

Диаграммная техника Фейнмана в осреднении уравнений движения упругого композита со случайными неоднородностями

В. А. Гончарук¹ *, А. М. Сбоячаков² **, Ю. А. Кухаренко²,
С. Н. Власов¹, П. Л. Поляк¹

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Россия, Москва, Ленинские горы, 1

²Институт физики Земли
123995, Россия, Москва, Большая Грузинская, 10
*vya-goncharuk@yandex.ru, **sboychakov@yandex.ru

Получено 29 января 2009 г.

Исследуется нелинейная динамика случайно-неоднородной упругой среды. Под случайно-неоднородными средами мы понимаем композиционные материалы, гранулированные материалы, пористые горные породы с хаотическим расположением компонент. Для описания такой среды необходимо перейти от эйлеровых координат к лагранжевым координатам. В качестве тензора напряжений в этом случае выступает лагранжев тензор (тензор Пиолы–Кирхгофа). Он несимметричен и определяется производной от энергии системы не по симметричному тензору деформации, а по дилатации, т. е. по градиенту вектора смещений. Нами использован наиболее простой, на наш взгляд, подход к лагранжеву описанию, разработанный в модели Ландау–Лифшица.

В данной работе подход Ландау–Лифшица обобщается на нелинейную случайно-неоднородную упругую среду. Соответственно, уравнения движения содержат случайные зависящие от координат коэффициенты. В работе рассмотрено влияние начальных напряжений и конечных деформаций на колебания среды в окрестности областей с большими начальными напряжениями. Получены уравнения распространения волн в окрестности напряженной области. Эти уравнения вследствие случайной неоднородности среды описывают не только распространение волн, но содержат и все многократные отражения волн от неоднородностей.

Для усреднения в работе используется диаграммная техника Фейнмана. Эта техника позволяет получить точное уравнение для усредненного упругого поля, описывающего когерентное распространение волн с учетом многократного рассеяния. Это уравнение является интегро-дифференциальным. Его ядро (корреляционный оператор) содержит вклад от корреляционных функций случайных неоднородностей всех порядков. Этот оператор непосредственно определяет скорости продольной и поперечных волн в случайно-неоднородной упругой среде. Эти скорости зависят от начальных напряжений и наш подход позволяет приближенно вычислить эту зависимость. В обратном случае, экспериментально измеряемые скорости звука в окрестности напряжений, близких к критическим для разрушения вещества, позволяют определить состояние напряженной среды и ее эффективные параметры. В данной работе обратная задача не рассматривается, мы ограничимся только выводом основных уравнений, позволяющих поставить эту обратную задачу.

Ключевые слова: нелинейная случайно-неоднородная среда, диаграммная техника, спектр колебаний



**V. A. Goncharuk, A. M. Sboychakov, Yu. A. Kukharenko,
S. N. Vlasov, and P. L. Polyak**

**Feynman diagram technique in averaging of motion equations for random
nonhomogeneous elastic composite material**

We consider nonlinear dynamics of random nonhomogeneous elastic medium. By random nonhomogeneous media we mean composite materials, granular materials, porous rocks with chaotic components distribution. To describe such medium we need to use Lagrangian coordinates instead of Eulerian coordinates. In this case Piola–Kirchhoff tensor should be used as strain tensor. It is asymmetrical tensor and defined as derivative of an energy with respect to dilatation, i. e. gradient of displacement vector. Here we use the most simple approach to Lagrangian representation which was developed in the Landau–Lifshitz model.

The Landau–Lifshitz approach is generalized here for nonlinear random nonhomogeneous elastic medium. So, equations motion of contain random coordinate dependent coefficients. In this article we considered effect of inherent stresses and finite deformations on medium oscillations near areas with high inherent stresses. Equations of wave propagation near stressed area are derived. As a result of medium random nonhomogeneity these equations describe not only wave propagation but also all multiple reflections from nonhomogeneities.

For averaging in this work we have used the Feynman diagram technique. This technique makes it possible to derive precise equation for average elastic field, which characterizes coherent propagation of waves subject to multiple reflections. This equation is integro-differential. It's kernel (correlation operator) contains contributions from random nonhomogeneities correlation functions of any order. This operator directly defines velocities of *P*- and *S*- waves in random nonhomogeneous elastic medium. These velocities depends on inherent stresses and our approach allows approximate calculation of this dependence. In inverse case one can use experimental velocities of sound in areas with stresses near to critical for material breaking. Using these velocities state of stressed medium can be defined and it's effective parameters. This article doesn't cover inverse case. We only derive basic equation here which make it possible to state the inverse problem.

Keywords: nonlinear random nonhomogeneous medium, diagram technique, vibration spectrum

Mathematical Subject Classifications: 74J30, 74H65



1. Введение

Рассмотрена композиционная среда, или гранулированная система, или пористая горная порода, представляющая собой гетерогенную смесь твердых и жидкого (или также твердых) компонент. При этом твердая компонента представляет собой связный скелет (матрицу) с твердыми или жидкими включениями. Простейший пример такой среды указан на рис. 1.

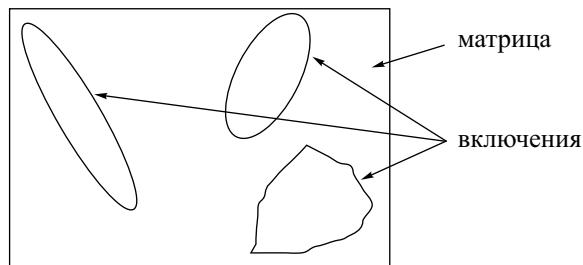


Рис. 1. Модель среды.

Такая среда является случайно-неоднородной. При напряжениях в среде происходят деформации, как скелета, так и включений, а также перегруппировка зерен. Для учета этих эффектов, связанных с конечными деформациями среды, необходимо использовать нелинейные уравнения упругости. Наиболее простое нелинейное обобщение уравнений упругости описывается моделью Ландау–Лифшица [1]. В изотропном случае эта модель содержит 5 констант: K — модуль сжатия, μ — модуль сдвига, A, B, C — константы, описывающие нелинейные по деформациям поправки в тензор напряжений.

В данной работе модель Ландау–Лифшица применяется нами к случайно-неоднородной упругой пористой среде. В этом случае вместо пяти констант приходится ввести случайные функции координат: $K(\vec{x}), \mu(\vec{x}), A(\vec{x}), B(\vec{x}), C(\vec{x})$. Если скелет относится к одной компоненте, а все включения относятся к другой компоненте (двухкомпонентная система), то эти случайные функции принимают два значения: $K_1, K_2, \mu_1, \mu_2, \dots$

Разложение для энергии среды с точностью до кубических членов по деформации позволяет получить нелинейное уравнение движения двухкомпонентной случайно-неоднородной среды. Мы будем считать, что среда находится в напряженном состоянии под действием статического давления, обусловленного гравитацией или другими причинами. Будет рассмотрено распространение волн малой амплитуды в первоначально напряженной среде. Динамическое уравнение для волн в случайно-неоднородной среде будет усреднено с помощью диаграммной техники Фейнмана [2]. Мы покажем, что коэффициенты этого уравнения содержат корреляционные функции упругих модулей, а также зависят от начальных деформаций.

Наша цель — получить усредненное уравнение для волн в первоначально напряженной среде в окрестности заданного начального напряжения. Диаграммная техника Фейнмана позволяет получить это уравнение в точном виде. Это интегро-дифференциальное уравнение содержит нелокальное по времени и пространству ядро — корреляционный оператор, который учитывает многократное рассеяние волн на случайных неоднородностях. Усредненное уравнение содержит продольную и поперечные скорости звука, зависящие от функции распределения случайных неоднородностей и от начальных напряжений. Изменение этих скоростей позволяет определить начальные деформации среды и анизотропию, обусловленную начальными напряжениями.

2. Нелинейные уравнения движения случайно-неоднородной упругой среды в приближении модели Ландау–Лифшица

Уравнения движения упругой среды в модели Ландау–Лифшица имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i, \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора смещения, ρ — плотность среды, σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, f — внешняя сила.

Для учета эффектов, возникающих при деформации среды и влияющих на распространение малых возмущений в среде, необходимо использовать нелинейные уравнения упругости. Тогда согласно подходу, описанному Ландау и Лифшицем [1], тензор напряжений выражается следующим образом:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)},$$

где упругая энергия ε в случае рассматриваемого нами изотропного тела и с целью получения нелинейных уравнений имеет вид:

$$\varepsilon = \mu(u_{ik}u_{ik}) + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) (u_{ll})^2 + \frac{A}{3}u_{ik}u_{il}u_{kl} + B(u_{ik}u_{ik})(u_{ll}) + \frac{C}{3}(u_{ll})^3,$$

где u_{ik} — тензор деформации, K — модуль сжатия, μ — модуль сдвига, A, B, C — коэффициенты для описания нелинейных свойств среды. K, μ, A, B и C являются случайными функциями координат.

Здесь первые два слагаемые соответствуют линейной модели, а оставшиеся — дополнительные слагаемые для учета нелинейных эффектов.

Для тензора деформации, в свою очередь, мы используем полное (не линеаризованное) представление через вектор смещения:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

Таким образом, подставляя приведенные выражения в (1), мы получаем следующее уравнение в смещениях:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{B}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{A}{4} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \left[\delta_{ik} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[B \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 \right] + f_i. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Динамическое уравнение, описывающее распространение линейных волн в окрестности заданных начальных напряжений

Нами рассматривается среда, в которой малые возмущения распространяются на фоне уже имеющихся деформаций:

$$u_i = u_i^0(\vec{x}) + u_i^1(\vec{x}, t), \quad (3)$$

где u_i^1 — компоненты вектора смещения, характеризующего малые деформации (назовем их динамическими; например, звуковые волны), u_i^0 отвечает за имеющиеся в среде деформации (назовем их статическими; например, сжатие резервуара в результате выкачивания нефти). Мы полагаем, что статические деформации не зависят от времени и $u_i^1(\vec{x}, t) \ll u_i^0(\vec{x})$.

Статистические перемещения удовлетворяют уравнению

$$0 = \frac{\partial \sigma_{ik}(\vec{u}^0)}{\partial x_k} + f_i^0, \quad (4)$$

где \vec{f}^0 — вектор внешней силы, являющейся причиной статической деформации.

Подставим выражение (3) в уравнение (2). Учитывая уравнение (4) и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости относительно \vec{u}^1 , получаем уравнение для динамических перемещений. Это уравнение можно записать в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{n,m} C_{iknm} \frac{\partial u_n^1}{\partial x_m} \right] + f_i^1, \quad (5)$$

где $\vec{f}^1 = \vec{f} - \vec{f}^0$ — источник малых колебаний, тензор $C_{iknm} = C_{iknm}(\mu, K, A, B, C, \vec{u}^0)$ содержит все коэффициенты уравнений и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{iknm} = & \left[\left(B + K - \frac{2\mu}{3} \right) \left(\frac{\partial u_l^0}{\partial x_l} \right) + \mu \right] \delta_{in} \delta_{km} + B \left(\frac{\partial u_l^0}{\partial x_l} \right) \delta_{im} \delta_{kn} + \left[K + \frac{\mu}{3} + 2C \left(\frac{\partial u_l^0}{\partial x_l} \right) \right] \delta_{ik} \delta_{nm} + \\ & + \left[\mu \frac{\partial u_n^0}{\partial x_k} + \frac{A}{4} \left(\frac{\partial u_n^0}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^0}{\partial x_n} \right) \right] \delta_{im} + \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^0}{\partial x_k} \right) \delta_{in} + \\ & + \left[\left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u_n^0}{\partial x_m} + B \left(\frac{\partial u_n^0}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} \right) \right] \delta_{ik} + \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial u_n^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_n} \right) \delta_{km} + \\ & + \left[\mu \frac{\partial u_i^0}{\partial x_m} + \frac{A}{4} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^0}{\partial x_i} \right) \right] \delta_{kn} + \left[\left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} + B \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} \right) \right] \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Как видно из последней формулы, как результат учета нелинейных слагаемых мы получили, что коэффициенты уравнения (а значит, и его решение — динамические смещения) зависят от статических деформаций.

4. Усреднение динамического уравнения для распространения волн в случайно-неоднородной среде

Упругие характеристики среды являются случайными функциями координат, так что и динамические деформации (и соответствующие перемещения) — величины случайные. Мы ставим перед собой задачу получения уравнений для среднего значения динамических перемещений.

Для описания случайного характера среды мы используем скалярный параметр порядка

$$\eta(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если точка принадлежит матрице} \\ 0, & \text{если точка лежит внутри пор, трещин.} \end{cases}$$

Тогда каждый компонент тензора C_{iknm} из уравнения (5) является случайной функцией координат и представляется в виде произведения детерминированной функции и параметра порядка:

$$C_{iknm}(\vec{x}) = C_{iknm}^*(\vec{x}) \cdot \eta(\vec{x}).$$

Представляя тензор $C_{iknm} = \bar{C}_{iknm} + C'_{iknm}$ в виде суммы его среднего и флюктуации ($\bar{C}_{iknm} = C_{iknm}^* \cdot \bar{\eta}$), преобразуем уравнение (5) к виду:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{n,m} \bar{C}_{iknm} \frac{\partial u_n^1}{\partial x_m} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{n,m} C'_{iknm} \frac{\partial u_n^1}{\partial x_m} \right] + f_i^1.$$

Вводя соответствующие обозначения для операторов в левой и правой частях уравнения, перепишем его в следующем виде:

$$G_0^{-1} \vec{u}^1 = V \vec{u}^1 + \vec{f}^1. \quad (6)$$

Выражения $G_0^{-1} \vec{u}^1, V \vec{u}^1$ обозначают результаты применения соответствующих операторов к вектору смещения \vec{u}^1 .

Здесь G_0 — обобщенное решение для уравнения без флюктуационной части C'_{iknm} , оно удовлетворяет уравнению:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_0^{il}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{n,m} \bar{C}_{iknm} \frac{\partial}{\partial x_m} G_0^{nl}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') \right] + \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t').$$

Теперь от задачи решения уравнения (6) с правой частью мы перейдем к поиску обобщенного решения G , то есть такого оператора, что решение этого уравнения представляется в виде $\vec{u}^1 = G \vec{f}^1$.

Тогда из уравнения (6) для u получаем следующее уравнение для G :

$$G_0^{-1} G = V G + 1.$$

Домножая правую и левую части последнего уравнения на G_0 и итерируя его, получаем:

$$G = G_0 + G_0 V G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots. \quad (7)$$

Так как функция \vec{f}^1 детерминирована, то задача усреднения \vec{u}^1 сводится к усреднению G : $\overline{\vec{u}^1} = \overline{G \vec{f}^1} = \bar{G} \vec{f}^1$.

5. Диаграммная техника

Для усреднения G нами используется диаграммная техника Фейнмана, развитая в квантовой теории поля [2].

Для операторов G_0 и V мы вводим диаграммные обозначения и представляем ряд (7) в виде диаграммного ряда (см. рис. 2). Первые члены ряда, получающегося после усреднения, также представлены на рис. 2. Пересекающиеся пунктирные диаграммы обозначают соответствующие моменты оператора V (например, две пересекающиеся линии обозначают $(V - \bar{V})^2$). Одиночные пунктирные диаграммы отсутствуют, так как среднее значение оператора V равно нулю по определению (он представляет оператор с $C'_{iknm}, \bar{C}'_{iknm} = 0$).

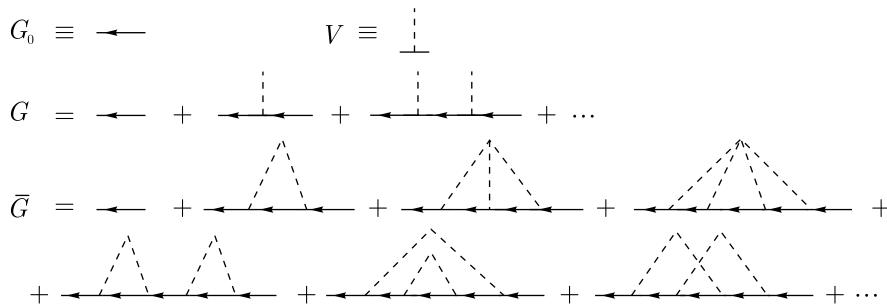


Рис. 2. Диаграммные ряды.

Полученный диаграммный ряд может быть просуммирован, а результат представляется в виде уравнения Дайсона (см. рис. 3). Диаграмма в виде заштрихованного круга обозначает так называемый корреляционный оператор — сумму всех неприводимых диаграмм. Определение приводимости таково: рассмотрим диаграмму без начальной и конечной стрелок (соответствующих G_0), и если через получившуюся диаграмму можно провести вертикальную линию, не пересекающую пунктирную линию, то диаграмма называется приводимой. Это означает, что соответствующий диаграмме оператор можно представить в виде произведения двух операторов. Остальные диаграммы называются неприводимыми. Таким образом, неприводимые диаграммы представляют собой элементарные «блоки», из которых можно составить любую диаграмму.

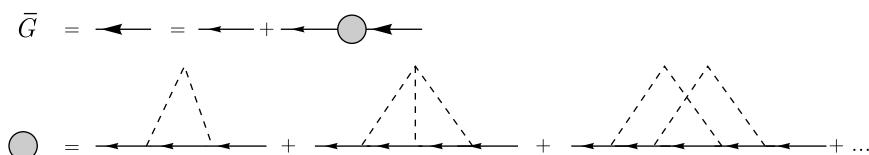


Рис. 3. Уравнение Дайсона.

6. Уравнения для средней функции Грина и среднего перемещения

Запишем последнее диаграммное уравнение в матричном виде:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ik}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') &= G_{0,ik}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') + \\ &+ \int G_{0,ij}(t, \vec{x}, t_1, \vec{x}_1) \Sigma_{jl}(t_1, \vec{x}_1, t_2, \vec{x}_2) \bar{G}_{lk}(t_2, \vec{x}_2, t', \vec{x}') dt_1 dt_2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, для перемещения в упрощенном виде получаем:

$$\overline{\vec{u}^1} = \overline{G}\vec{f}^1 = G_0\Sigma\overline{G}\vec{f}^1 + G_0\vec{f}^1 = G_0\Sigma\overline{\vec{u}^1} + G_0\vec{f}^1.$$

Домножая на G_0^{-1} , получаем:

$$G_0^{-1}\overline{\vec{u}^1} = \Sigma\overline{\vec{u}^1} + \vec{f}^1.$$

Учитывая конкретный вид оператора G_0^{-1} , уравнение можно переписать в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \overline{u_i^1}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{n,m} \overline{C}_{iknm} \frac{\partial \overline{u_n^1}}{\partial x_m} \right] + (\Sigma\overline{\vec{u}^1})_i + f_i^1.$$

Таким образом, нами получено точное уравнение для среднего значения динамического перемещения $\overline{u_i^1}$. Корреляционный оператор Σ выражается через усредненную точную функцию Грина \overline{G}_0 и корреляционные функции модуля упругости всех порядков. Выбирая в Σ конечное количество слагаемых, можно получать уравнение требуемой точности.

В квазиоднородном случае, когда характерные пространственные изменения статического поля $u_i^0(\vec{x})$ много больше длины звуковой волны, то есть характерного изменения поля $u_i^1(\vec{x}, t)$, все функции, входящие в уравнение (8), можно считать зависящими от разности координат. В этом случае с помощью преобразования Фурье $f(\omega, \vec{k}) = \int f(t, \vec{x}) \cdot e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{x}} dt d\vec{x}$ интегральное уравнение (8) сводится к алгебраическому:

$$G_{ik}(\omega, \vec{k}) = G_{0,ik}(\omega, \vec{k}) + G_{0,in}(\omega, \vec{k}) \cdot \Sigma_{nm}(\omega, \vec{k}) \cdot G_{mk}(\omega, \vec{k}),$$

или

$$(G_0^{-1} - \Sigma) \cdot G = 1.$$

Нули детерминанта матрицы $(G_0^{-1} - \Sigma)$, то есть полюса функции Грина G , определяют спектр и затухание звуковых волн $\omega = \omega_j(\vec{k})$, $j = 1, 2, 3$ в произвольной среде, анизотропия которой определяется приложенными статическими напряжениями. Частоты и затухание упругих волн являются в этом случае функциями тензора дисторсии $d_{ik} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_k}$. Эта зависимость позволяет по измеренному спектру малых колебаний определить напряженное состояние среды.

7. Заключение

Для описания нелинейной упругой среды использовалась модель Ландау–Лифшица, содержащая в изотропном случае 5 независимых констант: K — модуль сжатия, μ — модуль сдвига, A, B, C — константы в кубическом по деформациям члене в разложении энергии.

Рассмотрена случайно-неоднородная упругая среда с хаотически распределенными в ней включениями (твердыми или жидкими). В такой среде распределения K, μ, A, B, C становятся случайными функциями координат.

В работе рассматриваются как статические, так и динамические напряжения в среде. Коэффициенты уравнения для динамических деформаций зависят от корреляционных

функций параметров K, μ, A, B, C , а также содержат тензор статических приложенных деформаций. Это позволяет поставить и решить обратную задачу по определению напряжения среды через измеренные параметры волн.

Полученные результаты полезны для прогнозирования землетрясений и анализа нефтяных резервуаров с учетом горного и порового давления.

Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Ангармонические колебания // Теоретическая физика: Т. 7: Теория упругости. 4-е изд. М.: Наука, 1987. с. 144–149.
- [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.