

УДК 551.465:551.511

Нелинейная эволюция неустойчивых трехмерных возмущений в резко стратифицированном сдвиговом течении без точек перегиба на профиле скорости

С. М. Чурилов

Институт солнечно-земной физики СО РАН,
664033, Россия, Иркутск, ул. Лермонтова, 126а
churilov@iszf.irk.ru

Получено 20 апреля 2009 г.

Рассматривается горизонтальное плоско-параллельное течение без точек перегиба на профиле скорости в идеальной, несжимаемой, устойчиво стратифицированной в тонком слое жидкости. В линейном приближении такое течение неустойчиво при любом значении глобального числа Ричардсона, причем в широком диапазоне изменения параметров нарастают преимущественно трехмерные возмущения. В статье изучается слабо-нелинейное развитие со временем неустойчивого возмущения в виде пары косых волн. С этой целью выведено эволюционное уравнение, которое имеет вид нелинейного интегрального уравнения и справедливо как для тонкого, так и для толстого критического слоя, включая и тот случай, когда критический слой толще слоя стратификации и полностью перекрывает его. Асимптотическими и численными методами исследованы решения этого уравнения и показано, что на нелинейной стадии развития возмущение растет, как правило, взрывным образом.

Ключевые слова: сдвиговое течение без точек перегиба на профиле скорости, резкая стратификация плотности, трехмерная неустойчивость, критический слой, нелинейная эволюция

S. M. Churilov

Nonlinear evolution of three-dimensional unstable disturbances in a sharply stratified shear flow with an inflection-free velocity profile

The horizontal plane-parallel flow with an inflection-free velocity profile is considered in ideal, incompressible fluid which is stably stratified in a thin layer. Such a flow is linearly unstable for an arbitrary bulk Richardson number, and it is three-dimensional disturbances that are most unstable within a wide range of parameters. In the paper, the weakly-nonlinear temporal development of an unstable disturbance in the form of a pair of oblique waves is studied. For this purpose, the evolution equation is derived which has the form of a nonlinear integral equation and is valid for both thin and thick critical layers, including the case where the critical layer width exceeds the stratification layer thickness. Solutions of this equation are studied asymptotically and numerically, and it is shown that during the nonlinear stage of development the disturbance grows, as a rule, explosively.

Keywords: shear flow with an inflection-free velocity profile, sharp density stratification, three-dimensional instability, critical layer, nonlinear evolution

Mathematical Subject Classifications: 76B70, 76E05, 76E20, 76E30



1. Введение

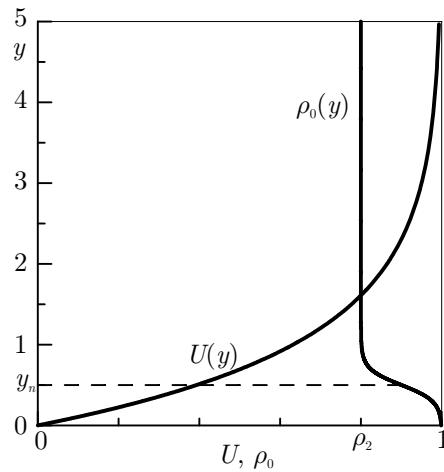
Согласно современным представлениям [1, 2], переход ламинарного плоско-параллельного течения $V_x = U(y)$ в турбулентное состояние — это многостадийный процесс, на каждом этапе которого структура течения последовательно усложняется, и во многих случаях такой процесс начинается с неустойчивости. Хорошо известно [3], что при больших числах Рейнольдса Re в течениях однородной несжимаемой жидкости с точками перегиба на профиле скорости (таких как слои смешения, струи и следы) доминирует невязкая неустойчивость с временным инкрементом $\gamma = O(U_0/\Lambda)$, где U_0 и Λ — характерные величина и масштаб изменения скорости, а в течениях без точек перегиба (пограничных слоях, течениях в трубах, каналах и т. д.) ведущая роль принадлежит вязкой неустойчивости со значительно меньшим инкрементом, убывающим к тому же с ростом Re . В обоих случаях первичная неустойчивость приводит к преимущественному развитию двумерных (не зависящих от z) возмущений, а присущая турбулентным течениям трехмерная структура формируется в результате действия различных нелинейных механизмов [2, 4].

Устойчивая стратификация среды способна заметно изменить эту картину. Во-первых, невязкая неустойчивость стратифицированного течения возможна и при отсутствии точек перегиба на профиле его скорости [5, 6]. Во-вторых, благодаря зависимости инкремента от дополнительного параметра — глобального числа Ричардсона J , отражающего степень стратификации течения, — в результате первичной неустойчивости могут нарастать главным образом трехмерные возмущения. Впервые такую возможность продемонстрировали Смит и Пелтье [7] на примере вязкого ($Re < 500$) слоя смешения с довольно высоким уровнем стратификации ($J > 0.25$), в котором вертикальные масштабы изменения скорости Λ и плотности ℓ существенно различаются ($\Lambda/\ell = 3$).

Недавно [8, 9, 10] была исследована линейная устойчивость класса течений идеальной, несжимаемой, устойчиво стратифицированной жидкости, в которых скорость $U(y)$ монотонно растет (без точек перегиба) вверх, от нуля на дне до некоторого U_0 при $y \rightarrow \infty$, а плотность $\rho_0(y)$ монотонно убывает от ρ_1 до ρ_2 , причем масштабы их изменения также существенно разнятся, $\ell/\Lambda \ll 1$ (рис. 1), в остальном же $U(y)$ и $\rho_0(y)$ произвольны. Было установлено, что, во-первых, такие течения неустойчивы при любом $J > 0$ как в двухслойной ($\ell = 0$) среде [8, 9], так и в среде с непрерывным ($\ell > 0$) изменением плотности [10], и, во-вторых, в течениях с $\ell > 0$ при не слишком сильной стратификации ($J < (\ell/\Lambda)^{3/2}$) нарастают преимущественно трехмерные возмущения. Дополнительные исследования показали, что скорости роста неустойчивых возмущений того же порядка, что и в однородных слоях смешения, но только если ℓ действительно много меньше Λ^1 . Заметим, что это условие естественным образом выполняется в средах с высоким числом Прандтля Pr , где, как правило [11], $\ell/\Lambda = O(Pr^{-1/2})$. Таким образом, это — невязкая неустойчивость, которая в резко стратифицированных течениях типа пограничного слоя формирует трехмерный спектр достаточно быстро нарастающих возмущений и создает тем самым хорошие начальные условия для дальнейшего перехода к турбулентности.

Следующий шаг — изучение нелинейной стадии развития неустойчивых возмущений. Мы рассмотрим нелинейную эволюцию со временем бегущей по x и стоячей по z волнами, т. е. пары косых волн одинаковой амплитуды, волновые векторы которых имеют составля-

¹Так, в течении $U = U_0 \operatorname{th}(y/\Lambda)$, $\rho_0 = \rho_1 - [(\rho_1 - \rho_2)/2][1 + \operatorname{th}(y - y_N)/\ell]$, где $0 \leq y < \infty$ и $y_N = \Lambda/2$, максимум инкремента равен примерно $1/4$ его значения в однородном слое смешения с тем же (но при $-\infty < y < \infty$) профилем скорости, пока $\ell/\Lambda < 0.1$, и всего лишь $1/60$, если $\ell/\Lambda = 0.3$ (что типично для термоклина).

Рис. 1. Схематические профили скорости и плотности ($\Lambda = 1$, $U_0 = 1$, $\rho_1 = 1$).

ящую k вдоль течения и $\pm q$ в направлении оси z . Такая структура выбрана потому, что зачастую именно она диктуется граничными условиями и, главное, это — простейшее действительно трехмерное возмущение, поскольку задачу о его развитии на нелинейной стадии нельзя свести к двумерной преобразованию Сквайра [12]. Подразумевается, что это — наиболее неустойчивое при данном J или достаточно близкое к нему возмущение, а степень стратификации течения, $J = O[(\ell/\Lambda)^2]$, такова, что трехмерный характер неустойчивости проявляется наиболее ярко (см. краткий очерк линейной теории в § 2).

Известно, что при больших числах Рейнольдса в развитии неустойчивости сдвигового течения как на линейной, так и на нелинейной стадии ключевую роль играет резонансное взаимодействие волны с течением [13, 14, 15] вблизи критического уровня $y = y_c$, на котором скорость течения равна фазовой скорости возмущения, $U(y_c) = c_r \equiv \text{Re } c$. В идеализированной (т. е. линеаризованной, стационарной и невязкой) постановке задачи резонанс проявляется в виде сингулярности решения уравнений гидродинамики при $y = y_c$. Физически это означает, что в некоторой окрестности y_c , — так называемом критическом слое (КС) [16, 17], — некорректно пренебречь диссиляцией, эволюцией возмущения и нелинейностью одновременно. Каждый из этих факторов в отдельности устраняет сингулярность, по-своему модифицируя уравнения (подробнее см., например, в [17]) при $|y - y_c| < L_s$, $s = \nu, t, N$, где

$$L_\nu = (\nu \Lambda^2 / k)^{1/3}, \quad L_t = |(k U'_c B)^{-1} d|B|/dt|, \quad L_N = |B/U'_c|^{1/2}, \quad (1)$$

— диссилятивный, нестационарный и нелинейный масштабы соответственно ($\nu = \text{Re}^{-1}$, kB — комплексная амплитуда вертикальной скорости, t — время; штрих означает производную по y , а индекс c указывает, что функция вычисляется при $y = y_c$). Структура уравнений и их решений внутри КС определяется преимущественно тем фактором, которому соответствует наибольший из масштабов (1), поэтому удобно различать режимы диссилятивного, нестационарного и нелинейного КС. В ходе развития возмущения L_t и L_N изменяются, так что режим КС не задан *a priori*, а устанавливается эволюционным путем, и возможны переходы из одного режима в другой. Следует подчеркнуть, что, независимо от режима, основные нелинейные и диссилятивные процессы происходят внутри КС.

Задача состоит в выводе НЭУ и анализе его решений, т. е. возможных сценариев нелинейной эволюции. Она существенно отличается от решавшихся ранее аналогичных задач

тем, что в ней есть малый масштаб — толщина ℓ стратифицированного слоя. До сих пор всегда предполагалось, что ширина КС меньше всех иных масштабов задачи, и только в таком случае удавалось самосогласованно описать внутреннюю структуру КС, т. е. происходящую в нем по мере развития возмущения радикальную перестройку течения. Линейная теория устойчивости показывает, однако, что при интересующем нас уровне стратификации $J = O(\ell^2)$ (здесь и далее используются безразмерные переменные, в которых $U_0 = 1$, $\Lambda = 1$ и $\rho_1 = 1$) критические уровни наиболее неустойчивых и близких к ним колебаний лежат внутри стратифицированного слоя, а их инкременты $\gamma = O(\ell)$. Таким образом, уже на линейной стадии эволюции возмущения КС имеет толщину по крайней мере того же порядка, что и стратифицированный слой, и существенно с ним перекрывается, на нелинейной же стадии следует ожидать дальнейшего роста толщины КС. Следовательно, стратифицированный слой, в котором формируются дисперсионные свойства возмущения, и критический слой, где происходят основные нелинейные процессы, представляют собой единое целое (для краткости именуемое далее КС), и это обстоятельство играет ключевую роль в предлагаемом исследовании.

Мы изучаем невязкую неустойчивость и хотим, в первую очередь, проследить ее нелинейное развитие при очень больших числах Рейнольдса ($Re \gtrsim \ell^{-4}$), когда диссипация практически не влияет на эволюцию. Пока амплитуда мала, возмущение растет экспоненциально, с инкрементом $\gamma \gg \nu^{1/3}$, т. е. в режиме нестационарного КС. Затем, по достижении порога нелинейности, в игру вступает нелинейность, и характер эволюции меняется. Мы покажем, что в общем случае режим КС остается при этом нестационарным. Характерное для этого режима быстрое изменение структуры течения внутри КС приводит, как впервые показал Хикернел [18], к тому, что нелинейный член в НЭУ зависит от всей предыстории развития возмущения. Но в том же слое формируются и дисперсионные свойства возмущения, поэтому линейный член НЭУ также должен зависеть от предыстории. В результате получается эволюционное уравнение нового типа, представляющее собой нелинейное интегральное уравнение (см. (22)). И лишь на периферии области неустойчивости, где линейный инкремент достаточно мал, $\nu^{1/3} \ll \gamma \ll \ell$, оно может быть приближено сведено к интегро-дифференциальному уравнению (29) обычного для задач с нестационарным режимом КС вида, которое, впрочем, справедливо только на начальной стадии эволюции, пока $L_t \ll \ell$. Проведенное нами асимптотическое и численное исследование показывает, что решения уравнения (22) описывают ускоряющийся рост амплитуды с переходом на взрывную стадию, $|B(t)| \sim (t_* - t)^{-\alpha}$ (так называемый быстрый сценарий эволюции [17]), которая длится вплоть до амплитуды порядка единицы, когда теория возмущений, лежащая в основе нашего анализа, становится уже неприменима.

В § 2 приведены необходимые сведения из линейной теории устойчивости рассматриваемых течений. Постановка задачи сформулирована в § 3, там же приведены основные уравнения и описаны методы их решения. НЭУ получено в § 4, а § 5 посвящен изучению его предельных случаев и решений. Результаты обсуждаются в § 6. Некоторые вспомогательные вычисления вынесены в приложение.

2. Устройство течения и линейная устойчивость

В полупространстве $y \geq 0$ рассматриваем стационарное плоско-параллельное течение устойчиво стратифицированной в тонком слое несжимаемой жидкости с большими числами

Рейнольдса и Прандтля. Его скорость монотонно растет с высотой так, что

$$U(0) = 0, \quad U'(0) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} U(y) = 1; \quad U'(y) > 0, \quad U''(y) < 0.$$

Квадрат частоты Брента–Вийсяля представим в виде

$$\Omega^2(y) \equiv -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} = J n(y), \quad n(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{\ln \rho_0(y)}{\ln \rho_2} \right) \geqslant 0,$$

где g — ускорение силы тяжести, а J — глобальное число Ричардсона. Функция $n(y)$ локализована в слое толщины $\ell \ll 1$ с центром в y_N ,

$$y_N = \int_0^\infty dy y n(y), \quad \int_0^\infty dy n(y) = 1, \quad (2)$$

имеет единственный максимум и быстро (по крайней мере, экспоненциально) стремится к нулю за пределами этого слоя. Сам слой расположен так, что скорость течения в нем, $U_N = U(y_N)$, не близка ни к нулю, ни к единице. В остальном же профили скорости и плотности произвольны. Результаты анализа будем иллюстрировать численными расчетами для модельного течения

$$U(y) = 1 - e^{-y}, \quad n(y) = \frac{1}{\ell \sqrt{\pi}} \exp \left[-\left(\frac{y - y_N}{\ell} \right)^2 \right]; \quad \ell = 0.01, \quad y_N = 0.5. \quad (3)$$

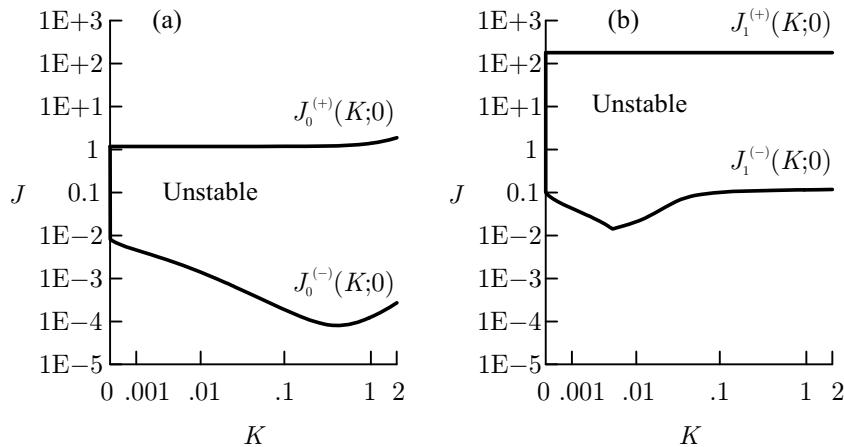


Рис. 2. Области неустойчивости собственных мод (а) $m = 0$ и (б) $m = 1$ течения (3).

Рассмотрим кратко линейную теорию устойчивости таких течений, поскольку, кроме найденных в [10] границ областей неустойчивости, нам нужны сведения о свойствах самих неустойчивых колебаний. В приближении Буссинеска вертикальная компонента возмущения скорости, $v = -ikB g(y) \exp[iK(x \cos \theta + z \sin \theta) - i\omega t]$, удовлетворяет (модифицированному) уравнению Тейлора–Голдстейна [3] с граничными условиями

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \left[\frac{K^2 J n(y)}{(\omega - kU)^2} + \frac{kU''}{\omega - kU} - K^2 \right] g = 0, \quad (4)$$

$$g(0) = 0, \quad |g(\infty)| < \infty,$$

где $k = K \cos \theta$. Когда $y \rightarrow \infty$, $n(y)$ и $U''(y)$ стремятся к нулю, так что $g(y) \sim \exp(-Ky)$. Поэтому течение можно рассматривать как горизонтальный волновод, а его собственные колебания — как волноводные моды. Начнем с двумерных возмущений ($\theta = 0$, $K \equiv k$) и рассмотрим сперва нейтральные колебания, обгоняющие течение, т. е. имеющие фазовую скорость $c = \omega/k \geq 1$. При заданных c и $K > 0$ задача (4) имеет счетное множество собственных значений $J = J_m(K; c)$, нумеруемых числом $m = 0, 1, 2, \dots$ узлов собственной функции по вертикали. Заметим, что J_m монотонно растут с K и c , поэтому нижней границей m -го семейства дисперсионных кривых на (K, J) -диаграмме служит кривая $J = J_m(K; 1)$, соответствующая нейтральным колебаниям, распространяющимся с предельной для течения скоростью $c = 1$. Как показано в [10], эта же кривая является верхней границей $J = J_m^{(+)}(K; 0)$ области неустойчивых колебаний, принадлежащих той же (m -й) моде (второй аргумент у $J_m^{(+)}$ указывает на то, что $\theta = 0$). Снизу область неустойчивости ограничена кривой $J = J_m^{(-)}(K; 0) > 0$ (см. рис. 2), которая при $K = 0$ смыкается с верхней границей, $J_m^{(-)} = J_m^{(+)} = O[\max(1, m^2/\ell)]$. При $K > 0$ $J_m^{(+)}(K; 0)$ монотонно возрастает с K , а $J_m^{(-)}(K; 0)$ сперва резко убывает (настолько резко, что визуально ее график частично сливаются с осью ординат), достигает минимума,

$$\begin{aligned} \min J_0^{(-)}(K; 0) &= J_* = O(\ell^2) \quad \text{при } K = K_* = O(1), \\ \min J_m^{(-)}(K; 0) &= O(m^2\ell) \quad \text{при } K = O(\ell/m), \quad m \geq 1, \end{aligned} \tag{5}$$

и затем медленно растет с K . При $J < J_m^{(-)}(K; 0)$ собственных колебаний m -й моды, по-видимому, не существует. Колебания моды $m = 0$ имеют инкременты $\gamma_0 = O(1)$, в том числе, и в пределе $\ell = 0$, в то время как у мод с $m > 0$ $\gamma_m = O(\ell/m)$.

Перейдем от двумерных ($\theta = 0$) к косым ($\theta \neq 0, \pi$) возмущениям с помощью преобразования Сквайра [7, 12]. При этом границы областей неустойчивости и инкременты преобразуются следующим образом:

$$J_m^{(\pm)}(K; \theta) = J_m^{(\pm)}(K; 0) \cos^2 \theta, \quad \gamma_m(K, J; \theta) = \gamma_m(K, J \sec^2 \theta; 0) \cos \theta. \tag{6}$$

Легко видеть, что рассматриваемая неустойчивость не имеет порога по стратификации и действует на всех длинах волн сразу. Действительно, при любых $J > 0$ и $K > 0$ найдутся такие m и θ , что $J_m^{(-)}(K; \theta) < J < J_m^{(+)}(K; \theta)$, а тем самым и соответствующее неустойчивое колебание. Во-вторых, это — существенно трехмерная неустойчивость. Рассмотрим ее свойства подробнее в наиболее интересном случае $J = O(\ell^2)$.

Благодаря медленному изменению $J_0^{(-)}(K; 0)$ вблизи минимума, в эту область, наряду с частью «полосы устойчивости» $0 < J < J_0^{(-)}(K; 0)$, попадает довольно широкий спектр ($\ell^{1/2} < K < \ell^{-1/2}$) неустойчивых двумерных колебаний, принадлежащих моде $m = 0$ (см. рис. 2а). Неустойчивым двумерным колебаниям других мод соответствуют гораздо большие J (см. (5) и рис. 2) и существенно меньшие инкременты, которые станут еще меньше в результате преобразования (6). Поэтому при таком уровне стратификации безусловно доминирует мода $m = 0$, которую мы и будем изучать. Фиксируем K . При $\theta = 0$ инкремент γ (индекс 0 далее опускаем) обращается в нуль при $J = J_0^{(\pm)}(K; 0)$, а в промежутке имеет, вообще говоря, один максимум² (рис. 3). С помощью преобразования (6) трансформируем

² В некоторых случаях (например, если на профиле $U(y)$ есть точки нулевой кривизны [9]) максимумов может быть несколько.

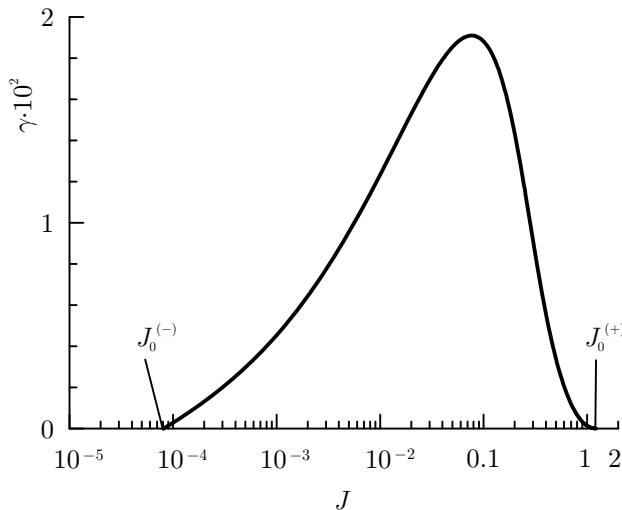


Рис. 3. Зависимость инкремента от J (течение (3); $m = 0$, $K = K_* = 0.4196$, $\theta = 0$).

зависимость γ от J при $\theta = 0$ в зависимость от θ при $J = \text{const}$ (рис. 4). Пока стратификация «докритическая» ($J < J_0^{(-)}(K; 0)$, кривая a на рис. 4), имеется «конус устойчивости» $0 \leq \theta < \theta_0$ (на рис. 4 $\theta_0 = \pi/4$), так как неустойчивы только те колебания, у которых $\cos^2 \theta < \cos^2 \theta_0 = J/J_0^{(-)}(K; 0)$. Когда $J > J_0^{(-)}(K; 0)$, в спектре неустойчивых колебаний представлены уже все θ , но при $J = O(\ell^2)$ косые возмущения все еще растут быстрее двумерных (кривые b и c), с инкрементом $\gamma = O(\ell)$. Заметим, что с ростом J значение θ_* , при котором инкремент достигает максимума, медленно убывает, но к нулю не стремится (в течении (3) θ_* остается больше 40°), при этом наклон $\gamma(\theta)$ в интервале $0 < \theta < \theta_*$ уменьшается.

Если увеличивать J дальше, то при $J = O(\ell^{3/2})$ на профиле $\gamma(\theta)$ образуется широкое плато (кривая d), после чего θ_* скачком обращается в нуль, наклон графика становится отрицательным, а двумерные возмущения — наиболее неустойчивыми (кривая e). Затем, при приближении J к $J_0^{(+)}(K; 0)$ снизу, инкремент моды $m = 0$ быстро убывает, и когда с ней начинают конкурировать косые возмущения моды $m = 1$, неустойчивость вновь становится трехмерной и т. д.

3. Постановка задачи и основные уравнения

В течении с $J = \ell^2 \tilde{J} = O(\ell^2)$ рассмотрим задачу о слабо-нелинейной эволюции возмущения, принадлежащего наиболее неустойчивой при таком уровне стратификации моде $m = 0$ и имеющего в линейном приближении вид бегущей по x и стоячей по z волны,

$$v = -ik B(t) g(y) \exp(ikx - i\omega t) \cos qz + \text{с.с.}, \quad k = K \cos \theta, \quad q = K \sin \theta \quad (7)$$

(с.с. обозначает члены, комплексно сопряженные выписанным), с $K = O(1)$ (т. е. не слишком далеким от K_*) и θ , достаточно близким к θ_* , что обеспечивает на линейной стадии скорость роста $\gamma = O(\ell)$. Как показано в [10], во всем интересующем нас диапазоне длин волн, а точнее, при $\ell^{1/2} \ll K \ll \ell^{-1}$, критический уровень $y = y_c$ расположен внутри стратифицированного слоя, что влечет за собой два важных следствия. Во-первых, как уже отмечалось во введении, КС состоит из собственно критического слоя и стратифицирован-

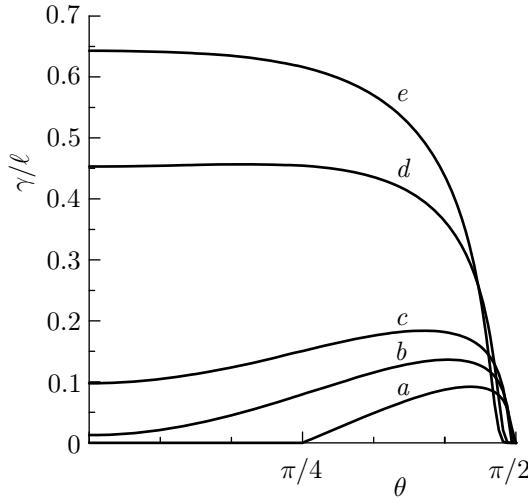


Рис. 4. Зависимость γ/ℓ от θ при $K = K_*$ и различных значениях J (течение (3), $m = 0$): $a - J = J_*/2 = 4.050 \cdot 10^{-5}$, $b - J = 1.1 J_*$, $c - J = 2 J_*$, $d - J = 0.001 (\approx 12 J_*)$, $e - J = 0.002$.

ногого слоя, которые существенно перекрываются. Во-вторых, комплексные фазовые скорости возмущений этого диапазона близки к U_N , $|c - U_N| = O(\ell)$. Поэтому в системе отсчета, движущейся со скоростью U_N , и распространение возмущения с фазовой скоростью, и рост его амплитуды (в том числе, нелинейный) можно описать на языке медленного времени $\tau = \ell t$. Введем также амплитудный параметр $0 < \varepsilon \ll 1$, такой, что $B(t) = \varepsilon A(\tau)$ и $A(\tau) = O(1)$. Связь между ε и ℓ (скейлинг) выведем в подразделе 4.1. Решение будем строить методом сращиваемых асимптотических разложений, т. е. найдем решения внутри КС и во внешних областях течения, а затем, сшивая их в пограничных областях ($\ell \ll |y - y_N| \ll 1$), получим НЭУ как условие сшивки.

Исключая давление, запишем уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска [3] в системе отсчета, движущейся со скоростью U_N :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \Delta v - U'' \frac{\partial v}{\partial x} + J \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) &= \nu \Delta^2 v - \Delta \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\frac{D}{Dt} \rho - n(y)v = - \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad (8b)$$

$$\frac{D}{Dt} G + U' \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \Delta G + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (8c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad G = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (8d, e)$$

где $D/Dt = \ell \partial/\partial\tau + (U - U_N) \partial/\partial x$, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ и ρ — возмущения скорости и плотности, Δ — лапласиан; диффузией плотности пренебрегаем. Решение уравнений (8) представля-

ется как сумма гармоник,

$$v = v_0(\tau, y, z) + \left[v_1(\tau, y, z)e^{ikx} + v_2(\tau, y, z)e^{2ikx} + \dots + \text{c.c.} \right], \quad (9)$$

где каждое $v_n(\tau, y, z)$ вычисляется в виде разложения по ε , ℓ и ν ,

$$v_1 = \varepsilon v_1^{(1)} + \ell \varepsilon v_1^{(2)} + \dots.$$

Внутри КС удобно ввести новые переменные

$$Y = (y - y_N)/\ell, \quad N(Y) = \ell n(y); \quad v = \varepsilon V, \quad (u, w, \rho, G) = \varepsilon \ell^{-1}(\mathcal{U}, W, P, \Gamma), \quad (10)$$

так что (с точностью до экспоненциально малых членов, ср. с (2))

$$\int_{-\infty}^{\infty} dY N(Y) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dY Y N(Y) = 0, \quad (11)$$

а уравнения (8) примут вид (сохраняя только необходимые для дальнейшего анализа вклады; производные по переменным τ , x , z , Y обозначаем соответствующими нижними индексами, $f_N \equiv f(y_N)$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + U'_N Y \frac{\partial}{\partial x} \right) V_{YY} = -\ell \tilde{J}(P_{xx} + P_{zz}) + \ell U''_N V_x - \frac{\ell U''_N}{2} Y^2 V_{YYx} + \nu \ell^{-3} V_{YYY} + \quad (12a)$$

$$+ \varepsilon \ell^{-2} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mathcal{U}_x^2 + V_Y^2 + W_z^2 + 2\mathcal{U}_Y V_x + 2\mathcal{U}_z W_x + 2V_z W_Y - \frac{\partial}{\partial Y} (\mathcal{U}V_x + VV_Y + WV_z) \right],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + U'_N Y \frac{\partial}{\partial x} \right) P - N(Y)V = -\frac{\ell U''_N}{2} Y^2 P_x - \varepsilon \ell^{-2} (\mathcal{U}P_x + VP_Y + WP_z), \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + U'_N Y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Gamma + U'_N V_z &= -\ell U''_N Y V_z - \frac{\ell U''_N}{2} Y^2 \Gamma_x + \nu \ell^{-3} \Gamma_{YY} + \\ &+ \varepsilon \ell^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{U}W_x + VW_Y + WW_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{U}\mathcal{U}_x + V\mathcal{U}_Y + W\mathcal{U}_z) \right], \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\mathcal{U}_x + W_z = -V_Y, \quad \Gamma = \mathcal{U}_z - W_x. \quad (12d, e)$$

4. Вывод нелинейного эволюционного уравнения

4.1. Внешнее решение и скейлинг

Во внешних областях течения ($|y - y_N| \gg \ell$) стратификация, вязкость и нелинейность дают лишь незначительные поправки к решению. В основном порядке ($O(\varepsilon)$) основной



(первой) гармоники, в соответствии с (7), $v_{1\pm}^{(1)} = -ikA(\tau)g_{\pm}(y)\cos qz$ (индекс $+/-$ соответствует области над/под y_N), где $g_{\pm}(y)$ удовлетворяют уравнению Релея с граничными условиями (ср. с (4))

$$\frac{d^2g_{\pm}}{dy^2} - \left(\frac{U''(y)}{U(y) - U_N} + K^2 \right) g_{\pm} = 0; \quad (13)$$

$$g_-(0) = 0, \quad |g_+(\infty)| < \infty.$$

Собственная функция $g(y)$ колебаний, принадлежащих моде $m = 0$, внутри КС изменяется незначительно, поэтому в основном порядке $g_+(y_N + 0) = g_-(y_N - 0) = g_*$. Полагая $g_* = 1$, получаем при $|y - y_N| \equiv \ell|Y| \ll 1$ разложение (см. [3])

$$v_{1\pm}^{(1)} = -ikA(\tau) \left[1 + \ell \left(\frac{U''_N}{U'_N} \ln |\ell Y| + a_{\pm} \right) Y + O(\ell^2|Y|\ln |\ell Y|) \right] \cos qz. \quad (14)$$

Коэффициенты a_+ и a_- вещественны, зависят от K и могут быть найдены только в результате решения задачи (13). Подчеркнем, что при любом K функции g_+ и g_- — *разные* решения уравнения Релея, так как по теореме Релея в однородном течении с $U''(y) < 0$ собственных колебаний нет.³ Поэтому, будучи аналитически продолжены в нижнюю полуплоскость комплексного y , они линейно независимы, и их вронсиан

$$a_*(K) = g_+(y)g'_-(y) - g'_+(y)g_-(y) = a_- - a_+ + i\pi U''_N/U'_N \neq 0. \quad (15)$$

Далее, из уравнений (8 c,d,e) находим, что

$$\begin{aligned} u_{1\pm}^{(1)} &= \left(\frac{dg_{\pm}}{dy} \cos^2 \theta + \frac{U'g_{\pm}}{U - U_N} \sin^2 \theta \right) A \cos qz \underset{y \rightarrow y_N}{\longrightarrow} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\ell Y} + O(\ln |\ell Y|) \right] A \cos qz, \\ w_{1\pm}^{(1)} &= \frac{i}{2} \left(\frac{dg_{\pm}}{dy} - \frac{U'g_{\pm}}{U - U_N} \right) A \sin 2\theta \sin qz \underset{y \rightarrow y_N}{\longrightarrow} \left[\frac{-i}{2\ell Y} + O(\ln |\ell Y|) \right] A \sin 2\theta \sin qz. \end{aligned} \quad (16)$$

Формально эти компоненты скорости имеют при $Y = 0$ особенность в виде полюса ($v_{1\pm}^{(1)}$ тоже имеет особенность, но более слабую, вида $Y \ln Y$, см. (14)). Конечно, решение внутри КС регулярно, но магнитуды его компонент различны и напрямую связаны с наличием и типом «сингулярности» соответствующей компоненты. Например, u_1 , v_1 и w_1 имеют порядок $O(\varepsilon)$ во внешних областях течения, а внутри КС $v_1 = O(\varepsilon)$, в то время как u_1 и w_1 имеют магнитуду $O(\varepsilon/\ell)$, что и учтено в (10). С физической точки зрения, «сингулярность» отражает резонансный характер взаимодействия волны с течением и, как показывает анализ [17, 19], играет ключевую роль в формировании нелинейных вкладов в НЭУ.

Вернемся теперь к вертикальной компоненте скорости v_1 . Приравнивая скачок ее производной через КС (см. (14)) изменению в порядке $O(\ell)$ производной вертикальной компоненты скорости V_1 внутреннего решения, приходим к условию сшивки

$$(a_+ - a_-)A(\tau) = \frac{2i}{k\ell} \left\langle \cos qz \int dY V_1 YY \right\rangle, \quad (17)$$

³За исключением непрерывного спектра так называемых мод Ван-Кампена–Кейза, см. [13, 15].

где

$$\langle \dots \rangle = \frac{q}{2\pi} \int_{-\pi/q}^{\pi/q} dz (\dots), \quad \int dY(\dots) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dY(\dots).$$

Вычислив его правую часть, мы и получим искомое НЭУ.

Заметим, что в рассматривавшихся ранее задачах (см., например, [19, 20, 21, 22, 26]) скачок производной возникает не в главном порядке $O(\varepsilon)$ основной гармоники внешнего решения, а в порядке $O(\varepsilon\ell)$, описывающем поправку на нестационарность (ℓ здесь следует понимать как масштаб КС), и, соответственно, уравновешивается изменением производной V_1 в порядке $O(\ell^2)$, что, очевидно, сказывается на скейлинге (см. ниже).

Внутреннее решение дает в правую часть (17) как линейные, так и нелинейные по $A(\tau)$ вклады. Посмотрим, как они формируются. Предположим, что $\varepsilon/\ell^2 \ll 1$, т. е. $L_N \ll L_t$, см. (1). Тогда решение уравнений (12) можно строить в виде разложения по малым параметрам ℓ , ν/ℓ^3 и ε/ℓ^2 . В главном порядке, $O(1)$, есть только линейный по $A(\tau)$ вклад в основную гармонику. Стратификация и вязкость дают линейные по A поправки к нему порядка $O(\ell)$ и $O(\nu/\ell^3)$ соответственно (см. (12 а)). Нелинейные по A вклады во внутреннее решение возникают в процессе «генерации гармоник» (подробнее см., например, в [19]). Уравнения гидродинамики имеют квадратичную нелинейность, поэтому на первом шаге этого процесса получим квадратичные по A вклады порядка $O(\varepsilon/\ell^2)$ во вторую и нулевую гармоники (на языке «внешних» переменных это означает, что внутри КС v_2 и v_0 имеют магнитуду $O(\varepsilon^2/\ell^2)$, а u_2, w_2, u_0 и $w_0 - O(\varepsilon^2/\ell^3)$, см. (10)). На следующем шаге взаимодействие второй и нулевой гармоник с основной даст кубические по A вклады порядка $O(\varepsilon^2/\ell^4)$ в основную и третью гармоники. Следовательно, главный нелинейный вклад в правую часть (17) имеет порядок $O(\varepsilon^2/\ell^4)$ и может конкурировать с линейным ($O(\ell)$) только в том случае, если

$$\varepsilon^2 = \ell^5. \quad (18)$$

При «обычном» же способе формирования левой (т. е. «внешней») части (17) (см. выше) получается [19, 21, 22] скейлинг $\varepsilon^2 = \ell^6$, что соответствует более низкому порогу нелинейности ($B_N = O(\gamma^3)$, а не $O(\gamma^{5/2})$, см. (28)). Тем не менее, в обоих случаях $L_N \ll L_t$, и нелинейная эволюция возмущений идет в режиме нестационарного КС, но, как мы увидим, по несколько разным законам.

В работах [20, 21] подчеркивалось, что нелинейное взаимодействие гармоник внутри КС порождает (в том числе, и во внешних областях течения) модулированное по z ($\sim \cos 2qz$) изменение среднего течения $u_0 = O(\varepsilon)$, т. е. того же порядка, что и основная (линейная) часть возмущения. Аналогичное изменение происходит и в нашей задаче, но, ввиду различия в скейлингах, здесь $u_0 = O(\varepsilon^{4/5}) \gg \varepsilon$.

4.2. Внутреннее решение

Согласно (9), внутреннее решение ищем в виде суммы гармоник, а каждую гармонику — в виде разложения по малым параметрам ℓ , ε/ℓ^2 и ν/ℓ^3 . Так, основная гармоника

$$(U_1, V_1, W_1, P_1, \Gamma_1) = (U_1^{(1)}, V_1^{(1)}, W_1^{(1)}, P_1^{(1)}, \Gamma_1^{(1)}) + \ell(U_1^{(2)}, V_1^{(2)}, W_1^{(2)}, P_1^{(2)}, \Gamma_1^{(2)}) + \dots$$

Остальные гармоники обязаны своим происхождением нелинейности уравнений (12) и, как показано выше, их можно вычислить методом последовательных итераций. Найдем необходимые члены разложения внутреннего решения, предполагая, как обычно, что в прошлом, при $\tau \rightarrow -\infty$, возмущение достаточно быстро стремится к нулю.

1. $O(1)$ основной гармоники.

Из уравнения (12 а) находим:

$$\hat{L}_1 V_{1YY}^{(1)} = 0, \quad \hat{L}_n = \frac{\partial}{\partial \tau} + ikU'_N Y,$$

следовательно, $V_{1YY}^{(1)} = 0$. Сшивая с внешним решением (14), получим

$$V_1^{(1)} = -ikA(\tau) \cos qz. \quad (19)$$

Подставляя в (12 б), приходим к уравнению

$$\hat{L}_1 P_1^{(1)} = N(Y)V_1^{(1)} = -ikN(Y)A(\tau) \cos qz,$$

которое имеет решение

$$P_1^{(1)} = -ikN(Y)\mathcal{A}(\tau, Y) \cos qz,$$

где введены обозначения

$$\mathcal{A}_n(\tau, Y) = \int_0^\infty ds s^n A(\tau - s) \exp(-ikU'_N Y s), \quad \mathcal{A}(\tau, Y) \equiv \mathcal{A}_0(\tau, Y).$$

Наконец, из (12 с–е) находим выражения для горизонтальных компонент скорости,

$$U_1^{(1)} = ikU'_N \mathcal{A} \sin^2 \theta \cos qz, \quad W_1^{(1)} = \frac{k}{2} U'_N \mathcal{A} \sin 2\theta \sin qz, \quad (20)$$

которые, как легко убедиться, автоматически сшиваются с (16).

2. $O(\ell)$ основной гармоники.

С учетом (18), в этом порядке два вклада — линейный и нелинейный, $V_1^{(2)} = V_{1L}^{(2)} + V_{1NL}^{(2)}$. Линейный вклад удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}_1 V_{1LYY}^{(2)} = ikU''_N V_1^{(1)} + K^2 \tilde{J} P_1^{(1)} = \left[k^2 U''_N A(\tau) - ikK^2 \tilde{J} N(Y) \mathcal{A} \right] \cos qz,$$

учитывающему поправку на стратификацию. Его решение имеет вид

$$V_{1LYY}^{(2)} = \left(k^2 U''_N \mathcal{A} - ikK^2 \tilde{J} N(Y) \mathcal{A}_1 \right) \cos qz,$$

или, после несложных преобразований,

$$V_{1LYY}^{(2)} = -ik \left[\frac{U''_N}{U'_N Y} \left(A(\tau) - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} \right) + K^2 \tilde{J} N(Y) \mathcal{A}_1 \right] \cos qz.$$

Правая часть регулярна при $Y = 0$, поэтому интеграл от нее по Y не изменится, если эту точку обойти снизу. Поскольку в нижней полуплоскости Y член, содержащий $\partial \mathcal{A}/\partial \tau$, регулярен и убывает как Y^{-2} при $|Y| \rightarrow \infty$, его вклад в интеграл равен нулю, и

$$\int dY V_{1LYY}^{(2)} = -ik \left[\frac{i\pi U''_N}{U'_N} A(\tau) + K^2 \tilde{J} \int_{-\infty}^{\infty} dY N(Y) \int_0^\infty ds s A(\tau - s) \exp(-ikU'_N Y s) \right] \cos qz.$$

При вычислении главного нелинейного вклада $V_{1NL}^{(2)}$ используются, как легко видеть из уравнений (12 а, с), только компоненты скорости (19) и (20), а поправки на вязкость и стратификацию дадут вклад лишь в следующие порядки разложения V_{1NL} . Поэтому результат будет тот же, что и в задаче о нелинейной эволюции возмущения вида (7) в течении однородной несжимаемой жидкости [21]:

$$\begin{aligned} \int dY \left(V_{1NL}^{(2)} \right)_{YY} = & -i\pi k^6 U_N'^3 \sin^2 \theta \int_0^\infty ds s^4 \int_0^1 d\sigma \sigma A(\tau - s) A(\tau - \sigma s) \bar{A}(\tau - s - \sigma s) \times \\ & \times \left\{ [\sigma(1 + \sigma) + 2(1 - \sigma) \sin^2 \theta] \cos 2\theta \cos qz + (1 + \sigma)(\sigma + 2 \sin^2 \theta)(1 + 2 \sin^2 \theta) \cos 3qz \right\}, \end{aligned}$$

где черта над A обозначает комплексное сопряжение. Подставляя оба вклада, линейный и нелинейный, в правую часть (17), получаем искомое эволюционное уравнение

$$\begin{aligned} a_*(K) A(\tau) + K^2 \tilde{J} \int_{-\infty}^\infty dY N(Y) \int_0^\infty ds s A(\tau - s) \exp(-iKU_N' Y s \cos \theta) + \\ + D \int_0^\infty ds s^4 \int_0^1 d\sigma \sigma H(\sigma) A(\tau - s) A(\tau - \sigma s) \bar{A}(\tau - s - \sigma s) = 0, \quad (21) \\ D = \pi K^5 U_N'^3 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \cos 2\theta, \quad H(\sigma) = \sigma(1 + \sigma) + 2(1 - \sigma) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

которое имеет вид нелинейного интегрального уравнения (коэффициент $a_*(K)$ определяется уравнением (15)). Для дальнейшего анализа удобно записать НЭУ в «физических» переменных $t = \tau/\ell$, $J = \ell^2 \tilde{J}$ и $B(t) = \varepsilon A(\tau)$. С учетом (18) получим

$$\begin{aligned} a_*(K) B(t) + K^2 J \int_{-\infty}^\infty dY N(Y) \int_0^\infty ds s B(t - s) e^{-i\ell p Y s} + \\ + D \int_0^\infty ds s^4 \int_0^1 d\sigma \sigma H(\sigma) B(t - s) B(t - \sigma s) \bar{B}(t - s - \sigma s) = 0, \quad (22) \end{aligned}$$

где $p = kU_N' \equiv KU_N' \cos \theta$ и $B(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Предполагаем далее, что числа $|a_*|$ и p порядка единицы.

5. Анализ эволюционного уравнения и его решений

5.1. Линейная стадия роста и поправки на нелинейность

На ранней стадии развития возмущения, когда нелинейностью можно пренебречь, НЭУ (22) принимает вид уравнения Вольтерры второго рода типа свертки [23]

$$\begin{aligned} a_*(K)B(t) &= -K^2 J \int_0^\infty ds s B(t-s) \int_{-\infty}^\infty dY N(Y) e^{-i\ell p Y s} \stackrel{t'=t-s}{=} \\ &\stackrel{t'=t-s}{=} \frac{iK^2 J}{\ell p} \int_{-\infty}^t dt' [i\ell p(t-t')] N_F(\ell p(t-t')) B(t'), \\ N_F(\kappa) &= \int_{-\infty}^\infty dY N(Y) \exp(-i\kappa Y), \end{aligned}$$

ядром которого служит фурье-образ dN/dY . Полагая

$$B(t) = B_0 \exp(\gamma t - i\omega t), \quad (23)$$

получим дисперсионное уравнение

$$a_*(K) = \frac{K^2 J}{\ell^2 p^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dY N(Y)}{(Y - Y_c - iZ)^2} \equiv \frac{J}{\ell^2 U_N'^2 \cos^2 \theta} \int_{-\infty}^\infty \frac{dY N'(Y)}{Y - Y_c - iZ}, \quad (24)$$

где $Y_c = \omega/(p\ell)$, $Z = \gamma/(p\ell)$, штрих обозначает производную по Y . Заметим, что оно представляет лишь главный порядок разложения по ℓ и при необходимости может быть дополнено членами следующих порядков.

Остановимся кратко на его решениях (подробности см. в приложении), начиная с границы устойчивости ($Z \rightarrow 0+$). Можно показать, что каждому K соответствует такое $Y_c = Y_0(K)$, что

$$\arg a_*(K) = \arg I_2(Y_0), \quad I_n(Y_0) = (n-1)! \int_{-\infty}^\infty \frac{dY N(Y)}{(Y - Y_0)^n}, \quad n = 1, 2, 3 \dots,$$

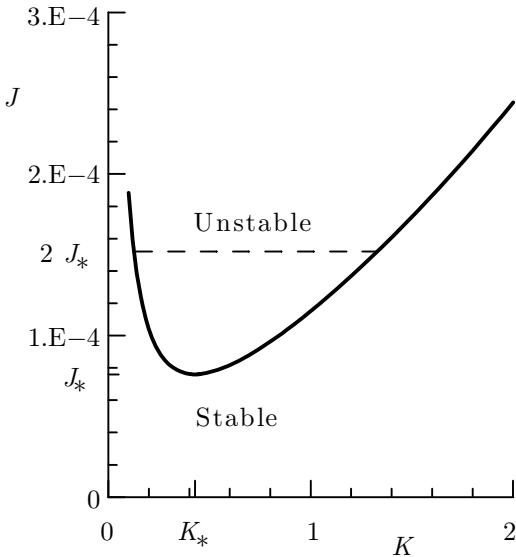
где интеграл вычисляется с обходом $Y = Y_0$ снизу. Таким образом, граница устойчивости описывается, в первом приближении, уравнением (ср. с (6))

$$J = J_0(K; \theta) = \ell^2 U_N'^2 \left[a_*(K)/I_2(Y_0(K)) \right] \cos^2 \theta. \quad (25)$$

При малой надкритичности ($|\Delta J| = |J - J_0| \ll J_0$)

$$Y_c - Y_0 + iZ = -(\Delta J/J_0)(I_2/I_3) + O[(\Delta J/J_0)^2]. \quad (26)$$

Так как $\text{Im}(I_3/I_2) > 0$, область неустойчивости ($Z > 0$) лежит выше границы, т. е. при $J > J_0(K; \theta)$ (рис. 5). При большей надкритичности инкремент $\gamma = \ell p Z$ и частоту $\omega = \ell p Y_c$ возмущения можно найти из уравнения (24) численно (см. рис. 6), однако достаточно очевидно, что, когда $\Delta J/J_0 = O(1)$, $(Y_c - Y_0)$ и Z имеют тот же порядок, т. е. $\gamma = O(\ell)$.

Рис. 5. Граница устойчивости (25) при $\theta = 0$ (течение (3)).

Пока амплитуда мала, нелинейность дает лишь малые поправки к (23):

$$B(t) = B_0 \exp(\gamma t - i\omega t) + d_1 |B_0|^2 B_0 \exp(3\gamma t - i\omega t) + O(|B_0 \exp(\gamma t)|^5),$$

$$d_1 = \frac{D(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta)}{(2\gamma)^5 a_*} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dY N(Y)}{(Y - Y_c - 3iZ)^2} \left/ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dY N(Y)}{(Y - Y_c - iZ)^2} - 1 \right. \right]^{-1}. \quad (27)$$

Теперь легко оценить порог нелинейности, т. е. тот уровень амплитуды $B_N \equiv |B_0| \exp(\gamma t_N)$, начиная с которого нелинейность существенно влияет на развитие возмущения. С учетом (26) получим

$$B_N = \begin{cases} O\left[(\gamma^5 \Delta J / J_0)^{1/2}\right] = O\left(\gamma^3 / \ell^{1/2}\right), & \Delta J / J_0 \ll 1; \\ O\left(\gamma^{5/2}\right), & \Delta J / J_0 = O(1). \end{cases} \quad (28)$$

5.2. Нелинейная стадия эволюции

По достижении порога нелинейности (28) характер эволюции возмущения радикально меняется. Чтобы понять, как именно, рассмотрим сперва случай малой надкритичности, когда $\gamma = O(\ell \Delta J / J_0) \ll \ell$, так что возмущение растет относительно медленно и на линейной стадии своего развития, и на начальном этапе нелинейной стадии. Отделим в $B(t)$ медленный рост от более быстрых осцилляций, $B(t) = B_1(t) \exp(-i\ell p Y_0 t)$, подставим в НЭУ (22) и преобразуем в нем второе слагаемое с помощью интегрирования по частям. Пренебрегая членами, содержащими вторую и старшие производные $B_1(t)$, получим, с учетом (25), эволюционное уравнение обычного для быстрых сценариев вида:

$$\frac{iK^2 J I_3}{\ell^3 p^3} \frac{dB_1}{dt} = -\frac{K^2 \Delta J I_2}{\ell^2 p^2} B_1(t) + D \int_0^\infty ds s^4 \int_0^1 d\sigma \sigma H(\sigma) B_1(t-s) B_1(t-\sigma s) \bar{B}_1(t-s-\sigma s). \quad (29)$$

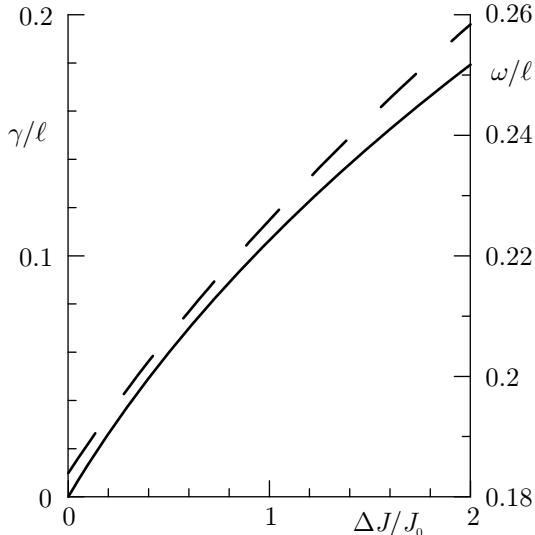


Рис. 6. Зависимость инкремента γ (сплошная линия) и частоты ω (пунктиром) возмущения от надкритичности при $K = K_*$ и $\theta = 0$.

Характер его решений хорошо известен (см., например, [17]): по достижении порога нелинейности (28), экспоненциальный рост амплитуды возмущения сменяется взрывным по закону $B_1(t) = B_{10}(t_0 - t)^{-3+i\beta}$, который является точным решением НЭУ (29) при $\Delta J = 0$. Параметр β находится из уравнения (32), а $|B_{10}| = \text{const} = O(\ell^{-1/2})$. Отметим, что практически по тому же закону (но с $|B_{10}| = O(1)$) растут возмущения и в однородном течении [21]. Далее мы увидим, однако, что и НЭУ (29), и следующий из него закон роста $B(t)$ справедливы лишь на промежуточной стадии эволюции.

Не считая более надкритичность малой, подставим закон взрывного роста

$$B_1(t) = B_*(t_* - t)^{-\alpha+i\beta} \quad (30)$$

в НЭУ (22) и вычислим каждое из его слагаемых, обозначая их T_1 , T_2 и T_N соответственно. После несложных преобразований получим:

$$T_1 = a_* B_*(t_* - t)^{-\alpha+i\beta},$$

$$T_2 = K^2 J B_*(t_* - t)^{2-\alpha+i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dY N(Y) \Psi\left(2, 3 - \alpha + i\beta; i\ell p(t_* - t)(Y - Y_0)\right),$$

$$T_N = D |B_*|^2 B_*(t_* - t)^{5-3\alpha+i\beta} I_N,$$

где

$$I_N = \int_0^1 ds s^4 (1-s)^{3\alpha-6-i\beta} \int_0^1 \frac{d\sigma \sigma H(\sigma)}{(1+\sigma s)^{\alpha+i\beta} (1-s+\sigma s)^{\alpha-i\beta}}$$

и $\Psi(a, c; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [24]. Рассмотрим предельные случаи.

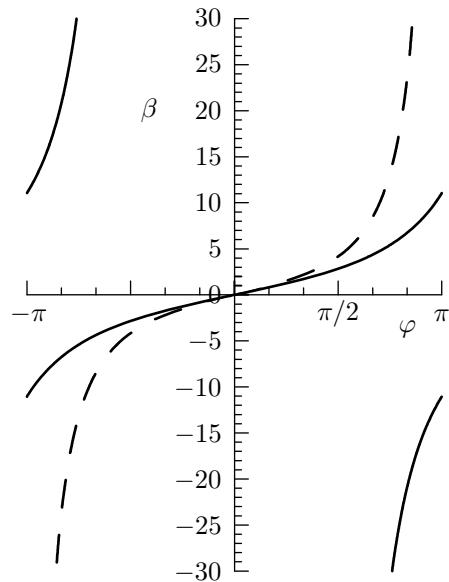


Рис. 7. Функции $\beta_1(\varphi)$ (сплошные линии) и $\beta_2(\varphi)$ (пунктиры) при $\theta = \pi/6$ (зависимость от θ слабая).

1. «Начальный» этап нелинейной эволюции: $\ell p(t_* - t) \gg 1$.

Используя асимптотическое разложение [24]

$$\Psi(a, c; x) = x^{-a} \left[1 - \frac{a(a - c + 1)}{x} + O(|x|^{-2}) \right], \quad |x| \gg 1,$$

и уравнение (25), получим

$$T_1 + T_2 = - \left[\frac{K^2 \Delta J}{\ell^2 p^2} I_2 + \frac{i(\alpha - i\beta) K^2 J}{\ell^3 p^3 (t_* - t)} I_3 + O([\ell p(t_* - t)]^{-2}) \right] B_*(t_* - t)^{-\alpha+i\beta}. \quad (31)$$

Если надкритичность достаточно мала, $\Delta J \ell p(t_* - t) \ll 1$, главным членом в квадратных скобках будет второй. Пренебрегая остальными членами, видим, что при $\alpha = 3$ правая часть (31) имеет ту же зависимость от $(t_* - t)$, что и T_N . Следовательно, НЭУ (22) имеет приближенное решение вида (30) с $\alpha = 3$ и β , удовлетворяющим уравнению

$$\arg I_N(\beta) + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \varphi, \quad \varphi = \arg I_3 \pm \frac{\pi}{2}, \quad (32)$$

где верхний знак берется при $D > 0$, а нижний — при $D < 0$ (т.е. при $0 < \theta < \pi/4$ и $\pi/4 < \theta < \pi/2$ соответственно, см. (21)). Подчеркнем, что мы сейчас рассмотрели тот же случай, который описывается НЭУ (29), и, разумеется, получили тот же асимптотический закон эволюции. Если же $\Delta J \ell p(t_* - t) \gg 1$, в (31) следует оставить в квадратных скобках только первый член. Тогда $\alpha = 5/2$, а β удовлетворяет уравнению

$$\arg I_N(\beta) = \varphi, \quad \varphi = \arg I_2 + \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} \equiv \arg a_* + \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}. \quad (33)$$

2. «Основной» этап нелинейной эволюции: $\ell p(t_* - t) \ll 1$.

Благодаря $N(Y)$, в T_2 главный вклад в интеграл по Y вносит область $|Y| = O(1)$, поэтому

можно считать, что $\ell p(t_* - t)|Y - Y_0| \ll 1$. Выражая Ψ через вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера Φ [24], видим, что в этом случае $|T_2| \ll |T_1|$, и в приближенном решении НЭУ (22) $\alpha = 5/2$ и (ср. с (33))

$$\arg I_N(\beta) = \arg a_* + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}, \quad |B_*|^2 = \left| \frac{a_*}{D I_N} \right|. \quad (34)$$

Таким образом, мы показали, что во всех предельных случаях НЭУ (22) имеет приближенное решение вида (30), нашли «показатель роста» α и получили уравнения (32)–(34) для определения β . Подобные уравнения характерны для задач с быстрым сценарием эволюции и довольно хорошо изучены (см., например, приложение D в [25]). Решения уравнений (32) и (33), $\beta = \beta_1(\varphi)$ и $\beta = \beta_2(\varphi)$, — нечетные 2π -периодические функции, их главные ветви (проходящие через начало координат, $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$) стремятся к $\pm\infty$ при $\varphi \rightarrow \pm 3\pi/2$ и $\varphi \rightarrow \pm\pi$ соответственно, так что на стандартный интервал $-\pi < \varphi < \pi$ попадает целиком главная ветвь $\beta_2(\varphi)$, либо части трех ветвей $\beta_1(\varphi)$ (рис. 7; отметим, что $\beta_1(\varphi)$ впервые вычислялась в [21]). Эти функции универсальны в том смысле, что не зависят ни от устройства течения, ни от параметров возмущения (кроме α), — вся информация об этом содержится в φ .

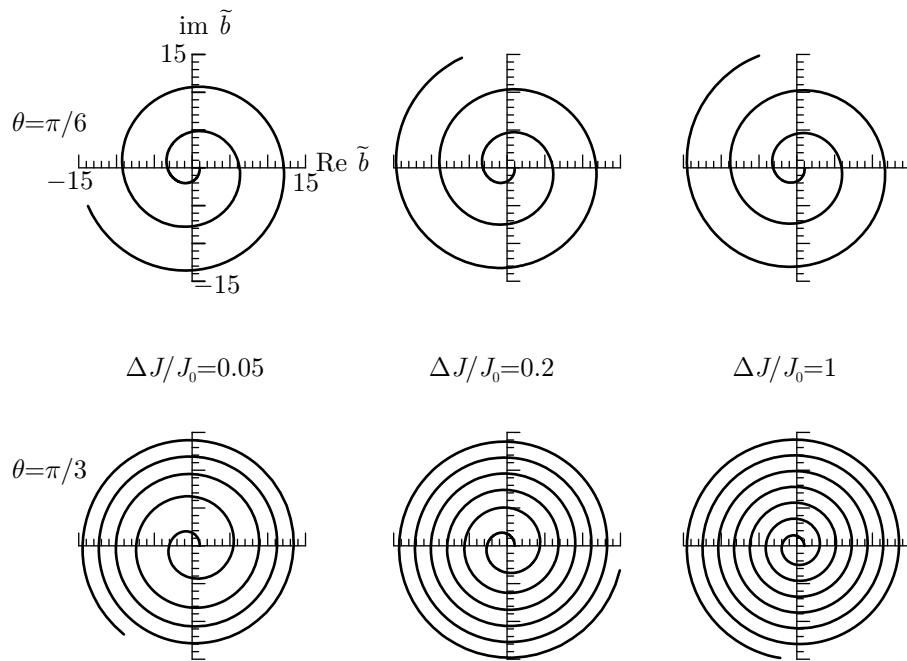


Рис. 8. Эволюционные треки задачи (35) при различных значениях угла θ и надкритичности $\Delta J/J_0$.

Для сравнения были получены численные решения НЭУ (22) с «начальным» (при $t \rightarrow -\infty$) условием $B(t) = B_0 \exp[\ell p(Z - iY_c)t]$, где Y_c и Z находятся из уравнения (24). С помощью подстановки

$$B(t) = B_0 b(T) \exp[\ell p(Z - iY_c)t], \quad T = T_0 e^{2\gamma t}, \quad T_0 = \frac{|D| |B_0|^2}{(2\gamma)^5 |a_*|}$$

задача приводится к уравнению

$$\begin{aligned} b(T) = & \frac{1}{I^{(0)}} \int_0^1 dv \kappa N_F(\kappa) b(vT) \exp[\kappa(Z + iY_c)] - \\ & - D_s T e^{-i\psi} \int_0^1 dv (\ln v)^4 \int_0^1 \frac{d\sigma \sigma H(\sigma)}{(1+\sigma)^5} b\left(Tv^{\frac{1}{1+\sigma}}\right) b\left(Tv^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\right) \bar{b}(Tv) \end{aligned} \quad (35)$$

с начальным условием $b(0) = 1$. Здесь

$$I^{(0)} = \int_0^1 dv \kappa N_F(\kappa) \exp[\kappa(Z + iY_c)], \quad \kappa = -\frac{\ln v}{2Z}, \quad D_s = \operatorname{sgn} D, \quad \psi = \arg a_*.$$

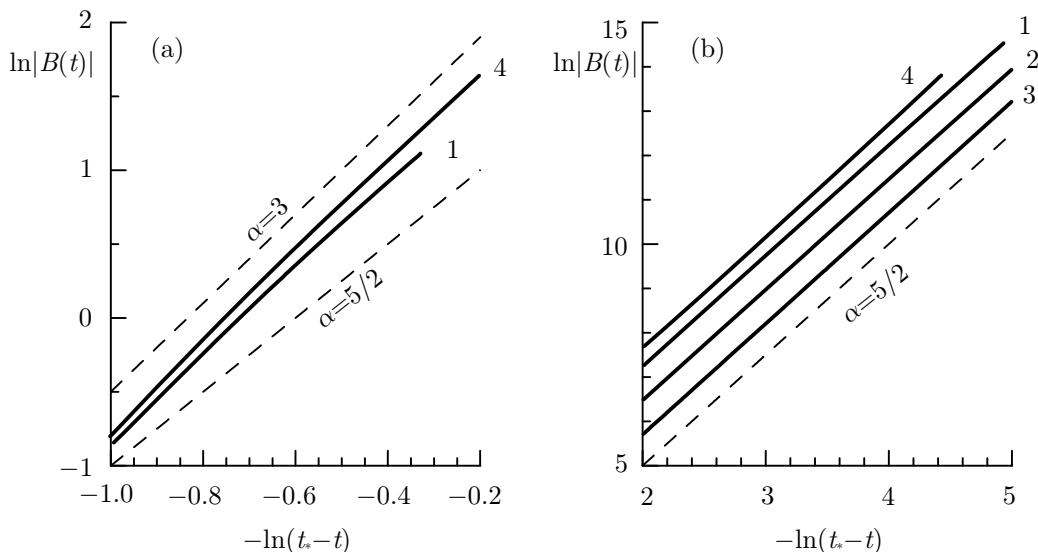


Рис. 9. Зависимость амплитуды $|B|$ от $(t_* - t)$ на (а) начальном и (б) основном этапах развития возмущения. 1 — $\theta = \pi/6$, $\Delta J/J_0 = 0.05$; 2 — $\theta = \pi/6$, $\Delta J/J_0 = 0.2$; 3 — $\theta = \pi/6$, $\Delta J/J_0 = 1$; 4 — $\theta = \pi/3$, $\Delta J/J_0 = 0.05$; пунктиром показаны прямые с коэффициентом наклона $5/2$ и 3 .

Расчеты проводились для течения (3) при $K = K_*$, где граница устойчивости (25) достигает минимума и

$$\psi \equiv \arg I_2 = -0.610666 \pi, \quad \arg I_3 = 0,$$

и двух значениях θ , $\pi/6$ и $\pi/3$, которым соответствуют следующие значения D_s и решений β_1 и β_2 уравнений (32) и (34):

$$\theta = \pi/6 : \quad D_s = +1, \quad \beta_1 = 2.83, \quad \beta_2 = 2.73;$$

$$\theta = \pi/3 : \quad D_s = -1, \quad \beta_1 = -2.95, \quad \beta_2 = -7.56.$$

Для сравнения различных режимов эволюции были взяты три уровня надкритичности, $\Delta J/J_0 = 0.05, 0.2$ и 1 . Результаты представлены на рис. 8 и 9.

На комплексной плоскости $\tilde{b} = (b/|b|)(1 + \ln |b|)$ эволюционные треки представляют собой спирали, начинающиеся при $\tilde{b} = 1$ и раскручивающиеся по часовой стрелке при $D_s = 1$ и против часовой стрелки при $D_s = -1$ (см. рис. 8), т. е. в соответствии с (30). Далее, согласно (30), чем больше $|\beta|$, тем меньше должен быть шаг спирали. При $\theta = \pi/6$ (верхний ряд спиралей) β в ходе эволюции меняется незначительно, и шаг спиралей в центре и на периферии практически одинаков. Напротив, когда $\theta = \pi/3$ (нижний ряд спиралей), при движении от центра шаг заметно уменьшается, особенно при малой надкритичности (когда β изменяется в 2.5 раза).

На рис. 9 в логарифмическом масштабе показана зависимость амплитуды $|B|$ от $(t_* - t)$. Хорошо видно, что при малой надкритичности на начальном этапе показатель роста $\alpha = 3$, а затем, при любой надкритичности, $\alpha \rightarrow 5/2$ на основном этапе эволюции. Выделить стадию развития возмущения, отвечающую промежуточной асимптотике (33), не удалось.

6. Обсуждение результатов

Основным результатом работы является нелинейное эволюционное уравнение (22), описывающее развитие неустойчивых возмущений в виде пары косых волн в режиме нестационарного КС, включая и тот случай (неизбежно реализующийся в ходе эволюции), когда стратифицированный слой целиком находится внутри КС. Для его вывода развит вариант теории возмущений, не основанный на предположении о слабой надкритичности и позволяющий изучить развитие любого возмущения, неустойчивого при данном уровне стратификации.

НЭУ (22), в отличие от полученных до сих пор, представляет собой нелинейное интегральное уравнение, в котором и линейная, и нелинейная части обладают «памятью», т. е. зависят от предыстории развития возмущения. Обусловлено это тем обстоятельством, что и дисперсия колебаний, определяемая, главным образом, стратификацией, и их нелинейность формируются внутри существенно нестационарного КС. Как показал асимптотический и численный анализ решений уравнения (22), в своем развитии неустойчивое возмущение проходит несколько стадий. Пока его амплитуда ниже порога нелинейности (28), оно растет экспоненциально, с инкрементом γ , определяемым уравнением (24). После достижения порога нелинейности рост ускоряется и становится взрывным, см. (30) и рис. 9. Если $\gamma \ll \ell$, на начальном этапе взрывного роста, пока $L_t \ll \ell$, показатель $\alpha = 3$, а затем, при $|B| = O(\ell^{5/2})$, происходит переход к основному этапу роста, с $\alpha = 5/2$. Если же $\gamma = O(\ell)$, переход к взрывному росту с $\alpha = 5/2$ происходит сразу по достижении порога нелинейности. Сравнивая на основном этапе роста нестационарный и нелинейный масштабы (1), $L_t = O[(t_* - t)^{-1}]$ и $L_N = |B|^{1/2} = O[(t_* - t)^{-5/4}]$, видим, что $L_t \gg L_N$ вплоть до $|B| = O(1)$. Иными словами, режим КС остается нестационарным, а уравнение (22) справедливым до амплитуд порядка единицы.

Таков сценарий эволюции, если в (30) коэффициент $|B_*| = O(1)$. Обсудим теперь альтернативный случай $|B_*| \gg 1$, или, как следует из (34), $|a_*/D| \gg 1$. Анализ решений уравнения Релея (см., например, [8]) показывает, что $|a_*| = O(K + 1/K)$, и в довольно широком диапазоне длин волн можно считать его порядка единицы. Коэффициент D (см. (21)) обращается в нуль при $\theta = 0, \pi/4$ и $\pi/2$. Вблизи этих значений θ ход эволюции будет определяться либо кубическими вкладами в основную гармонику внутреннего решения, обусловленными учетом стратификации и вязкости, либо нелинейностью более высокого (например, пятого) порядка.

Начнем с $\theta \approx \pi/4$, полагая, что линейный инкремент $\gamma = O(\ell)$. Предположим сперва, что главную роль играет кубический по A вклад в правую часть (17). Как видно из уравнений (12), стратификация дает поправку $O(\ell)$ к V_1 и через V_1 — к горизонтальным компонентам скорости. Соответствующие поправки к квадратичным по A вкладам в нулевую и вторую гармоники имеют порядок $O(\varepsilon/\ell)$, а к кубическим (в основную и третью гармоники) — $O(\varepsilon^2/\ell^3)$. Следовательно, нелинейный вклад стратификации в правую часть (17) порядка $O(\varepsilon^2/\ell^3)$. Аналогичным образом находим, что вклад, обусловленный вязкостью, имеет порядок $O(\nu\varepsilon^2/\ell^7)$ и при рассматриваемых нами числах Рейнольдса ($Re \gtrsim \ell^{-4}$) не превосходит вклад от стратификации. Поэтому сравнение с линейным ($O(\ell)$) вкладом приводит к скейлингу $\varepsilon^2 = \ell^4$, который показывает, что на пороге нелинейности $L_N = L_t$, т. е. сразу по его достижении возмущение должно перейти в режим нелинейного КС. В рассматриваемых нами течениях $Pr > 1$, поэтому можно ожидать (см. [26]), что после некоторого периода установления квазистационарной структуры КС рост амплитуды продолжится, но уже по медленному закону $B(t) \sim t^{2/3}$.

В стратифицированных течениях с кубической нелинейностью традиционно конкурирует бездиссипативная нелинейность пятого порядка (см., например, [25]). Чтобы оценить ее вклад, продолжим процесс «генерации гармоник», два шага которого описаны в конце подраздела 4.1. Третий шаг приносит вклады $O(\varepsilon^3/\ell^6)$ четвертой степени по A в нулевую, вторую и четвертую гармоники внутреннего решения, а на четвертом шаге, в порядке $O(\varepsilon^4/\ell^8)$, получаем вклад пятой степени по A в основную гармонику (а также в третью и пятую). Соответствующий ему вклад в правую часть (17) сможет конкурировать с линейным, если $\varepsilon^4 = \ell^9$. Легко видеть, что нелинейность пятого порядка вступает в игру при меньшей амплитуде, чем рассмотренная выше кубическая, поэтому именно она будет определять эволюцию возмущений с $\theta \approx \pi/4$ и обеспечит их взрывной рост по закону $|B(t)| = B_5(t_0 - t)^{-9/4}$ до амплитуды порядка единицы.

Теперь перейдем к квазипродольным ($|\theta| \ll 1$) и квазиперечным ($|\pi/2 - \theta| \ll 1$) возмущениям. При $\theta = 0$ полюсы (при $Y = 0$) у горизонтальных компонент возмущения скорости (16) исчезают, и на смену «трехмерной» нелинейности приходит более слабая «двумерная», обусловленная стратификацией и диссипацией [26] (нелинейность пятого порядка при $\theta \ll 1$ неконкурентоспособна). Она не может обеспечить достаточно быстрый рост возмущения, и неизбежно происходит переход в режим нелинейного КС с характерным для него законом роста $B(t) \sim t^{2/3}$. Что же касается квазиперечных возмущений ($\theta \approx \pi/2$), то ранее они, по-видимому, не изучались, поэтому говорить в этом случае о конкуренции нелинейностей и возможных сценариях эволюции преждевременно.

Итак, мы рассмотрели нелинейную стадию развития неустойчивости резко стратифицированных несжимаемых сдвиговых течений без точек перегиба на профиле скорости. Эта неустойчивость невязкая и потому эффективна даже при очень больших числах Рейнольдса, характерных для многих геофизических и астрофизических течений. Кроме того, она существенно трехмерная, так что уже на линейной стадии ее развития формируется трехмерный спектр довольно быстро растущих возмущений. Проведенный выше анализ показал, что, ввиду резонансного характера неустойчивости, нелинейность вступает в игру при довольно малых амплитудах (см. (28)). С переходом на нелинейную стадию рост каждого элементарного возмущения (вида (7)) в отдельности в общем случае ускоряется и становится взрывным, что, очевидно, способствует быстрому формированию развитой турбулентности.

В заключение остановимся кратко еще на одном вопросе. Выше мы считали, что число Рейнольдса настолько велико, что диссипативными процессами (вязкостью и диффузией

плотности) можно пренебречь. Как видно из уравнений (12), их существенного влияния на развитие возмущений следует ожидать при $Re = O(\ell^{-3})$, когда L_ν и L_t одного порядка, и диссипативные процессы определяют структуру КС наравне с нестационарными. Для однородных течений было установлено [22], что при учете вязкости структура НЭУ остается прежней (аналогичной структуре НЭУ (29)), хотя зависящее от вязкости ядро нелинейного члена представляет собой довольно сложную функцию. Интересно отметить, что это ядро по-прежнему обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$, но при $\theta = \pi/4$ оно порядка единицы, если параметр вязкости $\lambda \equiv (\ell^3 Re)^{-1} = O(1)$, и стремится к нулю только в предельных случаях слабой ($\lambda \ll 1$) и сильной ($\lambda \gg 1$) диссипации. Численными расчетами было показано, что при слабой и умеренной вязкости возмущения растут взрывным образом при любых θ , не слишком близких к нулю и $\pi/2$. При этом время t_* достижения сингулярности зависит, очевидно, от θ и увеличивается с ростом λ . Но при $\lambda \gg 1$ картина иная: по взрывному закону растут только возмущения с $\theta > \pi/4$, а при $\theta < \pi/4$ рост сменяется затуханием. Как показало аналитическое рассмотрение, в этом пределе НЭУ устроено так, что линейный инкремент γ получает нелинейную добавку, пропорциональную $\int_0^\infty ds |B(\tau - s)|^2 \cos 2\theta$. По достижении порога нелинейности суммарный (нелинейный) инкремент, в зависимости от знака $\cos 2\theta$, либо быстро растет со временем, либо уменьшается и меняет знак, что приводит, соответственно, либо к взрывному росту, либо к затуханию возмущения.

На первый взгляд, результаты этого анализа могли бы быть непосредственно перенесены на изучаемые в данной статье течения. Однако, как уже отмечалось, одна из особенностей нашей задачи состоит в том, что КС отвечает не только за нелинейность (которая в однородных и резко стратифицированных течениях в главном порядке одинакова), но и за линейные свойства колебаний. Поэтому изменение режима КС неизбежно влияет на устойчивость, в частности, на конфигурацию области неустойчивости и особенно на ее нижнюю границу. Можно, по-видимому, ожидать, что при $\lambda < 1$ изменения окажутся еще не слишком сильными, и рост возмущений останется взрывным. Но случай более сильной диссипации, когда $\lambda = O(1)$ или, тем более, $\lambda \gg 1$, требует отдельного изучения.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 16, Программы ОФН РАН № 16, гранта РФФИ № 09-02-00082-а и гранта «Ведущие научные школы» № 900.2008.2, предоставленного Министерством промышленности, науки и технологий Российской Федерации.

ПРИЛОЖЕНИЕ: Свойства решений уравнения (24)

Рассмотрим более подробно некоторые свойства решений уравнения (24). Начнем с границы устойчивости ($Z \rightarrow 0+$). Поскольку $\operatorname{Im} a_* = \pi U''_N / U'_N < 0$, то $-\pi < \arg a_* < 0$ при любом K . Интеграл в правой части представим в виде суммы интеграла в смысле главного значения и полувычета в $Y = Y_0$:

$$I_2(Y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dY N'(Y)}{Y - Y_0} + i\pi N'(Y_0).$$

С учетом (11), $I_2 \approx Y_0^{-2} + i\pi N'(Y_0)$ при $|Y_0| \gg 1$. Так как $N(Y)$ имеет единственный максимум (при $Y = Y_M$), знаки $N'(Y)$ и $(Y - Y_M)$ противоположны, и $I_2(Y_M) < 0$. Поэтому, когда Y_0 пробегает от $-\infty$ до $+\infty$, $\varphi = \arg I_2$ растет от -2π до 0 , причем $\varphi(Y_M) = -\pi$. Следовательно, каждому K соответствует такое $Y_0 > Y_M$, что $\varphi(Y_0) = \arg a_*$.

Продифференцируем I_2 по Y_0 :

$$\frac{dI_2}{dY_0} = \left(\frac{d|I_2|}{dY_0} + i|I_2| \frac{d\varphi}{dY_0} \right) e^{i\varphi} = I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dY N''(Y)}{Y - Y_0} + i\pi N''(Y_0). \quad (\text{П1})$$

Легко видеть, что $\operatorname{Im}(I_3/I_2) = d\varphi/dY_0 > 0$, поэтому область неустойчивости ($Z > 0$) лежит выше границы $J = J_0(K; \theta)$. Переходя теперь к $Z > 0$, заметим, что интеграл Коши $I_2(Y_*)$ — аналитическая в верхней полуплоскости $Y_* = Y_c + iZ$ функция, производная которой отлична от нуля на вещественной оси (см. (П1)), а следовательно, и в некоторой полосе $0 < Z < Z_*$, что гарантирует существование обратной функции и единственного решения $Y_* = F(J, K; \theta)$ уравнения (24) в соответствующей полосе $J_0(K; \theta) < J < J_1(K; \theta)$.

Наконец, дифференцируя уравнение (24) по K при $Z = 0+$ и $\theta = \text{const}$,

$$\frac{da_*}{dK} = \frac{K^2}{\ell^2 p^2} \left(I_2 \frac{\partial J}{\partial K} + J I_3 \frac{dY_0}{dK} \right),$$

видим, что левая часть вещественна. Следовательно, при $K = K_*$, т. е. в нижней точке границы устойчивости, критический уровень Y_0 совпадает с точкой перегиба $N(Y)$, лежащей выше Y_M . Можно показать, что при этом $I_3 > 0$.

Список литературы

- [1] Жигулёв В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
- [2] Kachanov Yu. S. Physical Mechanisms of Laminar-Boundary-Layer Transition // Annu. Rev. Fluid Mech., 1994, vol. 26, pp. 411–482.
- [3] Drazin P. G. and Reid W. H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 2nd Ed., 605 p.
- [4] Kachanov Yu. S. Routes of Boundary-Layer Transition // IUTAM Symposium on One Hundred Years of Boundary Layer Research (Göttingen, 12–14 August, 2004) / G. E. A. Meier, K. R. Sreenivasan (Eds.). Berlin: Springer, 2006. pp. 95–104.
- [5] Chimonas G. Considerations of the Stability of Certain Heterogeneous Shear Flows Including Some Inflexion-Free Profiles // J. Fluid Mech., 1974, vol. 65, pp. 65–69.
- [6] Fua D., Einaudi F., and Lalas D. P. The Stability Analysis of an Inflexion-Free Velocity Profile and Its Application to the Night-Time Boundary Layer in the Atmosphere // Boundary-Layer Meteorol., 1976, vol. 10, pp. 35–54.
- [7] Smyth W. D. and Peltier W. R. Three-Dimensional Primary Instabilities of a Stratified, Dissipative, Parallel Flow // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1990, vol. 52, pp. 249–261.
- [8] Чурилов С. М. Об устойчивости стратифицированных сдвиговых течений с монотонным профилем скорости без точек перегиба // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 2004, т. 40, № 6, с. 809–820.
- [9] Churilov S. M. Stability Analysis of Stratified Shear Flows with a Monotonic Velocity Profile without Inflection Points // J. Fluid Mech., 2005, vol. 539, pp. 25–55.
- [10] Churilov S. M. Stability Analysis of Stratified Shear Flows with a Monotonic Velocity Profile without Inflection Points: Part 2. Continuous Density Variation // J. Fluid Mech., 2008, vol. 617, pp. 301–326.
- [11] Smyth W. D., Klaassen G. P., and Peltier W. R. Finite Amplitude Holmboe Waves // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1988, vol. 43, pp. 181–222.

- [12] Squire H. B. On the Stability of Three-Dimensional Disturbances of Viscous Flow between Parallel Walls // Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1933, vol. 142, pp. 621–628.
- [13] Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости // Усп. физ. наук, 1970, т. 102, с. 185–210.
- [14] Андронов А. А., Фабрикант А. Л., Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // Нелинейные волны / Гапонов-Грехов А. В. (ред.). М.: Наука, 1979. с. 68–104.
- [15] Fabrikant A. Plasma-Hydrodynamic Analogy for Waves and Vortices in Shear Flows // Sound-Flow Interactions / Aurégan Y. et al. (Eds). Lecture Notes in Phys., vol. 586. New York: Springer, 2002. pp. 192–209.
- [16] Maslowe S. A. Critical Layers in Shear Flows // Annu. Rev. Fluid Mech., 1986, vol. 18, pp. 405–432.
- [17] Чурилов С. М., Шухман И. Г. Критический слой и нелинейная эволюция возмущений в слабо-надкритических сдвиговых течениях // Изв. АН. Физика атмосферы и океана, 1995, т. 31, № 4, с. 557–569.
- [18] Hickernell F. J. Time-Dependent Critical Layers in Shear Flows on the Beta-Plane // J. Fluid Mech., 1984, vol. 142, pp. 431–449.
- [19] Wu X. and Cowley S. J. On the Nonlinear Evolution of Instability Modes in Unsteady Shear Layers: The Stokes Layer as a Paradigm // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1995, vol. 48, pp. 159–188.
- [20] Goldstein M. E. Nonlinear Interactions between Oblique Instability Waves on Nearly Parallel Shear Flows // Phys. Fluids, 1994, vol. 6, pp. 724–735.
- [21] Goldstein M. E. and Choi S.-W. Nonlinear Evolution of Interacting Oblique Waves on Two-Dimensional Shear Layers // J. Fluid Mech., 1989, vol. 207, pp. 97–120; Corrigendum, *ibid.*, 1990, vol. 216, pp. 659–663.
- [22] Wu X., Lee S. S., and Cowley S. J. On the Weakly Nonlinear Three-Dimensional Instability of Shear Layers to Pairs of Oblique Waves: The Stokes Layer as a Paradigm // J. Fluid Mech., 1993, vol. 253, pp. 681–721.
- [23] Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения. Киев: Наукова думка, 1986. 543 с.
- [24] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
- [25] Churilov S. M. Nonlinear Stability of a Stratified Shear Flow in the Regime with an Unsteady Critical Layer: Part 2. Arbitrary Stratification of Asymmetric Flow // J. Fluid Mech., 1999, vol. 392, pp. 233–275.
- [26] Shukhman I. G. and Churilov S. M. Effect of Slight Stratification on the Nonlinear Spatial Evolution of a Weakly Unstable Wave in a Free Shear Layer // J. Fluid Mech., 1997, vol. 343, pp. 197–233.