УДК 517.93+512.77

Изоморфизмы геодезических потоков на квадриках

А. В. Борисов, И. С. Мамаев
Институт компьютерных исследований
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
borisov@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 03 июня 2008 г.

В работе рассмотрен ряд известных изоморфизмов между задачей Якоби о геодезических и интегрируемыми случаями из динамики твердого тела (случаи Клебша и Бруна). Указаны взаимосвязи между этими изоморфизмами. Сформулирована задача компактификации для геодезических потоков на некомпактных поверхностях. Высказана гипотеза о ее связи с интегрируемостью.

Ключевые слова: квадрика, геодезические потоки, интегрируемость, компактификация, регуляризация, изоморфизм

A. V. Borisov and I. S. Mamaev
Isomorphisms of geodesic flows on quadrics

We consider several well-known isomorphisms between Jacobi's geodesic problem and some integrable cases from rigid body dynamics (the cases of Clebsch and Brun). A relationship between these isomorphisms is indicated. The problem of compactification for geodesic flows on noncompact surfaces is stated. This problem is hypothesized to be intimately connected with the property of integrability.

Keywords: quadric, geodesic flows, integrability, compactification, regularization, isomorphism
Mathematical Subject Classifications: 53C22, 37Kxx

В ряде работ [9, 11, 12, 24, 25, 26, 27] были замечены различные аналогии между классической интегрируемой задачей Якоби о поведении геодезических на эллипсоиде и случаем Клебша (идентичным случаю Бруна и системе Неймана) в уравнениях Кирхгофа, описывающих движение твердого тела в безграничной идеальной жидкости. Наша работа носит в основном методический характер. Мы постарались систематизировать указанные выше результаты и тем самым объяснить недавние изоморфизмы, найденные для интегрируемой задачи о движении неголономного шара Чаплыгина и случая Клебша. Интересно, что в некоторых случаях преобразование, отображающее одну систему на другую, может решать задачу компактификации движения, что было бы полезно для различных качественных и численных исследований. Однако такая компактификация возможна не всегда. Нами сформулирована гипотеза, связывающая возможность компактификации с существованием дополнительного аналитического интеграла. Рассмотрим последовательно уравнения различных классических интегрируемых систем в системах переменных, наиболее удобных для установления соответствующих изоморфизмов.

1. Задача Якоби о геодезических

Пусть материальная точка движется в потенциальном поле $U(\boldsymbol{x})$ по двумерному эллипсоиду в $\mathbb{R}^3 = \{\boldsymbol{x}\}$, определённому уравнением

$$(\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x}) = \zeta, \tag{1}$$

где $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$, $\zeta = \mathrm{const}$, $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение. Записывая лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}) - U(\boldsymbol{x}),$$

получим уравнения движения с неопределенным множителем в виде

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} + \lambda \mathbf{I}\boldsymbol{x}, \quad \lambda = \frac{\left(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}\right) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{x}})}{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}, \tag{2}$$

где λ находится из условия связи (1).

При $U = 0$ получаем уравнения геодезического потока на эллипсоиде (задача Якоби). Эта система, как показал Якоби, является интегрируемой, и квадратичные по скоростям интегралы движения могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}) \quad \text{— энергия,}\\ \Phi = (\dot{\boldsymbol{x}}, \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{x}})(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x}) \quad \text{— интеграл Иоахимсталя.}\end{gathered} \tag{3}$$

2. Случай Клебша и системы Неймана и Бруна

Уравнения Кирхгофа, описывающие движение твёрдого тела в идеальной несжимаемой жидкости, могут быть представлены в форме [19]

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \tag{4}$$

где гамильтониан — однородная квадратичная форма

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{A}\boldsymbol{M}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}). \tag{5}$$

В этом случае $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{M}$ обозначают импульс и момент тела, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — постоянные симметричные матрицы, определяемые распределением масс и геометрией поверхности тела.

Уравнения (4), как известно [29], гамильтоновы со скобкой Ли–Пуассона, определяемой алгеброй $e(3)$:

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0. \tag{6}$$

Скобка (6) допускает две функции Казимира

$$K_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \quad K_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}),$$

которые являются первыми интегралами системы (4). Всюду в дальнейшем в данной работе мы будем полагать

$$K_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

В общем случае, как известно [25, 20], уравнения Кирхгофа неинтегрируемы. Известные интегрируемые случаи подробно описаны в [19]. В этой работе нас интересует наиболее известный интегрируемый случай — **случай Клебша**, который определяется следующими соотношениями на параметры:

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{C} = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3), \tag{7}$$
$$\frac{c_2 - c_3}{a_1} + \frac{c_3 - c_1}{a_2} + \frac{c_1 - c_2}{a_3} = 0.$$

При этих условиях система (4) допускает дополнительный квадратичный интеграл (причем система остается интегрируемой и при ненулевой постоянной площадей, т. е. $K_2 \neq 0$).

Система Бруна — частный случай, для которого $a_i \neq a_j$, при этом гамильтониан и дополнительный интеграл можно представить в стандартной форме следующего вида

$$H_B = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{A}\boldsymbol{M}) + \frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\gamma}), \quad F_B = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) - \frac{\alpha}{\det \mathbf{A}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}), \tag{8}$$

где $\alpha = \text{const}$. (Это представление достигается путём добавления к гамильтониану и интегралу функции Казимира $\boldsymbol{\gamma}^2$, умноженной на константу.)

Система Бруна описывает также движение твёрдого тела с неподвижной точкой в квадратичном потенциале (в общем случае при $K_2 \neq 0$). Заметим, что система Бруна получается также при исследовании приближенных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки в поле ньютоновского гравитирующего центра. Тождественность задач Бруна и Клебша была отмечена В.А. Стекловым [14].

При $a_1 = a_2 = a_3$ и при дополнительном ограничении $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ система Клебша сводится к хорошо известной задаче Неймана.

Системой Неймана называют систему, описывающую движение материальной точки по сфере S^2 в квадратичном потенциале. Чтобы показать ее эквивалентность случаю Клебша, рассмотрим движение точки по сфере

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Без ограничения общности квадратичный потенциал запишем в форме

$$U(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{C} = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3),$$

тогда уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = -\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} + ((\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - (\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}))\,\boldsymbol{\gamma}.$$

Несложно показать, что после замены переменных

$$\boldsymbol{M} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma},$$

получим систему (4) при дополнительных условиях $K_1 = 1$, $K_2 = 0$, с гамильтонианом и интегралом следующего вида

$$H_N = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}), \quad F_N = (\boldsymbol{M}, \mathbf{C}\boldsymbol{M}) - \det\mathbf{C}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}). \tag{9}$$

В динамике твердого тела система (9) описывает движение шарового волчка в квадратичном потенциале.

При подходящем выборе матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ интегралы систем Неймана и Бруна определяют одни и те же инвариантные торы, а гамильтонианы H_N, H_B задают трансверсальные обмотки на них.

3. Три изоморфизма геодезического потока на эллипсоиде

Введём следующие обозначения констант интегралов в задаче Якоби, которых будем придерживаться в дальнейшем:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 = h, \quad \Phi = (\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x}) = \varkappa, \quad (\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x}) = \zeta. \tag{10}$$

Известно три явных изоморфизма, связывающих фазовый поток с задачи Якоби на различных семействах интегральных поверхностей. Эти изоморфизмы содержатся в работах [9, 10, 25, 26]; здесь мы приведем из в наиболее удобной форме, чтобы установить взаимосвязь между ними. Далее мы снабдим формулировки теорем с поясняющими комментариями и приведем их краткие доказательства.

Теорема 1 (Колосов–Козлов). *На фиксированном уровне интеграла энергии $\mathcal{E} = h$ и $\zeta = 1$ поток задачи Якоби траекторно эквивалентен потоку системы Бруна* (8) *с гамильтонианом*

$$H_B = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M}) - \frac{h}{\det\mathbf{I}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}), \tag{11}$$

при фиксированном нулевом значении гамильтониана $H_B = 0$ и $K_1 = 1$, $K_2 = 0$.

Замена переменных и времени в данном случае имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{M} = (\mathbf{I}^{-1/2}\dot{\boldsymbol{x}}) \times (\mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{x}), \quad dt = \frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}{\det\mathbf{I}}d\tau = \frac{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}{\det\mathbf{I}}d\tau. \tag{12}$$

Теорема 2 (Мозер). *На фиксированном уровне интеграла энергии $\mathcal{E} = h$ фазовый поток задачи Якоби траекторно эквивалентен потоку системы Бруна* (8) *с гамильтонианом*

$$H_B = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M}) - \frac{\zeta}{2\det\mathbf{I}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}), \tag{13}$$

при фиксированном нулевом значении гамильтониана $H_B = 0$ и $K_1 = \gamma^2 = 2h$, $K_2 = 0$.

Замена переменных и времени в данном случае:

$$\boldsymbol{\gamma} = \dot{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{M} = \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{x}, \quad dt = \frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}{\det \mathbf{I}} d\tau. \tag{14}$$

Теорема 3 (Кнёррер). *На фиксированном уровне интеграла Иоахимсталя* $\Phi = \varkappa$ *фазовый поток задачи Якоби траекторно эквивалентен потоку системы Неймана* (9) *с гамильтонианом*

$$H_N = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \frac{\varkappa}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}), \tag{15}$$

при фиксированном нулевом значении дополнительного интеграла

$$F_N = (\boldsymbol{M}, \mathbf{I}\boldsymbol{M}) - \varkappa \det \mathbf{I}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) = 0, \tag{16}$$

и $K_1 = 1$, $K_2 = 0$.

Замена переменных и времени в данном случае:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}}\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{I}\boldsymbol{x}, \quad dt = (\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})d\tau = \frac{d\tau}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \tag{17}$$

Прежде чем доказывать эти теоремы сделаем несколько комментариев.

1. Согласно уравнениям (14), (17), замены переменных, используемые в изоморфизмах Мозера и Кнёррера носят универсальный характер и могут применяться к сведению геодезического потока на любой поверхности к системе на сфере. В случае Мозера мы получаем систему, описывающую поведение касательного вектора к траектории, а в случае Кнёррера — эволюцию нормали к поверхности вдоль траектории. Кроме этого, конструкция Кнёррера допускает добавление потенциала [15].

2. Замена (12) (изоморфизм Колосова–Козлова) позволяет естественным образом переносить натуральные системы из динамики твёрдого тела на случай движения точки по эллипсоиду в потенциальном поле.

3. Некоторые приписывают изоморфизм теоремы 2 Д. Мамфорду, хотя сам Мамфорд в книге [10] явно указывает, что конструкция принадлежит Мозеру. В то же время, по-видимому, в опубликованных работах Мозера этот результат не встречается.

4. Изоморфизм теоремы 1, по-видимому, впервые был установлен Г. В. Колосовым, хотя сам Колосов в работе [27] пишет, что он развивает соображения Г. Минковского [11]. В то же время в работе [11] этот изоморфизм явно не встречается. Работа Колосова [27] впоследствии была забыта, и В. В. Козлов установил этот изоморфизм независимо и несколько иначе [26].

5. Подчеркнём, что в теоремах 1–3 речь идёт об изоморфизмах, задаваемых явными соотношениями. Отметим в этой связи результат работы [18] (полученный топологическими методами) о траекторном изоморфизме геодезического потока на эллипсоиде и в случае Эйлера в динамике твёрдого тела, при этом явные преобразования, описывающие этот изоморфизм, неизвестны (и вряд ли могут быть получены). В то же время при использовании замены (12) случай Эйлера переходит в систему, описывающую движение точки на эллипсоиде в потенциале $U(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\alpha}{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}$, $\alpha = \text{const}$.

6. Для конструкции Мозера (теорема 2) имеется еще одна возможность выбора вектора момента так, что
$$\boldsymbol{\gamma} = \dot{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{M} = \dot{\boldsymbol{x}} \times \nabla F = \dot{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{I}\boldsymbol{x},$$
где $F = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x}) - \zeta\right) = 0$ — уравнение связи. В этом случае после замены времени $\frac{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})^2}{2h\varkappa}dt = d\tau$ получим систему на сфере $\boldsymbol{\gamma}^2 = 2h$ с гамильтонианом
$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) - \frac{h\varkappa}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}$$
на уровне $H = 0$. Это известная система Брадена [4], разделяющаяся в сфероконических координатах (см. также [22]).

Приведем доказательства сформулированных теорем в едином стиле.

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим движение материальной точки по эллипсоиду $(\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x}) = 1$ в потенциальном поле $U(\boldsymbol{x})$; функция Лагранжа имеет вид
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}) - U(\boldsymbol{x}), \tag{18}$$
при этом очевидно сохраняется энергия
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + U(\boldsymbol{x}).$$
Сделав линейное преобразование $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{x}$, получим систему на сфере $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ вида
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\dot{\gamma}) - U(\gamma). \tag{19}$$
Выполнив преобразование Лежандра в избыточных переменных
$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}} + \lambda\gamma = \mathbf{I}^{-1}\dot{\gamma} + \lambda\gamma, \tag{20}$$
где из условия связи $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ находим $\lambda = \dfrac{(\boldsymbol{p}, \mathbf{I}\gamma)}{(\gamma, \mathbf{I}\gamma)}$ и функция Гамильтона запишется в виде
$$H = \mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{p}, \mathbf{I}\boldsymbol{p})(\gamma, \mathbf{I}\gamma) - (\boldsymbol{p}, \mathbf{I}\gamma)^2}{(\gamma, \mathbf{I}\gamma)} + U(\gamma), \tag{21}$$
где $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{p}$ — канонически сопряженные переменные ($\{\gamma_i, p_j\} = \delta_{ij}$).

Замечание 1. Система (21) всегда допускает пару инволютивных интегралов $\boldsymbol{\gamma}^2$, H. Таким образом, для её интегрируемости как системы с тремя степенями свободы необходим ещё один интеграл.

После замены переменных
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\gamma}$$
получим систему вида (4) с нулевой постоянной площадей $K_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, и гамильтонианом
$$H = \frac{\det\mathbf{I}}{2}\frac{(\boldsymbol{M}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M})}{(\gamma, \mathbf{I}\gamma)} + U(\gamma).$$

На фиксированном уровне энергии $H = h$ уравнения движения этой системы можно представить в форме

$$\varphi(\boldsymbol{\gamma})\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M} + \gamma \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \left(\varphi(\boldsymbol{\gamma})(U(\boldsymbol{\gamma}) - h)\right), \quad \varphi(\boldsymbol{\gamma})\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{M} \times \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M},$$

$$\varphi(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{(\boldsymbol{\gamma},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}{\det \mathbf{I}}.$$

Таким образом, после замены времени $dt = \varphi(\boldsymbol{\gamma})d\tau$ вновь получим уравнения на алгебре $e(3)$ в виде

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{d\tau} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \boldsymbol{M}},$$

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M}) + \frac{(\boldsymbol{\gamma},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}{\det \mathbf{I}}(U(\boldsymbol{\gamma}) - h).$$

При этом, подставляя вместо h исходное выражение для гамильтониана, находим, что $\widetilde{H} = 0$.

Полагая $U(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{\gamma}) \equiv 0$, получим требуемый результат

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M}) + \frac{(\boldsymbol{\gamma},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}{\det \mathbf{I}}(U(\boldsymbol{\gamma}) - h).$$

■

Доказательство теоремы 2.

Сделаем замену переменных следующего вида

$$\boldsymbol{\gamma} = \dot{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{M} = \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{x}. \tag{22}$$

При этом согласно (10)

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 2h = \mathrm{const}, \quad (\boldsymbol{M},\, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \tag{23}$$

т. е. фактически рассматривается система на (ко)касательном расслоении «сферы скоростей».

Домножая второе из уравнений (22) на $\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}$ и учитывая соотношение $(\mathbf{I}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{x}) = 0$, получим

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{M} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}}{(\boldsymbol{\gamma},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}. \tag{24}$$

Откуда находим

$$(\boldsymbol{x},\, \mathbf{I}\boldsymbol{x}) = \det \mathbf{I}\frac{(\boldsymbol{M},\, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M})}{(\boldsymbol{\gamma},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})} = \zeta. \tag{25}$$

Здесь используется известное соотношение для векторного произведения $(\mathbf{A}\boldsymbol{a})\times(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

После замены времени $\dfrac{\det \mathbf{I}}{(\mathbf{I}\boldsymbol{x},\, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}dt = d\tau$ с помощью (2) получаем

$$\boldsymbol{\gamma}' = -\frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{\gamma})\mathbf{I}\boldsymbol{x}}{\det \mathbf{I}} = -\frac{\mathbf{I}(\boldsymbol{M} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}{\det \mathbf{I}}$$

и окончательно

$$\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M}.$$

Аналогично для $\boldsymbol{M}'$ имеем уравнение $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{x}$, подставляя сюда $\boldsymbol{x}$ из (24) и используя тождество векторной алгебры вида $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}+(\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{d})\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}-(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{d})\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, находим

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} \times \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M} - \frac{(\boldsymbol{M},\, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M})}{(\boldsymbol{\gamma},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}.$$

С учетом соотношения (25) получаем поток задачи Бруна (8) с гамильтонианом вида

$$H_B = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M}) - \frac{\zeta}{2\det\mathbf{I}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}).$$

Причём, очевидно, что вследствие соотношения (25) необходимо зафиксировать его нулевой уровень $H = 0$.

Доказательство теоремы 3.

Покажем теперь, что задача Якоби также изоморфна системе Неймана (при некоторых ограничениях на константы интегралов). Запишем уравнения (2) при $U = 0$ в виде

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\Phi}{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})^2}\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \tag{26}$$

где Φ — интеграл Иоахимсталя (3). Используя (26) получим уравнения, описывающие эволюцию нормали к эллипсоиду $\boldsymbol{n} = \dfrac{\mathbf{I}\boldsymbol{x}}{\sqrt{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}}$, в виде

$$\ddot{\boldsymbol{n}} = -\mu^4\Phi\left(\mathbf{I}\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}, \mathbf{I}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right) - (\dot{\boldsymbol{n}}, \dot{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{n} + \frac{2\dot{\mu}}{\mu}\dot{\boldsymbol{n}},$$

где $\mu = \sqrt{(\boldsymbol{n}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{n})} = (\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})^{-1/2}$.

Зафиксируем уровень интеграла Иоахимсталя $\Phi = \varkappa$ и сделаем замену времени $\mu^2\,dt = d\tau$, при этом $\dot{\boldsymbol{n}} = \mu^2\boldsymbol{n}'$.

Окончательно получим

$$\boldsymbol{n}'' = -\varkappa\mathbf{I}\boldsymbol{n} + \left(\varkappa(\boldsymbol{n}, \mathbf{I}\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}')\right)\boldsymbol{n}.$$

Делая замену переменных $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{n}$, получаем

$$\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{M}' = \varkappa\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}.$$

Следовательно, получим уравнения в форме (4) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) + \frac{\varkappa}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}),$$

т. е. задачу Неймана. Записывая дополнительный интеграл этой системы в виде

$$F = (\boldsymbol{M}, \mathbf{I}\boldsymbol{M}) - \varkappa\det\mathbf{I}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})$$

и учитывая, что $\varkappa$ — постоянная интеграла Иоахимсталя, находим, что $F = 0$. ■

Рассмотрим некоторые естественные следствия теорем 1–3 об изоморфизмах различных систем на сфере и близких к ним.

Изоморфизм задачи Бруна и Неймана. Рассмотрим систему Бруна, гамильтониан и дополнительный интеграл которой имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M}) - \frac{h}{\det\mathbf{I}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}), \quad F = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + h(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}), \tag{27}$$

причём константы интегралов имеют следующие значения

$$H = 0, \quad F = f, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{28}$$

Используя предыдущие результаты находим, что после преобразования

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathbf{I}^{-1/2}\boldsymbol{\gamma}}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \quad \boldsymbol{K} = \frac{\det\mathbf{I}^{3/2}}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}\mathbf{I}^{-1/2}\left((\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{M}) \times \boldsymbol{\gamma}\right) \tag{29}$$

получим поток задачи Неймана (на $e(3)$) с гамильтонианом и интегралом вида

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{K}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{I}(\boldsymbol{n}, \mathbf{I}\boldsymbol{n}), \quad \widetilde{F} = \frac{(\boldsymbol{K}, \mathbf{I}\boldsymbol{K})}{\det \mathbf{I}} - c(\boldsymbol{n}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{n}), \tag{30}$$

причём константы интегралов и параметр c удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} \boldsymbol{n}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{n}) = 0, \quad \widetilde{F} = 0, \\ \widetilde{H} = \frac{c}{2}\operatorname{Tr}\mathbf{A} - h, \quad \frac{c}{2}\frac{\det(\operatorname{Tr}\mathbf{A} - \mathbf{A})}{\det \mathbf{A}^2} = f + \widetilde{H}\operatorname{Tr}\mathbf{A}^{-1}. \end{gathered} \tag{31}$$

Заметим также, что гамильтониан $\widetilde{H}$ не совпадает по форме с интегралом $F_B(8)$ (т. к. нужно заменить $\mathbf{I} \to \mathbf{I}^{-1}$).

Замена переменных в задаче Бруна. Рассмотрим замену переменных в системе Бруна, аналогичную канонической замене импульсов и координат $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \to (-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, которая не меняет вида уравнений.

Пусть задана система на $e(3)$ с гамильтонианом и дополнительным интегралом вида (27), для которой зафиксируем следующие значения интегралов

$$H = 0, \quad F = f, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = \zeta, \quad (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

После замены переменных

$$\boldsymbol{n} = \frac{\det \mathbf{I}^{1/2}}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}\mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}^{-1/2}\boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{K} = \frac{\det \mathbf{I}^{1/2}}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})}(\mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}^{-1/2}\boldsymbol{M}) \times \mathbf{I}^{-1/2}\boldsymbol{\gamma}. \tag{32}$$

Также получим систему Бруна на $e(3)$ с гамильтонианом и интегралом

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{K}) - \frac{1}{2}\frac{\zeta}{\det \mathbf{I}}(\boldsymbol{n}, \mathbf{I}\boldsymbol{n}), \quad \widetilde{F} = \boldsymbol{K}^2 + \zeta(\boldsymbol{n}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{n})$$

и константы первых интегралов, определенных соотношениями

$$\boldsymbol{n}^2 = 2h, \quad (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{n}) = 0, \quad \widetilde{H} = 0, \quad \widetilde{F} = f.$$

Изоморфизм шара Чаплыгина и системы Неймана. В работе [3] приведены два *различных* траекторных изоморфизма между задачей о шаре Чаплыгина (т. е. системой, описывающей качение динамически несимметричного уравновешенного шара без проскальзывания на плоскости) и системой Бруна на сфере. Связь между этими изоморфизмами определяется соотношениями (32), устанавливающими связь между потоками на различных интегральных поверхностях в системе Бруна.

Замечание 2. Один из этих изоморфизмов был установлен Ю.Н. Федоровым в его докторской диссертации [30].

4. Компактификация

Рассмотрим подробнее случай, когда матрица $\mathbf{I}$, задающая уравнение поверхности (1), не является положительно определенной. При этом очевидно система (2) описывает геодезический поток на некомпактных поверхностях — однополостном и двуполостном гиперболоидах. В то же время, используя преобразования (14) и (17) теорем 2, 3, получим систему без особенностей на двумерной сфере S^2 (т. е. компактной поверхности). Таким образом, соотношения (14), (17) определяют *компактификацию* исходной системы. При этом поверхность (1) (точнее, её связный кусок) переходит в ограниченную область D на S^2, граница которой соответствует бесконечно удалённым точкам исходной поверхности. Траектории системы (2), уходящие на бесконечность, преобразуются в траектории, касающиеся границы D, при этом они за конечное время достигают границы и возвращаются в область D. То есть в этом случае естественным образом строится отображение рассеяния (см. например, [7]), сопоставляющее всякой уходящей на бесконечность траектории (геодезической) некоторую «входящую» траекторию.

Рассмотрим подробнее компактификацию на основе гауссовой проекции (17) (изоморфизм Кнёррера) [16].

Однополостной гиперболоид. Без ограничения общности можно положить $I_1, I_2 > 0$, $I_3 < 0$, при гаусовом отображении однополостной гиперболоид переходит в неодносвязную область, опоясывающую сферу (см. рис. 1.)

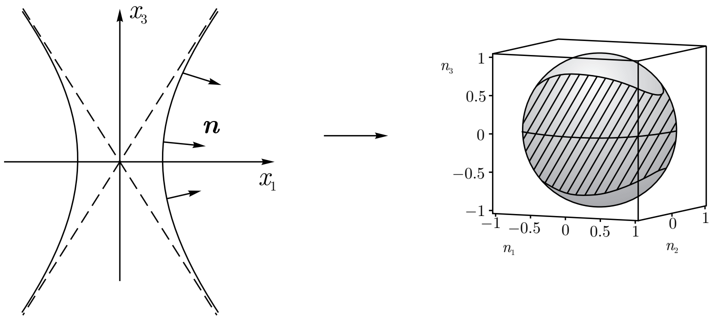

Рис. 1. Схематическое изображение гауссовой проекции для однополостного гиперболоида

Для *двуполостного гиперболоида*, без ограничения общности можно полагать $I_1, I_2 < 0$, $I_3 > 0$, при этом каждая полость переходит в соответствующую область вблизи полюсов сферы (см. рис. 2).

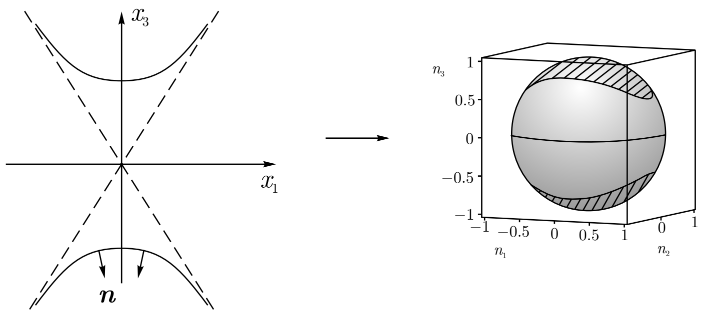

Рис. 2. Схематическое изображение гауссовой проекции для двуполостного гиперболоида

При отображении Гаусса, как мы видим, бесконечно удалённые точки гиперболоида переходят в границу области, определяемой соотношением

$$(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{33}$$

В соотношение (16) подставим выражение $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}$ и представим его в форме

$$\det \mathbf{I} \left((\boldsymbol{\gamma}', \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}')(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\gamma}', \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^2 - \varkappa(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) \right) = 0,$$

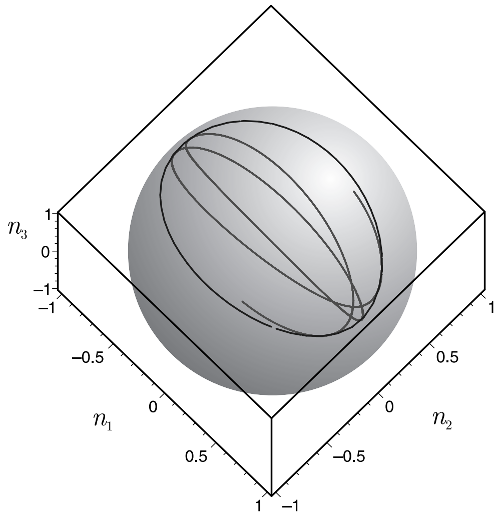

Рис. 3. Характерный вид траекторий при компактификации двуполостного гиперболоида ($I_1 = -5$, $I_2 = -1$, $I_3 = \dfrac{3}{2}$, $\varkappa = 1$)

откуда ясно, что на границе области (33)

$$(\boldsymbol{\gamma}', \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

т. е. траектория касается границы. Несложно показать, анализируя вторую производную функции (33), что после касания границы траектория возвращается в исходную область. Таким образом, изоморфизм Кнёррера в случае некомпактных поверхностей определяет естественную хорошую компактификацию.

Замечание 3. Пусть на границе (33) $Y = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) = 0$ и $Y' = (\boldsymbol{\gamma}', \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) = 0$, тогда вследствие ортогональности $\boldsymbol{\gamma}' \perp \boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\gamma}' \perp \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}$ можно выбрать $\boldsymbol{\gamma}' = \alpha\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}$ и для потока системы Неймана находим

$$Y'' = -\frac{\alpha^2}{\det \mathbf{I}} - \varkappa.$$

Таким образом, для геодезических потоков на некомпактных квадриках существует удобная и естественная компактификация. Возникает естественный вопрос о возможности подобной *компактификации для неинтегрируемых систем* (таких как геодезические потоки на некомпактных поверхностях, отличных от квадрик, частица в поле убывающего потенциала, на плоскости, и т. п.) Ясно, что, по крайней мере с точки зрения численного исследования подобных систем, такая компактификация оказалась бы чрезвычайно полезной, т. к. позволила бы вместо отображения рассеяния [7] (которое достаточнсо сложно реализовать с необходимой точностью) использовать хорошо изученное отображение Пуанкаре.

В общем случае произвольной двустепенной гамильтоновой системы на некомпактном многообразии можно рассматривать компактификацию системы на некотором компактном двумерном многообразии D с краем.

Траектории на D, достигающие границы ∂D, соответствуют траекториям исходной системы, уходящим на бесконечность, и всюду вблизи ∂D компактифицированная система не имеет особенностей (если исходная система не имела особенностей на бесконечности). Тем не менее, по-видимому,

если система не допускает дополнительного аналитического интеграла, то конструктивная компактификация невозможна.

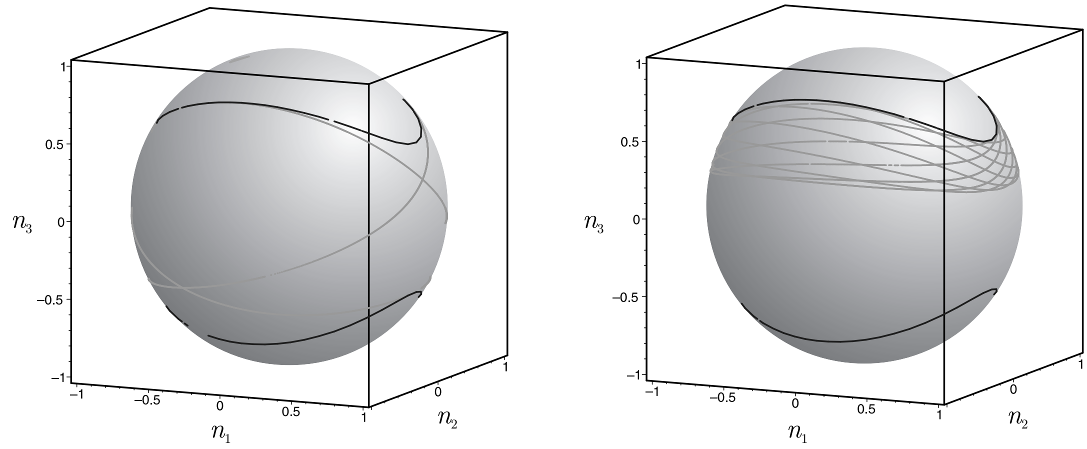

Рис. 4. Характерный вид траекторий при компактификации однополостного гиперболоида ($I_1 = 5$, $I_2 = 1$, $I_3 = -\dfrac{3}{2}$, $\varkappa = 1$)

Замечание 4. Следует иметь ввиду, что отсутствие аналитического интеграла не противоречит существованию бесконечно гладкого интеграла [8].

Замечание 5. В системах более чем с двумя степенями свободы для решения задачи компактификации, видимо, необходимо требовать наличие хотя бы одного дополнительного интеграла. Общая процедура компактификации для систем материальных точек, движущихся в $\mathbb{R}^n$ на сферу S^{N-1} разработана в работе [21]

Действительно, для конструктивной компактификации требуется, чтобы все замены переменных и времени определялись аналитическими функциями. Известно также, что для рассеивающихся траекторий исходной системы «импульсы на бесконечности» $P_i^\infty(x_0, p_0) = P_i(x_0, p_0, t)\big|_{t\to\infty}$ ($i = 1, 2$, x_0, p_0 — начальные условия) являются первыми интегралами. В то же время для компактифицированной системы соответствующие траектории достигают границы за конечное время $T(x_0, p_0)$, которое для неособых точек также является аналитической функцией. Следовательно, должен существовать (по крайней мере вблизи границы) полный набор первых аналитических интегралов $P_i^\infty(x_0, p_0) = \widetilde{P}_i(x_0, p_0, T(x_0, p_0))$, где $\widetilde{P}_i$ — соответствующие функции, выраженные через переменные компактифицированной системы, что, как известно, невозможно, если исходная система не является интегрируемой (с аналитическими первыми интегралами).

Рассмотрим в качестве примера движение частицы на гиперболоиде в центральном поле вида $U(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2}$. Подобные потенциалы возникают в теории движения жидких самогравитирующих масс [1] и задачах о динамике многочастичных систем [21]. После замены переменных и времени вида

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})}}\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \quad dt = (\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})d\tau,$$

получим систему уравнений в форме

$$\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}' = -(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{\gamma} - \left(\frac{\alpha\mu^2}{|\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}|^4} + \Phi\right)(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}),$$

где $\mu^2 = (\mathbf{I}\boldsymbol{x}, \mathbf{I}\boldsymbol{x})^{-1} = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})$, $\Phi = (\boldsymbol{v}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{v}) - \dfrac{(\boldsymbol{v}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^2}{\mu^2}$.

При $\alpha = 0$, $\Phi = \varkappa = \mathrm{const}$ — является интегралом Иоахимсталя (3), и мы получаем систему Неймана. При $\alpha \neq 0$ Φ не является интегралом и при достижении границы как $\mu^2 \to 0$, так и $(\boldsymbol{v}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) \to 0$, следовательно полной регуляризации не происходит и вместо долгих вычислений при стремлении траектории к бесконечности, здесь мы получаем неопределённость, которая с вычислительной точки зрения также сложно вычисляема.

В заключение отметим, что данная работа возникла при изучении проблемы Римана, связанной с динамикой пульсирующего жидкого эллипсоида. При отсутствии притяжения задача сводится к анализу геодезического потока на кубике $xyz = const$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{xyz\}$. Почти все траектории на кубике являются неограниченными, что препятствует возможности анализа интегрируемости методом сечений Пуанкаре. Мы также не смогли произвести соответствующую компактификацию. По нашей гипотезе это связано с отсутствием дополнительного аналитического интеграла (отсутствие дополнительного мероформного интеграла было недавно доказано С. Л. Зиглиным и вскоре будет опубликовано [23]).

Авторы выражают благодарность за полезные дискуссии и ценные замечания А. В. Болсинову, А. П. Веселову, Ю. Н. Федорову. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00791-а). Работа И. С. Мамаева выполнена в рамках гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых — докторов наук (код проекта МД-5239.2008.1).

Список литературы

[1] Borisov A. V., Kilin A. V., and Mamaev I. S. The Hamiltonian Dynamics of Self-gravitating Liquid and Gas Ellipsoids // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 19, no. 2, pp. 179–217.

[2] Borisov A. V. and Mamaev I. S. Some Comments to the Paper by A. M. Perelomov «A Note on Geodesics on Ellipsoid» // Regul. Chaotic Dyn., 2000, vol. 5, pp. 92–94.

[3] Borisov A. V. and Mamaev I. S. Conservation Laws, Hierarchy of Dynamics and Explisit Integration of Nonholonomic System // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[4] Braden H. W. A Completely Integrable Mechanical System // Lett. Math. Phys., 1982, vol. 6, pp. 449–452.

[5] Brun F. Rotation Kring Fix Punkt // Öfvers. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Förhandl., 1893, vol. 7, pp. 455–468.

[6] Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik // Gesammelte Werke: Vol. 8 (Supplementband) / C. G. J. Jacobi. Berlin: Reimer, 1884. Reprint: New York: Chelsea, 1969. Пер. на рус.: Якоби К. Лекции по динамике. М.–Л., 1936.

[7] Jung C. Poincaré Map for Scaftaring States // J. Phys. A: Math Gen., 1997, vol. 19, pp. 1345–1353.

[8] Knauf A. and Taimanov I. A. On Integrability of the n-Centre Problem // Math. Ann., 2005, vol. 331, no. 3, pp. 631–649.

[9] Knörrer H. Geodesics on Quandrics and a Mechanical Problem of C. Neumann // J. Reine Angew. Math., 1982, vol. 334, pp. 69–78.

[10] Mumford D. Tata lectures on theta: I. Boston: Birkhäuser, 1983. 260 p.

[11] Minkowski H. Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit // Sitzungsber. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1888, vol. 30, pp. 1095–1110.

[12] Moser J. Various Aspects of Integrable Hamiltonian Systems // Dynamical systems (Bressanone, 1978). Naples: Liguori, 1980. pp. 137–195. Пер. на рус.: Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН, 1981, т. 36, № 5(221), с. 109–151.

[13] Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur // J. Rein. Angew. Math., 1859, vol. 56, pp. 46–63.

[14] Stekloff V. A. Remarque sur un probleme de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liqiude indefini en sur le probleme de M. de Brun // C. R. Acad. Sci. Paris, 1902, vol. 135, pp. 526–528.

[15] Veselov A. P. Two Remarks about the Connection of Jacobi and Neumann Integrable Systems // Math. Z., 1994, vol. 216, no. 3, pp. 337–345.

[16] Veselov A. P. A Few Things I Learnt from Jürgen Moser // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 515–524.

[17] Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны: Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991. 320 с.

[18] Болсинов А. В., Дуллин Х. О случае Эйлера в динамике твердого тела и задача Якоби // Regul. Chaotic Dyn., 1997, vol. 2, no. 2, pp. 13–25.

[19] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: ИКИ, НИЦ «РХД», 2005. 576 с.

[20] Борисов А. В. Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Регул. и хаотическ. динам., 1996, т. 1, №2, с. 61–76.

[21] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Многочастичные системы. Алгебра интегралов и интегрируемые случаи // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, №1 с. 53–82.

[22] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: ИКИ, 2003. 296 с.

[23] Зиглин С. Л. // ДАН, 2009 (в печати).

[24] Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикл. мат. мех., 1995, т. 59, вып. 1, с. 3–9.

[25] Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР, 1982, т. 266, №6, с. 1298–1300.

[26] Козлов В. В. Две интегрируемые задачи классической динамики // Вест. Моск. ун-та, Сер.1. Матем. Механ., 1981, №4, с. 80–83.

[27] Колосов Г. В. О некоторых видоизменениях начала гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела. С.-Пб., 1908. 76 с.

[28] Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988.

[29] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН, 1982, т. 37, вып. 5, с. 3–49.

[30] Федоров Ю. Н. Геометрические свойства конечномерных интегрируемых систем и их дискретизация, Докт. дис., МГУ, 2001.