогичное решение уравнений магнитной газовой динамики при наличии поля силы тяжести. В направлении оси Ox действует сила тяжести с постоянным ускорением g .

Наличие поля силы тяжести изменяет первую часть ключевого уравнения (10).

В этом случае для неизвестной функции σ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\sigma^\gamma \sigma'' + \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \sigma \sigma'^{\gamma+1} \sigma'' - \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \sigma'^{\gamma+3} + \frac{H_0^2}{4\pi \rho_0} \sigma^{\gamma+1} \sigma'^3 \sigma'' = g \sigma^\gamma \sigma'^3, \quad (24)$$

где g — ускорение свободного падения (постоянная величина).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Уравнение (24) приводится к уравнению первого порядка

$$(z^{\gamma+2} + \alpha^2 X^\gamma z^2) \frac{dX}{dz} = -\beta^2 X^\gamma + z^3 X^{\gamma+1} + z^{\gamma+1} X \quad (25)$$

следующей заменой переменных

$$X(x) = \frac{H_0}{2\sqrt{p_0 \pi \gamma}} \sigma(x), X' = z(X), \quad (26)$$

с параметрами

$$\alpha^2 = g \frac{\rho_0}{p_0 \gamma}, \beta^2 = \frac{\rho_0 H_0^2}{4\pi \gamma^2 p_0^2}. \quad (27)$$

Доказательство.

После введения констант α и β и функции X уравнение (24) принимает вид

$$(X^{\gamma+1} X'^3 + X X'^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma) X'' = X'^{\gamma+3} + \alpha^2 X^\gamma X'^3. \quad (28)$$

После замены X' на z и изменения ролей переменных уравнение (28) приводится к (25). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вывод уравнения (25) проводился для случая $\sigma > 0, \sigma' > 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично и приводят к тому же уравнению (25).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с заменой (26) далее рассматриваем только первую четверть плоскости $\mathbb{R}^2(z, X)$.

Уравнение (25) является ключевым уравнением. Оно не является уравнением Бендиксона, как в случае отсутствия поля тяжести. Тем не менее, к нему можно применить теорию Фроммера для анализа поведения интегральных кривых в окрестности особой точки $O(0, 0)$.

Исследуем ключевое уравнение для $\gamma = 5/3$.

11.1. Применение теории Фроммера

11.1.1. Ключевое уравнение при $\gamma = 5/3$

Применим алгоритмы теории Фроммера в этом случае. Опуская детали вычислений, приведем результаты.



Рассмотрим исходное уравнение (25) при дробном $\gamma = a/b > 1$. Сделаем замену: $t = z^{1/b}$, $Y = X^{1/b}$. Тогда уравнение приводится к такому:

$$Y' = \frac{-\beta^2 Y^{a-b+1} + t^{3b} Y^{a+b} + t^{a+b} Y}{t^{a+b+1} + \alpha^2 t^{b+1} Y^a}.$$

Для $\gamma = 5/3$ оно примет вид

$$\frac{dY}{dt} = \frac{-\beta^2 Y^3 + t^9 Y^6 + t^8 Y}{t^9 + \alpha^2 t^4 Y^5}. \tag{29}$$

11.1.2. Критические направления

В данном случае $P(t, Y) = -\beta^2 Y^3 + t^9 Y^6 + t^8 Y$ и $Q(t, Y) = t^9 + \alpha^2 t^4 Y^5$ аппроксимируются однородными полиномами $P_m(t, Y) = -\beta^2 Y^3$ и $Q_n(t, Y) = t^9 + \alpha^2 t^4 Y^5$ соответственно. Следовательно, $m = 3, n = 9$ и $n > m$. Значит, характеристическое уравнение имеет вид $G(p, q) = -\beta^2 p q^3 = 0$. Его решения суть $p = 0, q = 0$. Таким образом, критическими направлениями являются оси координат, причем ось Y является простым обыкновенным критическим направлением, а ось t — кратным.

Следовательно, вся плоскость разбивается критическими направлениями на 4 сектора, в каждом из которых интегральные кривые ведут себя определенным образом.

11.1.3. Поведение интегральных кривых в окрестности оси t

Установим возможные порядки кривизны.

Для начала определим верхнее значение ν . Многочлен $P(t, Y)$ содержит множитель Y . В этом случае $\rho = 9$. Тогда в качестве N можно принять число $\rho + i$, где $i = 2$. Значит, $1 \leq \nu \leq 11$.

Чтобы установить, какие из порядков кривизны могут встретиться, сделаем подстановку $Y(t) = t^{\nu(t)}$. Тогда получим:

$$\nu' = \frac{P(t, t^\nu) - \nu t^{\nu-1} Q(t, t^\nu)}{t^\nu Q(t, t^\nu) \ln t} = \frac{-\beta^2 t^{3\nu} + t^{9+6\nu} + (1-\nu)t^{8+\nu} - \nu \alpha^2 t^{6\nu+3}}{\alpha^2 t^{6\nu+4} + t^{\nu+9} \ln t}.$$

Возможными кривизнами являются $\nu = 1, 3, 4, 11$.

Для всех ν мера кривизны u равна нулю. Поэтому, если в особую точку входит интегральная кривая, то она касается оси t .

11.1.4. Поведение интегральных кривых в окрестности оси Y

Для исследования поведения интегральных кривых в окрестности оси Y поменяем местами роли переменных:

$$\frac{dt}{dY} = \frac{t^{a+b+1} + \alpha^2 t^{b+1} Y^a}{-\beta^2 Y^{a-b+1} + t^{3b} Y^{a+b} + t^{a+b} Y}.$$

Как было показано выше, характеристическое уравнение имеет вид $G(p, q) = -\beta^2 p q^3 = 0$. Таким образом, ось Y является критическим направлением неопределенного типа. Так как $t = 0$ не удовлетворяет уравнению $-\beta^2 Y^3 = 0$, то ось Y является простым обыкновенным критическим направлением.

Вычислим функцию ψ :

$$\psi(u, Y) = \frac{P(Y, uY)}{Q(Y, uY)} - u = \frac{u(\beta^2 + \alpha^2 u^3 Y^6 - u^9 Y^{12})}{-\beta^2 + u^8 Y^6 + u^9 Y^{12}}.$$



Тогда из того, что $\partial\psi/\partial u(0, 0) = -1$, следует, что только одна интегральная кривая входит в особую точку.

11.2. Исследование поведения интегральных кривых в окрестности бесконечности

Рассмотрим уравнение (29) в окрестности бесконечности. Для этого сделаем замену: $q = 1/t$. В новых переменных уравнение (29) принимает вид

$$\frac{dY}{dq} = \frac{\beta^2 q^{a+b} Y^{a-b+1} - q^{a-2b} Y^{a+1} - q^b Y}{q^{b+1} + \alpha^2 q^{a+b+1} Y^a}.$$

Для этого уравнения критическими направлениями также являются оси координат, причем ось $Y = 0$ — простое, а ось $q = 0$ — кратное критическое направление.

Окрестность оси $Y = 0$. Функция ψ имеет вид

$$\psi(u, q) = \frac{u(-2 - q^{2a-2b} u^a + \beta^2 q^{2a} u^{a-b} - \alpha^2 q^{2a} u^a)}{\alpha^2 q^{2a} u^a} + 1.$$

Тогда $\frac{\partial\psi}{\partial u}(0, 0) = -2 < 0$, т. е. только одна интегральная кривая входит в особую точку.

Окрестность оси $q = 0$. Получим уравнение

$$\frac{dq}{dY} = \frac{\alpha^2 q^9 Y^5 + q^4}{\beta^2 q^{11} Y^3 - q^3 Y - q^2 Y^6}.$$

Определим верхнее значение ν . Знаменатель содержит множитель Y . В этом случае $\rho = 6$. Тогда в качестве N можно принять число $\rho + i$, где $i = 1$. Значит, $1 \leq \nu \leq 7$.

Сделаем замену $q(Y) = Y^{\nu(Y)}$:

$$\frac{d\nu}{dY} = \frac{(\nu + 1)Y^{4\nu} + \nu Y^{6+2\nu} + \alpha^2 Y^{5+9\nu} - \nu\beta^2 Y^{2+12\nu}}{\ln Y (\beta^2 Y^{3+12\nu} - Y^{1+4\nu} - Y^{6+3\nu})}.$$

Возможными кривизнами являются $\nu = 1, 3, 7$.

Для всех ν мера кривизны u равна нулю. Поэтому, если в особую точку входит интегральная кривая, то она касается оси Y .

11.2.1. Поведение интегральных кривых

На основе анализа поведения интегральных кривых в плоскости $\mathbb{R}^2(t, Y)$, проведенного методом Фроммера, можно сделать вывод, что вся плоскость разбивается осями координат, которые являются критическими направлениями, на четыре сектора. В каждом из этих секторов имеем седло.

11.3. Ключевая система на фазовой плоскости

Уравнение (28) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} X' = Y, \\ (X^{\gamma+1} Y^3 + X Y^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma) Y' = Y^{\gamma+3} + \alpha^2 X^\gamma Y^3, \end{cases} \quad (30)$$

или, в разрешенном относительно производных виде:

$$\begin{cases} dX/dx = Y, \\ dY/dx = (Y^{\gamma+3} + \alpha^2 X^\gamma Y^3)/(X^{\gamma+1} Y^3 + XY^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma). \end{cases}$$

В соответствии с замечанием 2 далее рассматривается только первая четверть плоскости $\mathbb{R}^2(Y, X)$.

Тогда особыми многообразиями системы (30) являются кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(Y, X)$, задаваемые уравнениями

$$Y = 0, Y^{\gamma+3} + \alpha^2 X^\gamma Y^3 = 0, X^{\gamma+1} Y^3 + XY^{\gamma+1} - \beta^2 X^\gamma = 0.$$

Возможны особые многообразия следующего вида:

прямая $C_1: Y = 0$,

прямая $C_2: X = 0$,

кривая $C_3: P(X, Y) = X^\gamma Y^3 + Y^{\gamma+1} - \beta^2 X^{\gamma-1} = 0$,

кривая $C_4: Y^\gamma + \alpha^2 X^\gamma = 0$.

Прямые C_1 и C_2 являются осями координат OX и OY .

Рассмотрим кривую C_3 в первой четверти. Правее этой кривой $X' = Y > 0, P(X, Y) > 0$, следовательно, $Y' > 0$. Левее нее имеем $X' > 0, P(X, Y) < 0$, следовательно, $Y' < 0$.

Кривая C_4 лежит во второй и четвертой четвертях, поэтому не влияет на знак отношения dY/dx , так как рассматриваем случай $X > 0, Y > 0$.

Значит, точки кривой $P(X, Y) = 0$ являются точками экстремума интегральных кривых.

Лемма 4. Для данного решения (7) линия $P(X, Y) = 0$ является образом на плоскости $\mathbb{R}^2(Y, X)$ характеристики уравнений МГД в присутствии поля силы тяжести на решении (7), соответствующей быстрым магнитозвуковым волнам и задающейся на физической плоскости прямой $x = x_0$.

Доказательство.

Присутствие поля силы тяжести не меняет общего вида уравнения характеристик. Поэтому доказательство проводится аналогично случаю без силы тяжести. ■

Лемма 5. Максимум отношения Y/X на фазовой плоскости задается кривой

$$Q(X, Y) \equiv \beta^2 + \alpha^2 XY + XY^3 = 0.$$

Доказательство.

Вычислим производную отношения Y/X :

$$\left(\frac{Y}{X}\right)' = \frac{X^{\gamma-1} Y^2 Q(X, Y)}{X^2 P(X, Y)}, \text{ где } Q(X, Y) = \beta^2 + \alpha^2 XY + XY^3 = 0. \quad \blacksquare$$

12. Физическая интерпретация полученных результатов

В силу требования однозначности функции $X(x)$ в решении существует два режима движения, соответствующих монотонным ветвям {1} и {2} интегральной кривой, начинающимся с характеристики $P = 0$. Каждое такое движение может трактоваться как течение газа из источника (стока), распределенного на прямой $x = x_0$, являющейся звуковой характеристикой уравнений МГД на решении (7), (8).



В силу представления решения (7), (8) имеем:

$$u \sim \frac{1}{Y}, v \sim \frac{y}{X}, \rho \sim \frac{Y}{X}, H \sim Y. \quad (31)$$

Рассмотрим две ветви интегральной кривой. В силу (31) при фиксированном y ветви {1} интегральной кривой будет соответствовать движение, при котором $Y \rightarrow 0, X \rightarrow \infty$. Тогда $u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0, H \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Ветвь {2} пересекается с кривой максимумов плотности ($Q(X, Y) = 0$). Таким образом, эта ветвь соответствует движению, в котором при росте x плотность возрастает, достигает своего максимума, а затем при $x \rightarrow \infty$ убывает до 0, так как в окрестности бесконечности имеется, согласно п. 9, седло. В силу (31) при $x \rightarrow \infty$ получаем: $u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0, H \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ ($Y \rightarrow \infty, X \rightarrow \infty$).

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. *Существуют два режима течения газа, описываемые решением (4)–(5). Они имеют следующие асимптотики:*

{1} разрежение потока, ускорение по горизонтали ($u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0, H \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$);

{2} остановка потока, его разрежение, возрастание магнитного поля ($u \rightarrow 0, v \rightarrow 0, H \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$).

13. Заключение

Построено двумерное стационарное решение уравнений магнитной газовой динамики, описывающее движение плоской проводящей газовой струи из линейно распределенного источника при наличии поперечного магнитного поля. Оно является частично инвариантным решением уравнений МГД, наследующимся из газовой динамики в отсутствие магнитного поля, в котором все искомые функции выражаются через одну вспомогательную функцию. Эта функция является решением ключевого уравнения, которое может быть сведено к уравнению Бендиксона с вырожденной особой точкой $O(0, 0)$.

Одним из эффективных методов исследования топологии интегральных кривых в окрестности вырожденной особой точки является метод Фроммера. Он обобщает на дифференциальные уравнения классический метод многоугольника Ньютона. Применяя метод Фроммера к уравнению Бендиксона, получаем, что особые точки $O(0, 0)$ и бесконечность являются четырехседларными седлами.

Существует два режима течения газа из источника, распределенного вдоль прямой $x = x_0$, являющейся звуковой характеристикой уравнений МГД на данном решении. Первый из режимов соответствует разрежению потока, ускорению его по горизонтали. Второй — остановке потока, его разрежению, возрастанию магнитного поля.

Эти результаты распространяются на течение газа в поле сил тяжести с постоянным ускорением. Показано, что наличие этой силы качественно не меняет характер течения.

14. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №08-01-00047, Программы поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-2826.2008.1, Интеграционного проекта СО РАН № 2.15.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., *Магнитная гидродинамика*, М.: ГИФМЛ 1962.
2. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equation. (Ed. N. H. Ibragimov), vol. 2, CRC Press, Boca Raton, 1995.
3. Grundland M. A., Lalague L., Lie subgroups of the symmetry groups of the fluid dynamics and the magneto hydrodynamics equations, Prepr. CRM-1889, Universite de Montreal, 1993.
4. Чупахин А. П., Самосопряжение решений через ударную волну: предельный скачок уплотнения, *ПМТФ*, 2003, т. 44, № 3, с. 26–40.
5. Арнольд В. И., *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.-Ижевск: НИЦ «РХД», Изд-во УдГУ, 2000.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений*, М–Л.: ОГИЗ, 1947.
7. Андреев А. Ф., *Особые точки дифференциальных уравнений*, Минск: Высшая школа, 1979.
8. Фроммер М., Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер, *Усп. мат. наук*, 1941, вып. 9, с. 212–253.
9. Куклес И. С., Суяршаев А. М., Обобщенный метод Фроммера, *Докл. Акад. наук СССР*, 1961, т. 136, № 1, с. 29–32.
10. Виноград Р. Э., Гробман Д. М., К проблемам различения Фроммера, *Усп. мат. наук*, 1957, т. 12, вып. 5 (77), с. 191–195.