

К теории резонансного вращения Меркурия

А. П. Маркеев

Институт проблем механики РАН
119526, Россия, Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1
markeev@ipmnet.ru

Получено 12 августа 2008 г.

Исследуется движение твердого тела относительно центра масс под действием гравитационных моментов центрального ньютоновского силового поля. Орбита центра масс предполагается эллиптической, эксцентриситет орбиты считается равным эксцентриситету орбиты Меркурия. Центральный эллипсоид инерции тела произволен. Рассматривается задача о существовании плоских периодических вращений при резонансе 3:2 меркурианского типа и исследуется их устойчивость по Ляпунову. В случае плоских возмущений решена нелинейная задача об устойчивости, а в случае, когда возмущения периодических вращений являются произвольными пространственными, исследована устойчивость в первом (линейном) приближении.

Ключевые слова: Меркурий, резонанс, периодическое движение, устойчивость.

A. P. Markeev

To the theory of Resonant Rotation of the Mercury

The motion of a rigid body about its center of mass under action of gravitational moments of the central Newtonian force field is investigated. The orbit of the center of mass is proposed to be an elliptical one, the eccentricity of the orbit is equal to the one of the Mercury. The central ellipsoid of inertia of the body is arbitrary. The problem of existence of planar periodical rotations under resonance 3:2 of the Mercurian type is considered and their stability (in Liapunov) is investigated. In a case of planar perturbations the nonlinear problem of stability is solved. In a case of arbitrary perturbations of periodical rotations the stability in first (linear) approximation is investigated.

Keywords: Mercury, resonance, periodic motion, stability.

Mathematical Subject Classifications: 70F15, 70E15, 70E50



1. Введение

Известно [1, 2], что движение Меркурия является резонансным: за время, равное двум периодам обращения по орбите, Меркурий в абсолютном пространстве совершает три оборота вокруг оси, проходящей через его центр масс (резонанс 3:2).

Следуя работе [3], в качестве модели резонанса меркурианского типа примем устойчивые плоские периодические движения абсолютно твердого тела в окрестности его соответствующего резонансного вращения вокруг нормали к плоскости орбиты.

Меркурианский тип движения твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле характеризуется еще тем [3], что для него имеет место эффект «отслеживания» перицентрального радиус-вектора орбиты: при прохождении центра масс тела через перицентр орбиты одна из главных центральных осей инерции тела направлена вдоль радиус-вектора центра масс, а при прохождении центра масс через апоцентр эта же ось перпендикулярна радиус-вектору.

Основная цель данной работы состоит в решении задачи об устойчивости плоских 2π -периодических по истинной аномалии ν движений твердого тела в окрестности его резонансного вращения меркурианского типа на эллиптической орбите. Эксцентриситет орбиты e принимаем равным эксцентриситету Меркурия ($e = 0.2056$), а центральный эллипсоид инерции считаем произвольным. Решается нелинейная задача об устойчивости по Ляпунову плоских периодических движений тела по отношению к плоским же возмущениям. А в случае, когда возмущения являются произвольными пространственными, исследование ограничивается первым (линейным) приближением.

Отметим, что ранее [3], плоские 2π -периодические (а также и 4π -периодические) движения твердого тела меркурианского типа исследовались при произвольных значениях эксцентриситета, но устойчивость рассматривалась в первом приближении и только по отношению к плоским возмущениям.

Движение твердого тела отнесем к орбитальной системе координат с началом в центре масс O тела. Ее ось OZ направлена вдоль радиус-вектора центра масс тела относительно притягивающего центра S , а оси OX и OY направлены, соответственно, по трансверсали и по нормали к плоскости орбиты. Жестко связанная с телом система координат $Oxyz$ образована главными центральными осями инерции тела. Ориентацию трехгранника $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Пусть A, B и C — моменты инерции твердого тела относительно осей Ox, Oy и Oz . Используя известные выражения для силовой функции и кинетической энергии тела [2], можно найти функцию Гамильтона Γ рассматриваемой задачи о движении твердого тела относительно его центра масс. Если через $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ обозначить соответствующие углам ψ, θ, φ импульсы, обезразмеренные при помощи множителя $A\omega_0(1 - e^2)^{-3/2}$, где ω_0 — среднее движение центра масс по орбите, и принять истинную аномалию ν в качестве независимой переменной, то получим

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi}{2B(1 + e \cos \nu)^2 \sin^2 \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 + \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}{2B(1 + e \cos \nu)^2} p_\theta^2 + \\ & + \frac{A}{2C(1 + e \cos \nu)^2} p_\varphi^2 + \frac{(B - A) \sin 2\varphi}{2B(1 + e \cos \nu)^2 \sin \theta} p_\theta (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - \\ & - \cos \psi \operatorname{ctg} \theta p_\psi - \sin \psi p_\theta + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} p_\varphi + \\ & + \frac{3}{2A} (1 + e \cos \nu) [(B - A) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (C - A) \cos^2 \theta]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения движения допускают частные решения, соответствующие плоским движениям тела, когда одна из его осей инерции (пусть это будет ось Oz) перпендикулярна плоскости орбиты, а две другие движутся в плоскости орбиты (рис. 1). Для плоских движений

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \pi, \quad p_\theta = 0, \quad p_\psi = 0,$$

а переменные φ, p_φ удовлетворяют каноническим уравнениям с функцией Гамильтона

$$G = \frac{A}{2C(1 + e \cos \nu)^2} p_\varphi^2 - p_\varphi + \frac{3(B - A)}{4A} (1 + e \cos \nu) \cos 2\varphi. \quad (1.2)$$

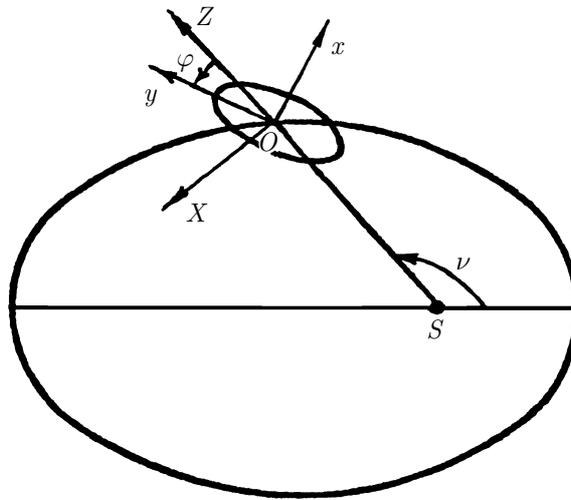


Рис. 1. К движению твердого тела в плоскости эллиптической орбиты (S — притягивающий центр, O — центр масс тела, ν — истинная аномалия)

2. Существование периодических движений

Вместо переменных φ, p_φ введем новые канонически сопряженные переменные x, p_x по формулам

$$\varphi = \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{2} x, \quad p_\varphi = \frac{C}{2A} [3(1 + e \cos \nu)^2 + p_x]. \quad (2.1)$$

Каноническое преобразование (2.1) имеет валентность $4A/C$ и может быть задано [4] при помощи производящей функции

$$S = p_x (2\varphi - \nu) + 6(1 + e \cos \nu)^2 \varphi.$$

Новая функция Гамильтона H вычисляется по формуле

$$H = \frac{4A}{C} G + \frac{\partial S}{\partial \nu}.$$

Отбросив в правой части этого равенства члены, не зависящие от x , p_x , получим

$$H = \frac{p_x^2}{2(1 + e \cos \nu)^2} - \gamma(1 + e \cos \nu) \cos(x + \nu) - 6e \sin \nu(1 + e \cos \nu)x, \quad (2.2)$$

$$\gamma = \frac{3(A - B)}{C} \quad (-3 \leq \gamma \leq 3).$$

Соответствующую функции (2.2) систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\nu} &= \frac{p_x}{(1 + e \cos \nu)^2}, \\ \frac{dp_x}{d\nu} &= -\gamma(1 + e \cos \nu) \sin(x + \nu) + 6e \sin \nu(1 + e \cos \nu) \end{aligned} \quad (2.3)$$

можно записать в виде одного дифференциального уравнения второго порядка

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 x}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{dx}{d\nu} + \gamma \sin(x + \nu) = 6e \sin \nu. \quad (2.4)$$

В статье [3] показано, что нахождение 2π -периодических движений меркурианского типа эквивалентно построению решений уравнения (2.4), удовлетворяющих краевым условиям

$$x(0) = x(\pi) = 0. \quad (2.5)$$

При фиксированном $e = 0.2056$ краевая задача (2.4)–(2.5) зависит от одного параметра γ . Для заданного γ решение краевой задачи сводится к нахождению начального значения $x'(0)$ производной $dx(\nu)/d\nu$, для которого выполняется условие $x(\pi) = 0$. Результаты вычислений представлены на рис. 2 в плоскости $x'(0), \gamma$.

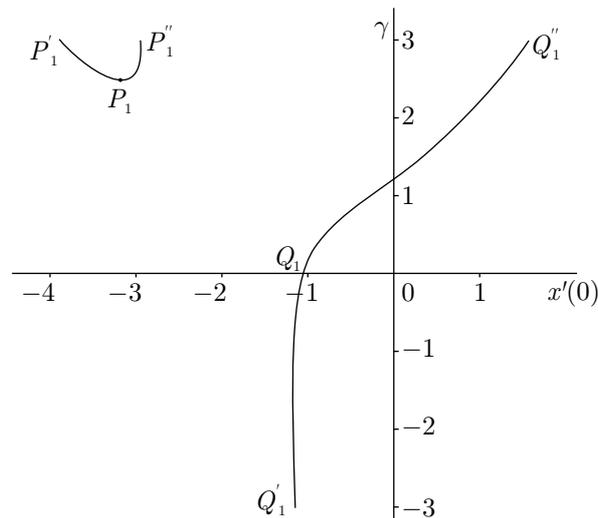


Рис. 2. К решению краевой задачи (2.4)–(2.5). $(P_1(-3.1803, 2.4840), P_1'(-3.9048, 3), P_1''(-2.9572, 3), Q_1(-1.0655, 0), Q_1'(-1.1541, -3), Q_1''(1.5632, 3))$

В зависимости от значения γ существует одно или три 2π -периодических решения уравнения (2.4). Обозначим их как $\tilde{x}_1(\nu)$, $\tilde{x}_2(\nu)$ и $\tilde{x}_3(\nu)$, выбрав нумерацию так, чтобы выполнялось неравенство $\tilde{x}'_1(0) > \tilde{x}'_2(0) > \tilde{x}'_3(0)$. Решение $\tilde{x}_1(\nu)$ существует при любых физически допустимых значениях параметра γ ($-3 \leq \gamma \leq 3$). На рис. 2 этому решению отвечает кривая $Q'_1 Q_1 Q''_1$. Точка P_1 на рис. 2 является бифуркационной: при $\gamma < 2.4840$ существует только одно периодическое решение $\tilde{x}_1(\nu)$, а при $2.4840 < \gamma \leq 3$ существуют все три периодических решения $\tilde{x}_1(\nu)$, $\tilde{x}_2(\nu)$, $\tilde{x}_3(\nu)$. Решению $\tilde{x}_2(\nu)$ на рис. 2 отвечает кривая $P_1 P''_1$, а решению $\tilde{x}_3(\nu)$ — кривая $P'_1 P_1$.

3. Устойчивость периодических движений по отношению к плоским возмущениям

Пусть $\tilde{x}(\nu)$ — какое-либо из решений $\tilde{x}_j(\nu)$ ($j = 1, 2, 3$). Принимая во внимание первое из уравнений системы (2.3), введем возмущения q, p по формулам

$$x = \tilde{x} + q, \quad p_x = (1 + e \cos \nu)^2 \frac{d\tilde{x}}{d\nu} + p. \tag{3.1}$$

Из (2.2), (2.3) и (3.1) получаем функцию Гамильтона возмущенного движения в виде следующего ряда по степеням q, p :

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \tag{3.2}$$

$$H_2 = \frac{p^2}{2(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1}{2} \gamma (1 + e \cos \nu) \cos(\tilde{x} + \nu) q^2,$$

$$H_3 = -\frac{1}{6} \gamma (1 + e \cos \nu) \sin(\tilde{x} + \nu) q^3, \quad H_4 = -\frac{1}{24} \gamma (1 + e \cos \nu) \cos(\tilde{x} + \nu) q^4. \tag{3.3}$$

Кратко остановимся на алгоритме исследования устойчивости [5]. Пусть q_0, p_0 — начальные значения переменных q, p , а q_1, p_1 — их значения при $\nu = 2\pi$, получаемые интегрированием нелинейных уравнений возмущенного движения с функцией Гамильтона (3.2). Функции $q_1(q_0, p_0), p_1(q_0, p_0)$ задают симплектическое отображение T окрестности точки $q_0 = 0, p_0 = 0$ на себя. Задача об устойчивости невозмущенного периодического движения тела эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $q_0 = 0, p_0 = 0$ этого отображения.

Отображение T можно получить в виде

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(2\pi) \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$u_1 = q_0 - \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial p_0 \partial q_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} - \frac{\partial S_4}{\partial p_0} + O_4, \quad v_1 = p_0 + \frac{\partial S_3}{\partial q_0} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0^2} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial S_4}{\partial q_0} + O_4.$$

Здесь $\mathbf{X}(2\pi)$ — вычисленная при $\nu = 2\pi$ фундаментальная матрица решений линейных уравнений возмущенного движения с функцией Гамильтона H_2 , через S_k ($k = 3, 4$) обозначены формы степени k относительно q_0, p_0 , а O_4 — совокупность членов выше третьей степени.

Рассмотрим линеаризованное отображение (3.4):

$$q_1 = y_{11} q_0 + y_{12} p_0, \quad p_1 = y_{21} q_0 + y_{22} p_0. \tag{3.5}$$

Здесь $y_{ij} = x_{ij}(2\pi)$. Характеристическое уравнение этого отображения имеет вид

$$\varrho^2 - 2a\varrho + 1 = 0, \tag{3.6}$$



где величина $a = 1/2(y_{11} + y_{22})$ — функция параметра γ . Если $|a| > 1$, то неподвижная точка отображения (3.4) неустойчива. И не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи [6].

Если же $|a| \leq 1$, то для строгого решения вопроса об устойчивости недостаточно анализа за линейного приближения. Здесь целесообразно предварительно сделать в отображении (3.4) линейную замену переменных

$$q = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p = n_{21}Q + n_{22}P \quad (d = n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12} \neq 0), \quad (3.7)$$

приводящую матрицу $\mathbf{X}(2\pi)$ линеаризованного отображения (3.4) к ее вещественной нормальной форме \mathbf{G} . Пусть

$$F_3 = d^{-1}S_3, \quad F_4 = d^{-1}S_4 + \frac{1}{2} \left[n_{12}n_{22} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right)^2 - 2n_{12}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right) \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right) + n_{11}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right)^2 \right],$$

где S_3 и S_4 выражены через Q_0, P_0 в соответствии с заменой (3.7). В новых переменных отображение будет симплектическим и может быть записано в виде, аналогичном (3.4):

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$U_1 = Q_0 - \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_0 \partial Q_0} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + O_4, \quad V_1 = P_0 + \frac{\partial F_3}{\partial Q_0} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0^2} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_0} + O_4.$$

Запишем формы F_3 и F_4 в виде

$$F_k = \sum_{m+n=k} f_{mn} Q_0^m P_0^n \quad (k = 3, 4). \quad (3.9)$$

Если корень уравнения (3.6) таков, что $\varrho^s = 1$, то имеет место резонанс порядка s . Для задачи об устойчивости наиболее важны резонансы до четвертого порядка включительно. При резонансе первого, второго, третьего и четвертого порядков величина a в уравнении (3.6) равна, соответственно, 1, -1 , $-1/2$ и 0. Условия устойчивости неподвижной точки отображения при наличии этих резонансов и в нерезонансном случае можно выразить [5] через коэффициенты f_{mn} форм (3.9), содержащихся в записи отображения (3.8).

Рассмотрим устойчивость периодического движения тела, соответствующего решению $\tilde{x}_1(\nu)$ краевой задачи (2.4)–(2.5). Это решение существует при всех физически допустимых значениях параметра γ : $-3 \leq \gamma \leq 3$. Вычисления показали, что величина $a = a(\gamma)$ — монотонно убывающая функция. На рис. 3 показан участок графика функции $a(\gamma)$ для значений γ , принадлежащих отрезку $[-0.05, 0.25]$. На интервале

$$0 = \gamma_1^{(1)} < \gamma < \gamma_2^{(1)} = 0.1963 \quad (3.10)$$

имеем $|a| < 1$. Следовательно, здесь движение устойчиво в первом приближении. Для значений γ вне отрезка $[0, \gamma_2^{(1)}]$ имеем $|a| > 1$, и здесь движение неустойчиво; на рис. 3 участки кривой $a(\gamma)$, отвечающие неустойчивому движению, изображены штриховыми линиями.

Рассмотрим граничные точки интервала (3.10). При $\gamma = \gamma_1^{(1)} = 0$ реализуется резонанс первого порядка. Но строгое исследование устойчивости здесь совсем элементарно. Действительно, при $\gamma = 0$ уравнения возмущенного движения становятся линейными, так как все слагаемые H_k

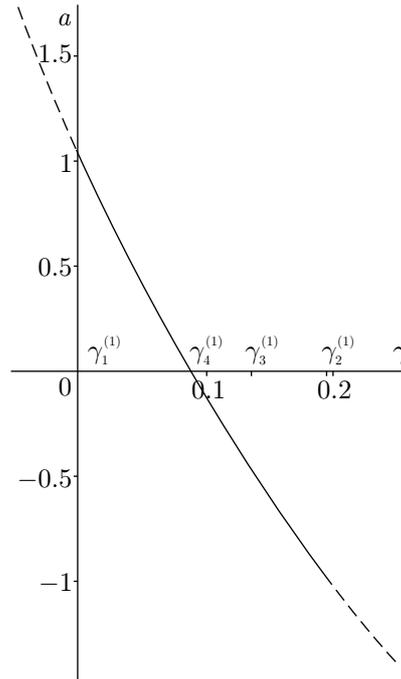


Рис. 3. Зависимость коэффициента a от γ для решения $\tilde{x}_1(\nu)$ ($\gamma_1^{(1)} = 0$, $\gamma_4^{(1)} = 0.0862$, $\gamma_3^{(1)} = 0.1376$, $\gamma_2^{(1)} = 0.1963$)

($k \geq 3$) в разложении (3.2) обращаются в нуль и функция Гамильтона возмущенного движения имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2(1 + e \cos \nu)^2}.$$

Движение системы с такой функцией Гамильтона очевидно неустойчиво.

Точка $\gamma = \gamma_2^{(1)} = 0.1963$ отвечает резонансу второго порядка. Здесь в линейризованном отображении (3.5) имеем $y_{11} = y_{22} = -1$, $y_{12} = 4.7771$, $y_{21} = 0$. После замены переменных $q = \sqrt{y_{12}} Q$, $p = 1/\sqrt{y_{12}} P$ отображение T записывается в виде равенства (3.8), в котором

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$F_3 = 0.1771 Q_0^3 - 0.2656 Q_0^2 P_0 + 0.6031 Q_0 P_0^2 - 0.2573 P_0^3,$$

$$F_4 = 0.4170 Q_0^4 - 0.5842 Q_0^3 P_0 + 1.5800 Q_0^2 P_0^2 - 1.1292 Q_0 P_0^3 + 0.1962 P_0^4.$$

Величина $g = 8f_{40} - 12f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2 = 3.6184$ положительна, поэтому [5] при $\gamma = \gamma_2^{(1)}$ имеет место неустойчивость.

Для значений γ из интервала (3.10) нормальная форма линейризованного отображения (3.4) задает поворот на угол $\chi = \arccos a$:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ -\sin \chi & \cos \chi \end{vmatrix}.$$

При этом приведение отображения (3.4) к форме (3.8) можно осуществить при помощи замены переменных (3.7) вида

$$q = y_{12}Q, \quad p = (a - y_{11})Q + \sqrt{1 - a^2}P.$$

Введем обозначения

$$a_1 = f_{30} - f_{12}, \quad a_2 = f_{12} + 3f_{30}, \quad a_3 = f_{22} - f_{40} - f_{04},$$

$$b_1 = f_{21} - f_{03}, \quad b_2 = f_{21} + 3f_{03}, \quad b_3 = f_{13} - f_{31},$$

$$k = 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) - 8a_2b_2 + 6(a_1b_2 - a_2b_1) +$$

$$+ 9\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \frac{2a-1}{2a+1} (a_1^2 + b_1^2) + 3\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} (a_2^2 + b_2^2),$$

$$k_1 = 2[4a_3 + 9a_1b_1 - a_2b_2 + 3\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} (a_1a_2 - b_1b_2)],$$

$$k_2 = 8b_3 - 9(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 6\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} (a_1b_2 + a_2b_1).$$

Внутри интервала (3.10) возможны один резонанс третьего порядка ($\gamma = \gamma_3^{(1)} = 0.1376$) и один резонанс четвертого порядка ($\gamma = \gamma_4^{(1)} = 0.0862$) (см. рис. 3). При $\gamma = \gamma_3^{(1)}$ имеем $a_1 = 0$, $b_1 = 0.5008$; так как $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, то [5] имеет место неустойчивость. При $\gamma = \gamma_4^{(1)}$ величина $|k| - \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 35.9978 > 0$, поэтому движение устойчиво [5].

Теперь рассмотрим значения γ из интервала (3.10), не являющиеся резонансными ($\gamma \neq \gamma_3^{(1)}$, $\gamma \neq \gamma_4^{(1)}$). На рис. 4 показан график функции $k = k(\gamma)$. Эта функция обращается в нуль только при одном значении $\gamma = \gamma_*^{(1)} = 0.1356$. Поэтому в интервале (3.10) при $\gamma \neq \gamma_3^{(1)}$, $\gamma \neq \gamma_*^{(1)}$ имеет место устойчивость [5, 7].

Таким образом периодическое движение твердого тела, отвечающее решению $\tilde{x}_1(\nu)$ краевой задачи (2.4)–(2.5) (существующему при всех физически допустимых значениях параметра γ ($-3 \leq \gamma \leq 3$)), неустойчиво для $\gamma = \gamma_3^{(1)} = 0.1376$ и для значений γ , лежащих на отрезках $-3 \leq \gamma \leq 0$ и $0.1963 = \gamma_2^{(1)} \leq \gamma \leq 3$; для остальных значений γ , кроме, быть может, $\gamma = \gamma_*^{(1)} = 0.1356$ имеет место устойчивость по Ляпунову.

Кратко остановимся на результатах исследования устойчивости периодических движений тела, отвечающих решениям $\tilde{x}_2(\nu)$ и $\tilde{x}_3(\nu)$ краевой задачи (2.4)–(2.5). Вычисления показали, что для решения $\tilde{x}_2(\nu)$ величина $|a(\gamma)| > 1$ для всех значений γ из области существования этого решения. Следовательно, соответствующее решению $\tilde{x}_2(\nu)$ периодическое движение твердого тела неустойчиво.

Для решения $\tilde{x}_3(\nu)$ результаты исследования устойчивости формулируются менее просто. Не останавливаясь на подробностях вычислений, приведем только окончательные выводы. Решение $\tilde{x}_3(\nu)$ задачи (2.4)–(2.5) существует для значений γ , принадлежащих отрезку $2.4840 = \gamma_1^{(3)} < \gamma \leq 3$. На этом отрезке существует интервал устойчивости в первом приближении:

$$2.4840 = \gamma_1^{(3)} < \gamma < \gamma_2^{(3)} = 2.8310. \quad (3.11)$$

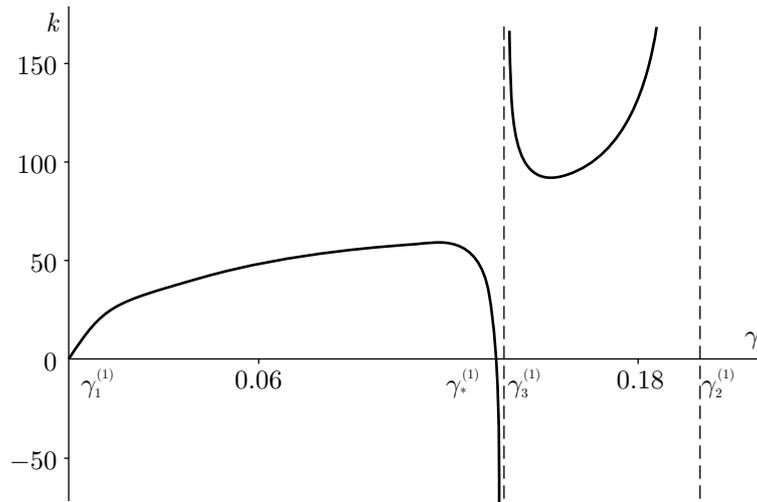


Рис. 4. График функции $k(\gamma)$ для решения $\tilde{x}_1(\nu)$

При $\gamma_2^{(3)} < \gamma \leq 3$ имеем $|a| > 1$, и соответствующее периодическое движение твердого тела неустойчиво. В граничных точках интервала (3.11) $\gamma = \gamma_1^{(3)}$ и $\gamma = \gamma_2^{(3)}$ реализуются резонансы первого и второго порядков соответственно. Нелинейный анализ показал, что при этих резонансах имеет место неустойчивость.

Внутри интервала (3.11) при $\gamma = \gamma_3^{(3)} = 2.6968$ реализуется резонанс третьего порядка, а при $\gamma = \gamma_4^{(3)} = 2.5853$ — резонанс четвертого порядка; оказалось, что при этих резонансах периодическое движение твердого тела неустойчиво. Для остальных значений γ из интервала (3.11), кроме, быть может, $\gamma = \gamma_*^{(3)} = 2.6266$, периодическое движение тела, отвечающее решению $\tilde{x}_3(\nu)$, устойчиво по Ляпунову.

4. Об устойчивости по отношению к пространственным возмущениям

Рассмотрим устойчивость периодических движений твердого тела, отвечающих решениям $\tilde{x}_1(\nu)$ и $\tilde{x}_3(\nu)$, по отношению к пространственным возмущениям. Ограничимся только первым (линейным) приближением.

Положим в функции (1.1)

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \psi = \pi + q_2, \quad p_\theta = p_1, \quad p_\psi = p_2.$$

Квадратичная часть Γ_2 разложения этой функции в ряд по степеням q_i, p_i ($i = 1, 2$) описывает линейную задачу об устойчивости плоских движений твердого тела по отношению к пространственным возмущениям. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & \frac{1}{2} \left[\frac{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi}{B(1 + e \cos \nu)^2} p_\varphi^2 - p_\varphi - 3(1 + e \cos \nu) \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi - C}{A} \right] q_1^2 + \\ & + \frac{(B - A) \sin 2\varphi p_\varphi}{2B(1 + e \cos \nu)^2} q_1 p_1 + \left[\frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) p_\varphi}{B(1 + e \cos \nu)^2} - 1 \right] q_1 p_2 + \frac{1}{2} p_\varphi q_2^2 + q_2 p_1 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}{2B(1 + e \cos \nu)^2} p_1^2 + \frac{(B - A) \sin 2\varphi}{2B(1 + e \cos \nu)^2} p_1 p_2 + \frac{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi}{2B(1 + e \cos \nu)^2} p_2^2. \quad (4.1)$$

Здесь φ и p_φ отвечают невозмущенному плоскому движению твердого тела:

$$\varphi = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\tilde{x}_j(\nu), \quad p_\varphi = \frac{C}{2A}(1 + e \cos \nu)^2 \left(3 + \frac{d\tilde{x}_j(\nu)}{d\nu} \right) \quad (j = 1, 3).$$

Для фиксированного значения $e = 0.2056$ уравнения возмущенного движения зависят не от одного параметра γ , как это было в случае только плоских возмущений, а от двух безразмерных инерционных параметров. В качестве второго параметра примем величину $\alpha = C/A$. Пусть параметр γ принимает только те значения, для которых рассматриваемые движения тела устойчивы по отношению к плоским возмущениям: для решения $\tilde{x}_1(\nu)$ $0 < \gamma < \gamma_2^{(1)}$, $\gamma \neq \gamma_3^{(1)}$, а для решения $\tilde{x}_3(\nu)$ $\gamma_1^{(3)} < \gamma < \gamma_2^{(3)}$, $\gamma \neq \gamma_3^{(3)}$, $\gamma \neq \gamma_4^{(3)}$. Для заданного значения $\gamma = \gamma^*$ область допустимых значений параметра α (получаемая из неравенства треугольника для осевых моментов инерции тела) определяется неравенством $0 \leq \alpha \leq \alpha^*$, где (α^*, γ^*) — точка гиперболы

$$\gamma = -3 + \frac{6}{\alpha}. \quad (4.2)$$

Характеристическое уравнение линейной системы с функцией Гамильтона (4.1) является возвратным:

$$\varrho^4 - c_1 \varrho^3 + c_2 \varrho^2 - c_1 \varrho + 1 = 0,$$

где c_1 — след фундаментальной матрицы решений, вычисленной при $\nu = 2\pi$, а c_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка. Величины c_1 и c_2 — функции параметров α, γ . Области устойчивости линейной системы задаются системой неравенств [8]

$$-2 < c_2 < 6, \quad 4(c_2 - 2) < c_1^2 < \frac{1}{4}(c_2 + 2)^2. \quad (4.3)$$

Для значений α, γ , не лежащих внутри областей (4.3) или на их границах, имеет место неустойчивость.

Результаты исследования устойчивости периодического движения тела, отвечающего решению $\tilde{x}_1(\nu)$, представлены на рис. 5 в плоскости α, γ . Кривая RS на этом рисунке — участок гиперболы (4.2). Области неустойчивости на рис. 5 выделены штриховкой. Левее кривой PQ имеет место неустойчивость. Правее этой кривой существует девять областей устойчивости. Эти области при $\gamma = 0$ примыкают к интервалам, задаваемым неравенствами

$$\begin{aligned} 0.8826 < \alpha < 0.8866, \quad 0.8988 < \alpha < 1, \quad 1 < \alpha < 1.1518, \\ 1.1777 < \alpha < 1.2824, \quad 1.3041 < \alpha < 1.4032, \quad 1.4255 < \alpha < 1.5921, \\ 1.5946 < \alpha < 1.7870, \quad 1.7952 < \alpha < 1.8791, \quad 1.8797 < \alpha < 2. \end{aligned}$$

При $\gamma = \gamma_2^{(1)}$ области устойчивости примыкают к следующим интервалам:

$$\begin{aligned} 0.8545 < \alpha < 0.8608, \quad 0.8618 < \alpha < 0.9386, \quad 1 < \alpha < 1.1138, \\ 1.1286 < \alpha < 1.2353, \quad 1.2534 < \alpha < 1.3416, \quad 1.3574 < \alpha < 1.5122, \\ 1.5161 < \alpha < 1.6802, \quad 1.6883 < \alpha < 1.7816, \quad 1.7818 < \alpha < 1.8772. \end{aligned}$$

По существующим данным [9] моменты инерции Меркурия удовлетворяют неравенству $C > A > B$, а для безразмерных параметров α и γ справедливы оценки $\alpha - 1 \sim 10^{-4} \div 2.0 \cdot 10^{-4}$, $\gamma \sim 3.5 \cdot 10^{-4} \div 4.6 \cdot 10^{-4}$. Для таких значений параметров движения тела, отвечающие решению $\tilde{x}_1(\nu)$, устойчивы, причем при наличии только плоских возмущений имеет место устойчивость в строгой нелинейной постановке задачи.

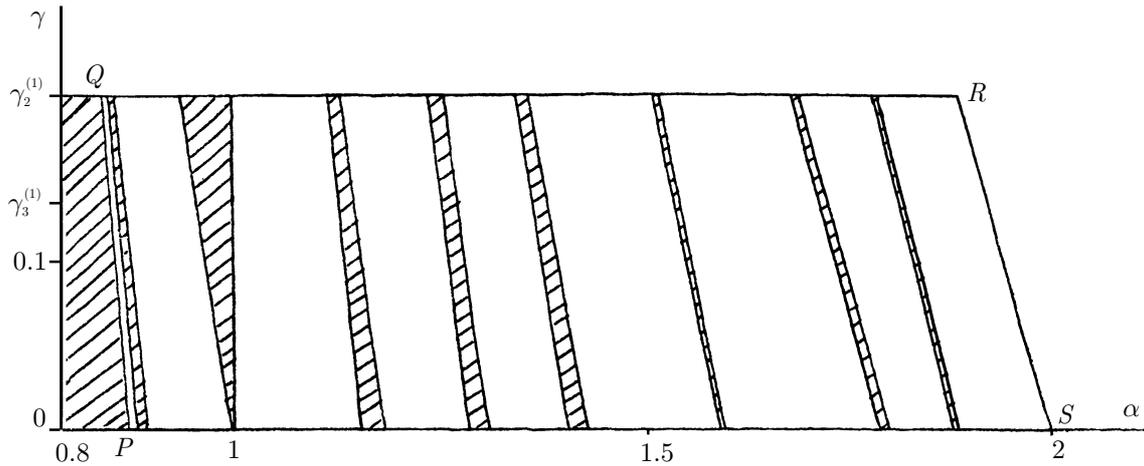


Рис. 5. Области устойчивости и неустойчивости решения $\tilde{x}_1(\nu)$ по отношению к пространственным возмущениям $(P(0.8826, 0), Q(0.8545, 0.1963), R(1.8772, 0.1963), S(2, 0))$

Вычисления показали, что при $\alpha < 1$ периодическое движение тела, отвечающее решению $\tilde{x}_3(\nu)$, неустойчиво; результаты исследования устойчивости для $\alpha > 1$ представлены на рис. 6 в плоскости α, γ . Кривая R_1R_2 на этом рисунке — участок гиперболы (4.2), области неустойчивости заштрихованы. К отрезку $\gamma = \gamma_1^{(3)}$ примыкают четыре области неустойчивости; на самом отрезке они высекают интервалы

$$1.0096 < \alpha < 1.0136, \quad 1.0274 < \alpha < 1.0476,$$

$$1.0657 < \alpha < 1.0758, \quad 1.0857 < \alpha < 1.0940.$$

Существует шесть областей устойчивости. Четыре из них «широкие» и проходят от отрезка $\gamma = \gamma_1^{(3)}$ до отрезка $\gamma = \gamma_2^{(3)}$, а две области устойчивости примыкают только к отрезку $\gamma = \gamma_2^{(3)}$ и являются очень узкими, границы каждой из них на рис. 6 не отличимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00363) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2975.2008.1)

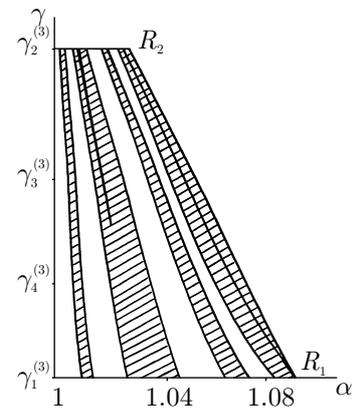


Рис. 6. Области устойчивости и неустойчивости решения $\tilde{x}_3(\nu)$ по отношению к пространственным возмущениям $(R_1(1.0941, 2.4840), R_2(1.0290, 2.8310))$

Список литературы

[1] Приливы и резонансы в Солнечной системе, Сб. переводов статей под ред. В. П. Жаркова, М.: Мир, 1975, 287 с.

[2] Белецкий В. В., Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле, М.: Изд-во МГУ, 1975, 308 с.

[3] Белецкий В. В., Лавровский Э. К., К теории резонансного вращения Меркурия, *Астрон. журнал*, 1975, т. 52, вып. 6., с. 1299–1308.

- [4] Маркеев А. П., *Теоретическая механика*, М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007, 592 с.
- [5] Маркеев А. П., Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем, *Изв. РАН. МТТ*, 2004, №6, с. 3–12.
- [6] Малкин И. Г., *Теория устойчивости движения*, М.: Наука, 1966., 530 с.
- [7] Мозер Ю., *Лекции о гамильтоновых системах*, М.: Мир, 1973, 168 с.
- [8] Ляпунов А. М., *Общая задача об устойчивости движения*, Собр. соч., М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2, с. 7–263.
- [9] Barkin Yu. V., Ferrandiz J. M. Dynamic structure and rotation Mercury, *Astron. and Astroph. Trans.*, 2005, vol. 24, no. 1, p. 61–79.