УДК 517.911/517.93

Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения*

Л. И. Родина, Е. Л. Тонков
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), МФ
rdl@uni.udm.ru, eltonkov@udm.ru

Получено 7 ноября 2008 г.

В терминах функций Ляпунова получены условия, позволяющие оценивать относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве $\mathfrak{M}$. Если относительная частота пребывания в $\mathfrak{M}$ равна единице, то множество $\mathfrak{M}$ названо статистически инвариантным. Получены также условия, при которых $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы, т. е. для каждой начальной точки из $\mathfrak{M}$ по крайней мере одно решение управляемой системы статистически инвариантно. Найдены условия неблуждаемости множества достижимости и условия существования минимального центра притяжения.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, достижимость, инвариантность, неблуждаемость, рекуррентность

L. I. Rodina and E. L. Tonkov
Statistical characteristics of attainable set of controllable system, non-wandering, and minimal attraction center

In the terms of Lyapunov functions we obtain the conditions that allow to estimate the relative frequency of occurrence of the attainable set of a controllable system in a given set $\mathfrak{M}$. The set $\mathfrak{M}$ is called statistically invariant if the relative frequency of occurrence in $\mathfrak{M}$ is equal to one. We also derive the conditions of the statistically weak invariance of $\mathfrak{M}$ with respect to controllable system, that is, for every initial point from $\mathfrak{M}$, at least one solution of the controllable system is statistically invariant. We obtain the conditions for the attainable set to be non-wandering as well as the conditions of existence of the minimal attraction center.

Keywords: controllable systems, dynamical systems, differential inclusions, attainability, invariance, non-wandering, recurrence
Mathematical Subject Classifications: 37N30, 37N35, 49J15, 93B03

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

1. Введение

Эта работа возникла под влиянием бесед с Владимиром Николаевичем Ушаковым об инвариантных и «почти инвариантных» множествах управляемых динамических систем. Мы обсуждали вопрос о возможности корректной математической постановки свойства (представляющего интерес в приложениях), которое на неформальном языке означает примерно следующее: если заданное по условиям задачи множество $\mathfrak{M}$ не является положительно инвариантным относительно заданного потока g^t, определяемого управляемой системой, то в каком случае траектории этого потока, начинающиеся в $\mathfrak{M}$ «в основном» находятся в $\mathfrak{M}$, а если некоторые из траекторий всё же покидают $\mathfrak{M}$, то «ненадолго» и «не слишком далеко» уклоняются от него?

Одна из возможных математических постановок этой задачи состоит в подсчете относительной частоты пребывания траекторий потока g^t в множестве $\mathfrak{M}$. В таком случае уже недалеко от введения вероятностных характеристик свойства «почти постоянного пребывания» в $\mathfrak{M}$ (даже тогда, когда исходная управляемая система вполне детерминирована). Во всяком случае, если множество $\mathfrak{M}$ компактно и инвариантно относительно потока g^t, то в силу известной теоремы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1], [2, гл. 6, § 9] на фазовом пространстве соответствующей динамической системы существуют инвариантные относительно потока вероятностные меры. Поэтому, если, кроме того, множество $\mathfrak{M}$ ещё и минимально (относительно потока g^t), то, с учётом эргодической теоремы Д. Биркгофа [3] и А. Я. Хинчина [2, гл. 6, § 5], [4], вопрос о вычислении относительной частоты пребывания потока g^t в множестве $\mathfrak{M}$ сводится к доказательству пребывания траекторий в $\mathfrak{M}$ с вероятностью единица.

Исследованию инвариантных множеств управляемых систем и отвечающих им дифференциальных включений посвящено большое количество работ (см. монографию Ж.-П. Обена [5] и библиографию к ней). Условия инвариантности в этой монографии выражены в инфинитезимальных терминах (в терминах непустоты пересечения конуса Булигана к заданному множеству с множеством, задающим правую часть дифференциального включения).

Вопросам инвариантности (в различных смыслах) топологических динамических систем, отвечающих детерминированным управляемым системам, посвящена работа [6]. В работе [6] условия инвариантности заданного множества $\mathfrak{M}$ относительно потока g^t, определяемого управляемой системой, формулируются в терминах функций Ляпунова, задача которых не разрешать фазовым точкам множества $\mathfrak{M}$, двигающимся под действием потока g^t, покидать $\mathfrak{M}$.

В этой статье технику работы [6] мы распространяем на метрические динамические системы (Ω, g^t), порожденные исходной динамической системой (Σ, h^t) и заданной управляемой системой

$$\dot{x} = \int_U f(h^t\sigma, x, u)\eta_t(du),$$

а инвариантность множества $\mathfrak{M} \subseteq \Omega$ понимаем в статистическом смысле, то есть как присутствие движений $t \to g^t\omega$ в $\mathfrak{M}$ с относительной частотой, равной единице (аналогичная методика использовалась в [7], [8] при изучении условий глобальной управляемости линейных систем). Если оказывается при этом, что фазовое пространство Σ не только компактно, но и минимально относительно потока h^t, то на Σ существует по крайней мере одна эргодическая мера, т. е. инвариантная относительно потока h^t вероятностная борелевская мера ν, такая, что мера всякого инвариантного подмножества Σ_0 в Σ равна либо нулю, либо единице (поэтому если Σ_0 замкнуто, то $\Sigma_0 = \Sigma$ и $\nu(\Sigma_0) = 1$). Эта мера распространяется (с сохранением инвариантности) на расширенное фазовое пространство Ω динамической системы (Ω, g^t), отвечающей исходной управляемой системе.

Таким образом, появляется метрическая динамическая система $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, где μ — вероятностная борелевская мера на $\mathfrak{B}$, инвариантная относительно потока g^t, и в случае, когда динамическая система $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ строго эргодическая, роль вероятностной меры μ выполняет относительная частота пребывания траекторий потока g^t в заданном компактном множестве $\mathfrak{M} \subseteq \Omega$ (и тогда статистическая инвариантность $\mathfrak{M}$ относительно потока g^t означает инвариантность $\mathfrak{M}$ с вероятностью единица).

2. Управляемые системы

Введём ряд обозначений. Пусть $\mathbb{R}^m$ — стандартное евклидово пространство размерности m. Для заданного множества $U \subset \mathbb{R}^m$ обозначим $\operatorname{frm}(U)$ — пространство мер Радона с носителем в U. Если U компактно, то $\operatorname{rpm}(U)$ — подмножество в $\operatorname{frm}(U)$, состоящее из вероятностных мер Радона. Если $\eta \in \operatorname{frm}(U)$, то для всякой непрерывной функции $a : U \to \mathbb{R}$ обозначим $\langle \eta, a \rangle = \int_U a(u)\eta(du)$. На $\operatorname{frm}(U)$ определим вариацию $|\eta|(U) \doteq \sup\limits_{\|a\|_0 \leqslant 1} |\langle \eta, a \rangle|$ и (слабую) норму

$$|\eta|_w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1 + \|a_k\|_0} |\langle \eta, a_k \rangle|,$$

где функции a_k образуют счетное всюду плотное множество в пространстве $C(U, \mathbb{R})$ непрерывных функций из U в $\mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_0$. Для дальнейшего важно, что пространство $\operatorname{rpm}(U)$ метризуемо и если метрика в $\operatorname{rpm}(U)$ порождена слабой нормой на $\operatorname{frm}(\mathbb{R}^m)$, то $\operatorname{rpm}(U)$ *компактно*.

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t). Это означает, что Σ — полное метрическое пространство и при каждом t, h^t — однопараметрическая группа преобразований пространства Σ в себя, удовлетворяющая начальному условию $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$ и непрерывная по (t, σ) на $\mathbb{R} \times \Sigma$, см. [2, гл. 5], [9, с. 204–227]. Пространство Σ называется *фазовым пространством* системы (Σ, h^t), функция $t \to h^t\sigma$ — *движением* точки σ, функция $h^t\colon \Sigma \to \Sigma$ — *потоком* на Σ,

$$\operatorname{orb}(\sigma) \doteq \{h^t\sigma\colon t \in \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \operatorname{orb}_+(\sigma) \doteq \{h^t\sigma\colon t \geqslant 0\}$$

— *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ. В этой статье мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 1. Фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, h^t) компактно.

Пусть, далее, задана непрерывная функция $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая *локальному условию Липшица по переменной x равномерно относительно (σ, u) на множестве* $\Sigma \times U$, где U — заданное *компактное* множество в $\mathbb{R}^m$. Мы будем исследовать различные свойства инвариантных множеств управляемой системы

$$\dot{x} = \int_U f(h^t\sigma, x, u)\eta_t(du), \tag{2.1}$$

где η_t — *допустимое* управление. Напомним, что функция $t \to \eta_t$ называется *допустимым управлением*, если $\eta_t \in \operatorname{rpm}(U)$ при каждом t и для любой $a \in C(U, \mathbb{R})$ функция $t \to \langle \eta_t, a \rangle$ измерима по Лебегу (см. [10], [11] и библиографию в [11]).

Будем предполагать далее, что выполнено следующее условие.

Условие 2. Непрерывная функция $f : \Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, задающая систему (2.1), локально липшицева по x равномерно относительно (σ, u) на $\Sigma\times U$, а множество U компактно в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $\Sigma = \mathbb{T}^r = S\times \ldots \times S$ — тор размерности r (прямое произведение r экземпляров окружности S радиуса единица), h^t — всюду плотная обмотка тора, её можно задать системой дифференциальных уравнений на торе

$$\dot\varphi_i = \omega_i, \quad \varphi_i(0) = \sigma_i, \quad i = 1\ldots r,$$

где $\omega = (\omega_1 \ldots \omega_r)$ — вектор частот с *рационально независимыми* координатами (то есть $k_1\omega_1 + \cdots + k_r\omega_r \neq 0$ для любого нетривиального набора целых чисел $k_1 \ldots k_r$). Тогда $h^t\sigma = (\omega_1 t+\sigma_1 \ldots \omega_r t+\sigma_r) \pmod{2\pi}$ и при каждом $\sigma \in \mathbb{T}^r$ управляемая система (2.1) становится системой с *условно периодической* по t правой частью.

Пример 2. $\Sigma = M$, где M — гладкое компактное многообразие размерности r (см. [12, гл. 5, § 33]), h^t — поток на M, заданный системой дифференциальных уравнений

$$\dot z = v(z), \quad z \in M, \quad v(z) \in T_zM, \tag{2.2}$$

где T_zM — пространство, касательное к M в точке $z \in M$, $v\colon M \to TM$ — дифференцируемая функция, TM — касательное расслоение многообразия M.

Тогда для любого начального условия $z_0 \in M$ решение $z(t, z_0)$ системы (2.2) с условием $z(0) = z_0$ определено на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, единственно и непрерывно зависит от точки (t, z_0). В этом случае управляемая система (2.1) задаётся *треугольной* системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot z = v(z), \\ \dot x = \displaystyle\int_U f(z, x, u)\eta_t(du). \end{cases}$$

Пример 3. Если Σ — минимальное (относительно потока h^t) компактное пространство, то, в силу теоремы Д. Биркгофа [2, гл. 5. § 7], [3], всякое движение $t \to h^t\sigma$ в Σ *рекуррентно* (то есть траектория всякого движения в Σ аппроксимируется с любой степенью точности отрезком этой траектории достаточно большой длины).

В этом случае для каждого $\sigma \in \Sigma$ управляемая система (2.1) рекуррентна по t равномерно относительно (x, u) на компактах $Q \doteq K\times U \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$: для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта Q множество

$$\ell(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon \underset{|t|\leqslant\varepsilon^{-1},\,(x,u)\in Q}{\text{maximum}} |f(h^{t+\tau}\sigma, x, u) - f(h^t\sigma, x, u)| \leqslant \varepsilon\}$$

ε-почти периодов функции $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ не зависит от Q и относительно плотно на $\mathbb{R}$ (то есть найдётся такое $\vartheta = \vartheta(\varepsilon) > 0$, что множество $\ell(\varepsilon)$ имеет непустое пересечение с любым отрезком $[t_0, t_0 + \vartheta]$ длины ϑ).

Далее, если в Σ существует по крайней мере одно *почти периодическое* (в смысле Бора) движение, то всякое движение в Σ почти периодично [2, с. 415], и тогда система (2.1) почти периодична по времени.

Пример 4. Пусть фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, h^t) компактно. Тогда, в силу уже упомянутой теоремы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, на борелевской сигма-алгебре $\mathfrak{A}$ пространства Σ существует по крайней мере одна вероятностная мера ν, инвариантная относительно потока h^t, и мы имеем метрическую динамическую систему $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. В этом случае функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ задаёт *стационарный* (в узком смысле) *случайный процесс* и тем самым управляемая система (2.1) становится системой со случайными параметрами.

Пример 5. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \int_U \phi(t, x, u)\eta_t(du), \tag{2.3}$$

в предположении, что множество U компактно, а функция $\phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных, ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при любых фиксированных (x, u) и удовлетворяет следующим двум условиям.

Условие равномерной непрерывности по t. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $(x, u) \in K \times U$ из неравенства $|\tau| \leqslant \delta$ следует неравенство

$$|\phi(t + \tau, x, u) - \phi(t, x, u)| \leqslant \varepsilon.$$

Условие локальной липшицевости по x. Для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $u \in U$ найдётся такая константа ℓ, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in K$ выполнено неравенство

$$|\phi(t, x_1, u) - \phi(t, x_2, u)| \leqslant \ell |x_1 - x_2|.$$

По функции ϕ, задающей систему (2.3), построим замыкание $\mathcal{R}(\phi)$ множества сдвигов $\{\phi_\tau\}$, $\phi_\tau(t, x, u) = \phi(t + \tau, x, u)$, функции ϕ в *топологии равномерной сходимости на компактах.* Это означает, что $\widehat{\phi} \in \mathcal{R}(\phi)$ в том и только в том случае, если существует такая последовательность $\{t_i\}$ моментов времени, что для любого $\varepsilon > 0$ и всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ начиная с некоторого i_0 при всех t, удовлетворяющих неравенству $|t| \leqslant \varepsilon^{-1}$, и всех $(x, u) \in K \times U$ выполнено неравенство

$$|\widehat{\phi}(t, x, u) - \phi_{t_i}(t, x, u)| \leqslant \varepsilon, \quad i \geqslant i_0.$$

Можно показать, что при высказанных выше предположениях пространство $\mathcal{R}(\phi)$ метризуемо и в метрике Бебутова

$$\rho(\phi^1, \phi^2) \doteq \sup_{\vartheta > 0} \min\Big\{ \operatorname*{maximum}_{|t|, |x|, |u| \leqslant \vartheta} |\phi^1(t, x, u) - \phi^2(t, x, u)|\,,\, \vartheta^{-1} \Big\}, \quad \phi^1, \phi^2 \in \mathcal{R}(\phi),$$

компактно [2, с. 533], [13]. Для этого достаточно показать, что сходимость в метрике Бебутова эквивалентна сходимости, равномерной на компактах. Покажем это.

Лемма 1. *Неравенство $\rho(\phi^1, \phi^2) \leqslant \varepsilon$ выполнено в том и только в том случае, если $|\phi^1(t, x, u) - \phi^2(t, x, u)| \leqslant \varepsilon$ для всех $|t|, |x|, |u| \leqslant \varepsilon^{-1}$.*

Доказательство. Отметим, что функция

$$f_1(\vartheta) = \operatorname*{maximum}_{|t|, |x|, |u| \leqslant \vartheta} |\phi^1(t, x, u) - \phi^2(t, x, u)|$$

не убывает, а функция $f_2(\vartheta) = \vartheta^{-1}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$ и стремится к нулю при $\vartheta \to +\infty$. Поэтому если $f_1(\vartheta) \not\equiv 0$, то существует ровно одна точка $\vartheta_0 > 0$, такая, что выполнено равенство $f_1(\vartheta_0) = f_2(\vartheta_0)$ и, следовательно, $\rho(\phi^1, \phi^2) = \vartheta_0^{-1}$. Пусть выполнено неравенство $\rho(\phi^1, \phi^2) \leqslant \varepsilon$, тогда $\vartheta_0^{-1} \leqslant \varepsilon$, и поэтому $f_1(\vartheta) \leqslant \varepsilon$ при всех $\vartheta \leqslant \varepsilon^{-1}$, в том числе и при $\vartheta = \varepsilon^{-1}$. Таким образом, для любых $|t|, |x|, |u| \leqslant \varepsilon^{-1}$ выполнено неравенство $|\phi^1(t,x,u) - \phi^2(t,x,u)| \leqslant \varepsilon$.

Верно и обратное: если $|\phi^1(t,x,u) - \phi^2(t,x,u)| \leqslant \varepsilon$ для любых $|t|, |x|, |u| \leqslant \varepsilon^{-1}$, то $f_1(\vartheta) \leqslant \varepsilon$ при всех $\vartheta \leqslant \varepsilon^{-1}$, а $f_2(\vartheta) \leqslant \varepsilon$ при всех $\vartheta \geqslant \varepsilon^{-1}$, и поэтому $\rho(\phi^1, \phi^2) \leqslant \varepsilon$. ■

Таким образом, по заданной системе (2.3) мы построили семейство управляемых систем

$$\dot{x} = \int_U \widehat{\phi}(t,x,u)\eta_t(du), \quad \widehat{\phi} \in \mathcal{R}(\phi). \tag{2.4}$$

Переходя теперь к привычным обозначениям

$$\Sigma = \mathcal{R}(\phi), \quad \sigma = \widehat{\phi}, \quad h^\tau\sigma = \widehat{\phi}_\tau, \quad f(\sigma,x,u) = \widehat{\phi}(0,x,u)$$

и замечая, что $f(h^t\sigma, x, u)$ совпадает с $\widehat{\phi}(t,x,u)$, а пара (Σ, h^t) порождает топологическую динамическую систему (динамическую систему сдвигов А. А. Маркова [2, гл. 6, § 9]), перепишем семейство (2.4) в виде (2.1). Это семейство возникает естественным образом при исследовании асимптотических свойств множества достижимости и допустимых процессов системы (2.3). В частности, можно убедиться, что если некоторое свойство системы (2.3) выполнено равномерно относительно начального момента t_0, то соответствующее свойство для семейства (2.4) выполнено при всех $\sigma \in \Sigma$.

3. Управляемые системы и дифференциальные включения

Системе (2.1) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \mathrm{co}\{y \in \mathbb{R}^n \colon y = f(\sigma,x,u),\, u \in U\}, \tag{3.1}$$

где $\mathrm{co}\, G$ — замыкание выпуклой оболочки множества G, и по динамической системе (Σ, h^t) и включению (3.1) построим метрическое пространство $\Omega = \Sigma \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа

$$\mathrm{dist}(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\},$$

где $d(A,B)$ — *полуотклонение* множества A от множества $B : d(A,B) \doteq \max\limits_{a \in A} \varrho(a, B)$.

Пусть $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$; обозначим далее $A(t,\omega)$ — сечение в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* включения (3.1), когда начальное состояние $x(0)$ пробегает всё X.

Определение 1. Множество $A(t,\omega)$ называется *множеством достижимости* управляемой системы (2.1) в момент времени t из начального множества X.

В силу высказанных ранее условий 1, 2, которые мы предполагаем выполненными в этой статье, и результатов работ [14], [15], имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Найдётся такое $\varepsilon > 0$, что при всех $t \in [0, \varepsilon)$ множество достижимости $A(t, \omega)$ управляемой системы* (2.1) *существует. Оно компактно при каждом t и непрерывно по (t, ω). Кроме того, при всех допустимых t и s множество достижимости $A(t, \omega)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$A(t,\omega)\big|_{t=0} = X \quad \text{и} \quad A(t+s,\omega) = A\big(t, h^s\sigma, A(s,\omega)\big).$$

С учётом этой леммы и при дополнительном предположении, что каждое решение включения (3.1) определено при всех $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$, функция $g^t : \Omega \to \Omega$, заданная равенством $g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t,\omega)\big)$, как несложно проверить, порождает полупоток на Ω и, следовательно, пара (Ω, g^t) образует топологическую динамическую систему. Эта динамическая система служит *расширением* (см. [9]) исходной динамической системы (Σ, h^t) в том смысле, что существует непрерывная проекция p пространства Ω на Σ, сопрягающая потоки (то есть $p(\Omega) = \Sigma$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\ p\ } & \Sigma \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g^t} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h^t} \\ \Omega & \xrightarrow{\ p\ } & \Sigma \end{array}$$

коммутативна: $pg^t = h^tp$).

Пример 6. Вернёмся к примеру 5. Для семейства управляемых систем (2.4), отвечающего исходной управляемой системе (2.3), соответствующее семейство дифференциальных включений можно построить следующим образом: если последовательность $\{\tau_i\}$ обеспечивает сходимость $\phi_{\tau_i} \to \widehat{\phi}$ в том смысле, как это указано в примере 5, то несложно доказывается, что найдется такая подпоследовательность (обозначим её снова $\{\tau_i\}$), что последовательность сдвигов $\{\varPhi_{\tau_i}\}$, где $\varPhi(t,x) = \operatorname{co}\phi(t,x,U)$, $\varPhi_\tau(t,x) = \varPhi(t+\tau,x)$, имеет предел, понимаемый в смысле метрики Бебутова

$$\rho(\varPhi, \varPhi^0) \doteq \sup_{\vartheta>0} \min\Big\{ \max_{|t|,|x|\leqslant\vartheta} \operatorname{dist}\big(\varPhi(t,x), \varPhi^0(t,x)\big),\ \vartheta^{-1}\Big\}.$$

Обозначим этот предел $\widehat{\varPhi}(t,x)$. Тогда системе (2.4) отвечают дифференциальное включение $\dot{x} \in \widehat{\varPhi}(t,x)$ и множество достижимости $A(t,\widehat{\phi},X)$ в момент времени t системы (2.4) из множества X в момент времени $t = 0$. Можно проверить, что множество достижимости удовлетворяет условиям леммы 2: оно *компактно при каждом t, непрерывно по $(t,\widehat{\phi},X)$, удовлетворяет начальному условию $A(t,\widehat{\phi},X)\big|_{t=0} = X$ и равенству*

$$A(t+s,\widehat{\phi},X) = A\big(t, \widehat{\phi}_s, A(s,\widehat{\phi},X)\big)$$

при всех допустимых t и s.

4. Функции А. М. Ляпунова

Пусть задана непрерывная функция $\mathbb{A} : \mathbb{R} \times \Omega \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ переменных (t,ω), где $\omega = (\sigma, X)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\mathbb{A}(t,\omega)\big|_{t=0} = X, \quad \mathbb{A}(t+s,\omega) = \mathbb{A}\big(t, h^s\sigma, \mathbb{A}(s,\omega)\big) = \mathbb{A}\big(t, g^s\omega\big), \quad t,s \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

В частности, в качестве $\mathbb{A}$ может выступать интегральная воронка вспомогательного дифференциального включения $\dot{x} \in G(h^t\sigma, x)$, играющего роль *включения сравнения.*

Введём следующие обозначения:

$$\mathfrak{A}(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\colon\ x \in \mathbb{A}(t,\omega_0)\big\}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0), \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{A}^r(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\colon\ \rho_{_{\mathbb{R}^n}}\big(x, \mathbb{A}(t,\omega_0)\big) \leqslant r(t,\sigma)\big\}, \quad \mathfrak{B}^r(\sigma) \doteq \mathfrak{A}^r(\sigma) \setminus \mathfrak{A}(\sigma),$$

где $r(t,\sigma)$ — неотрицательная непрерывная функция переменных $(t,\sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma$.

Определение 2. Скалярную функцию $V(t,\sigma,x)$ переменных (t,σ,x) будем называть *функцией Ляпунова* (в области $\mathfrak{A}^r(\sigma)$), если она локально липшицева по (t,x) равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$ и для каждого $\sigma \in \Sigma$ выполнены следующие условия:
1) $V(t,\sigma,x) \leqslant 0$ при всех $(t,x) \in \mathfrak{A}(\sigma)$;
2) $V(t,\sigma,x) = 0$ для каждой точки (t,x) на границе множества $\mathfrak{A}(\sigma)$;
3) $V(t,\sigma,x) > 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{B}^r(\sigma)$.

Например, функция $V(t,\sigma,x) = \rho(x,\mathbb{A}(t,\omega))$, где $\rho(x,A) = \min\limits_{a\in A}|x-a|$ — расстояние от точки x до множества A, может служить функцией Ляпунова.

Определение 3. Для локально липшицевой функции $V(t,\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке (t,x) по направлению вектора $(1,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка, см. [16]) будем называть следующий верхний предел

$$V^o(t,\sigma,x;q) \doteq \limsup_{(\tau,y,\varepsilon)\to(t,x,+0)} \frac{V(\tau+\varepsilon,\sigma,y+\varepsilon q) - V(\tau,\sigma,y)}{\varepsilon}, \tag{4.3}$$

а выражения

$$V^o_{\min}(t,\sigma,x) \doteq \min_{q\in F(h^t\sigma,x)} V^o(t,\sigma,x;q), \quad V^o_{\max}(t,\sigma,x) \doteq \max_{q\in F(h^t\sigma,x)} V^o(t,\sigma,x;q)$$

— *нижней и верхней производной* функции V в силу включения (3.1).

Лемма 3. *Имеют место следующие равенства:*

$$V^o_{\min}(t,\sigma,x) = \min_{u\in U} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u)\big), \quad V^o_{\max}(t,\sigma,x) = \max_{u\in U} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u)\big). \tag{4.4}$$

Доказательство. Отметим, что функция $q \to V^o(t,\sigma,x;q)$ локально липшицева, субаддитивна и положительно однородна (см. [16], с. 32), т. е. если $\lambda \geqslant 0$, то

$$V^o(t,\sigma,x;\lambda q) = \lambda V^o(t,\sigma,x;q) \quad \text{и} \quad V^o(t,\sigma,x;q+p) \leqslant V^o(t,\sigma,x;q) + V^o(t,\sigma,x;p).$$

Кроме того, в силу известной теоремы Каратеодори, всякая точка q множества

$$F(h^t\sigma,x) \doteq \operatorname{co} f(h^t\sigma,x,U)$$

представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точек множества $f(h^t\sigma,x,U)$:

$$q = \lambda_1 f(h^t\sigma,x,u_1) + \ldots + \lambda_{n+1} f(h^t\sigma,x,u_{n+1}), \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1.$$

Поэтому, если $\widehat{u}$ выбрано из условия максимума

$$\max_{u\in U} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u)\big) = V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big),$$

для всех $q \in F(h^t\sigma, x)$ имеем:

$$V^o(t,\sigma,x;q) = V^o\big(t,\sigma,x;\lambda_1 f(h^t\sigma,x,u_1) + \ldots + \lambda_{n+1} f\big(h^t\sigma,x,u_{n+1})\big) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u_1)\big) + \ldots + \lambda_{n+1} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u_{n+1})\big) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big) + \ldots + \lambda_{n+1} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big) = V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big),$$

что и доказывает второе равенство в (4.4).

Докажем первое равенство в (4.4). Пусть

$$\widehat{q} = \widehat{\lambda}_1 f(h^t\sigma,x,\widehat{u}_1) + \cdots + \widehat{\lambda}_{n+1} f(h^t\sigma,x,\widehat{u}_{n+1})$$

— точка множества $F(h^t\sigma,x)$, в которой $V^o(t,\sigma,x;q)$ достигает своего минимума; $\widehat{u}$ — точка множества U, в которой минимума достигает $V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u)\big)$. Тогда из включения $f(h^t\sigma,x,\widehat{u}) \in F(h^t\sigma,x)$ следует неравенство

$$V^o_{\min}(t,\sigma,x) \leqslant V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big). \tag{4.5}$$

Далее, записав $f(h^t\sigma,x,\widehat{u})$ в виде

$$f(h^t\sigma,x,\widehat{u}) = \widehat{\lambda}_1 f(h^t\sigma,x,\widehat{u}) + \cdots + \widehat{\lambda}_{n+1} f(h^t\sigma,x,\widehat{u}),$$

получим очевидную цепочку равенств и неравенств

$$\min_{u\in U} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u)\big) = V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big) =$$
$$= V^o\big(t,\sigma,x;\widehat{\lambda}_1 f(h^t\sigma,x,\widehat{u}) + \cdots + \widehat{\lambda}_{n+1} f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big) =$$
$$= \widehat{\lambda}_1 V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big) + \cdots + \widehat{\lambda}_{n+1} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big) \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{\lambda}_1 V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u}_1)\big) + \cdots + \widehat{\lambda}_{n+1} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u}_{n+1})\big) = \min_{q\in F(h^t\sigma,x)} V^o(t,\sigma,x;q).$$

Следовательно, $V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,\widehat{u})\big) \leqslant V^o_{\min}(t,\sigma,x)$, что, в сочетании с неравенством (4.5), приводит к равенству $V^o_{\min}(t,\sigma,x) = \min\limits_{u\in U} V^o\big(t,\sigma,x;f(h^t\sigma,x,u)\big)$. ∎

5. Теорема об относительной частоте поглощения

Определение 4. Фиксируем $X_0 \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и для каждого $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и всех σ введём в рассмотрение характеристику

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t,\omega_0)\}}{\vartheta}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0), \tag{5.1}$$

которую, в предположении, что указанный в (5.1) предел существует, будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (2.1) заданным множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$. Если предел (5.1) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t,\omega_0)\}}{\vartheta}, \tag{5.2}$$

$$\operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t,\omega_0)\}}{\vartheta}, \tag{5.3}$$

будем называть, соответственно, *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (2.1) заданным множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$.

Для формулировки следующей леммы обозначим

$$\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega) \doteq \{t \in [\vartheta_0,\vartheta]\colon\ A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t,\omega_0)\}. \tag{5.4}$$

Лемма 4. *Если $\omega = (\sigma, X)$, X компактно, $\vartheta_0 \geqslant 0$ и $A(\vartheta_0,\omega) \subseteq \mathbb{A}(\vartheta_0,\omega_0)$, то имеют место следующие утверждения.*

1. *Множество* (5.4) *непусто и измеримо по Лебегу при каждом $\vartheta \geqslant \vartheta_0$.*
2. *Для любых фиксированных $\vartheta_0 \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$ имеют место равенства*

$$\operatorname{freq}^*(\omega) = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \tag{5.5}$$

$$\operatorname{freq}_*(\omega) = \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0} = \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}. \tag{5.6}$$

3. *Каждая из характеристик* $\operatorname{freq}^*(\omega)$, $\operatorname{freq}_*(\omega)$ *постоянна на положительных полутраекториях динамической системы* (Ω, g^t) : *для всех* $\tau \geqslant 0$

$$\operatorname{freq}^*(g^\tau\omega) = \operatorname{freq}^*(\omega), \quad \operatorname{freq}_*(g^\tau\omega) = \operatorname{freq}_*(\omega).$$

4. *Если функции $t \to A(t,\omega)$ и $t \to \mathbb{A}(t,\omega_0)$ периодичны с общим периодом $T > 0$, то предел* (5.1) *существует и* $\operatorname{freq}(\omega) = \dfrac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T}$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения леммы достаточно показать, что множество $\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)$, определённое равенством (5.4), замкнуто. Докажем замкнутость.

Пусть последовательность $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $t_i \in [\vartheta_0,\vartheta]$, $t_i \to t_*$ и вложения $A(t_i,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t_i,\omega_0)$ имеют место при всех $i = 1, 2, \ldots$. Тогда, в силу непрерывности (в метрике Хаусдорфа) функции $t \to \mathbb{A}(t,\omega_0)$, найдётся такая последовательность $\{\varepsilon_i\}$, что $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$ и $\mathbb{A}(t_i,\omega_0) \subseteq \mathbb{A}(t_*,\omega_0) + O_{\varepsilon_i}$, где O_ε — замкнутая ε-окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$. Поэтому вложения $A(t_i,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t_*,\omega_0) + O_{\varepsilon_i}$ выполнены при всех i. Далее, из непрерывности $A(t,\omega)$ по t и замкнутости $\mathbb{A}(t_*,\omega_0)$, имеем вложение $A(t_*,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t_*,\omega_0)$. Следовательно, $t_* \in \alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)$.

Для доказательства второго утверждения отметим, что имеют место следующие простые равенства:

$$\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega) = \operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta_0,\omega) + \operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega), \quad \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta_0,\omega)}{\vartheta} = 0.$$

Поэтому, в силу свойств верхнего предела

$$\begin{aligned}\operatorname{freq}^*(\omega) = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} &= \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta_0,\omega)}{\vartheta} + \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \\ &= 0 + \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta} \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0},\end{aligned}$$

что доказывает первое равенство в (5.2). Доказательство второго равенства в (5.2) следует из равенства

$$\alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)=\{s\in[0,\vartheta]:A(s+\tau,\omega)\subseteq\mathbb{A}(s+\tau,\omega_0)\}=$$
$$=\{t\in[0,\vartheta]:A(t,g^\tau\omega)\subseteq\mathbb{A}(t,g^\tau\omega_0)\}=\alpha(0,\vartheta,g^\tau\omega).$$

Аналогично доказываются равенства (5.3).

Доказательства утверждений о стационарности верхней и нижней относительной частоты поглощения на полутраекториях динамической системы (Ω,g^t) непосредственно следуют из второго утверждения леммы. Действительно, например для верхней частоты имеем:

$$\operatorname{freq}^*(g^\tau\omega)=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,g^\tau\omega)}{\vartheta}=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}=\operatorname{freq}^*(\omega).$$

Докажем последнее утверждение леммы. Пусть сначала $\vartheta=kT$, тогда

$$\operatorname{mes}\alpha(0,kT,\omega)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{mes}\alpha\big((i-1)T,iT,\omega\big)=k\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega),$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,kT,\omega)}{kT}=\lim_{k\to\infty}\frac{k\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{kT}=\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T}.$$

Далее, для произвольного $\vartheta>0$ найдётся такое целое $k=k(\vartheta)$, что $(k-1)T<\vartheta\leqslant kT$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k-1)\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{kT}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,(k-1)T,\omega)}{kT}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}\leqslant\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,kT,\omega)}{\vartheta}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{k\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{(k-1)T}=\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T},$$

что и доказывает последнее утверждение леммы. ■

Формулируемая ниже теорема содержит достаточно общие условия (в терминах функций Ляпунова и дифференциальных неравенств), позволяющие оценивать снизу верхнюю и нижнюю частоту пребывания множества достижимости управляемой системы (2.1) в заданном множестве. В частности, из этой теоремы следуют достаточные условия положительной инвариантности множества $\mathbb{A}(t,\omega)$, дополняющие результаты работы [6].

Предварительно напомним, что *верхним решением* скалярной задачи Коши

$$\dot z=w(t,z),\quad z(0)=z_0,$$

называется такое решение $z^*(t)$, что для любого другого решения $z(t)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t)\geqslant z(t)$. Если правая часть $w(t,z)$ непрерывна, то верхнее решение существует [17], [18, с. 38]. Аналогично определяется нижнее решение, которое тоже существует.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2, *функция* $\mathbb{A}$ *удовлетворяет условиям* (4.1), *фиксированы множество* $X_0\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, *компактное множество* $X\subseteq X_0$ *и множество достижимости* $A(t,\omega)$ *системы* (2.1), *где* $\omega=(\sigma,X)$. *Пусть, далее, существуют непрерывные скалярные функции* $V(t,\sigma,x)$ *и* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(t,\sigma,x)\in\mathbb{R}_+\times\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *и* $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$, *такие, что:*

1. *Для каждого σ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи*

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0)=0, \quad t \geqslant 0, \tag{5.7}$$

определено при всех $t \geqslant 0$.

2. *Для каждого σ в области $\mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$, где $r(t,\sigma) \doteq \max\{z^*(t,\sigma),0\}$, функция $V(t,\sigma,x)$ является функцией Ляпунова, и при всех $(t,x)\in\mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(t,\sigma,x) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t,\sigma,x)\big). \tag{5.8}$$

Тогда множество достижимости $A(t,\omega)$ существует для всех $t\geqslant 0$ и для каждого $\sigma\in\Sigma$ верхняя и нижняя относительная частота поглощения множества $A(t,\omega)$ множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$ удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \geqslant \varkappa^*(\sigma), \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \geqslant \varkappa_*(\sigma), \tag{5.9}$$

где $\omega_0 = (\sigma, X_0)$,

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}, \ \varkappa_*(\sigma) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}. \tag{5.10}$$

Замечание 1. Характеристики $\varkappa^*(\sigma)$ и $\varkappa_*(\sigma)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам верхней и нижней относительной частоты поглощения (см. лемму 4):
1) множество $\beta(\vartheta_0,\vartheta_1,\sigma) \doteq \{t\in[\vartheta_0,\vartheta_1] : z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}$ измеримо по Лебегу;
2) если первый предел в (5.10) существует, то для любых фиксированных $\vartheta_0\geqslant 0$ и $\tau\geqslant 0$ существуют пределы

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\beta(\vartheta_0,\vartheta,\sigma)}{\vartheta-\vartheta_0}, \quad \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\beta(\tau,\tau+\vartheta,\sigma)}{\vartheta}$$

и имеют место равенства

$$\varkappa^*(\sigma) = \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\beta(\vartheta_0,\vartheta,\sigma)}{\vartheta-\vartheta_0} = \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\beta(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta},$$

аналогичные свойства выполнены и для $\varkappa_*(\sigma)$;
3) для каждого $\tau\geqslant 0$ имеют место равенства $\varkappa^*(h^\tau\sigma)=\varkappa^*(\sigma)$, $\varkappa_*(h^\tau\sigma)=\varkappa_*(\sigma)$;
4) если решение $z^*(t,\sigma)$ периодично по t с периодом T, то $\varkappa^*(\sigma)=\varkappa_*(\sigma)=\dfrac{\operatorname{mes}\beta(0,T,\sigma)}{T}$.

Доказательства этих утверждений повторяют доказательство леммы 4.

Следующее утверджение аналогично теореме 1 работы [6], в которой роль $\mathbb{A}(t,\omega_0)$ выполняет множество $M(h^t\sigma)$, заданное непрерывной функцией $M\colon \Sigma\to\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 1. *Если выполнены условия 1 и 2 и верхнее решение задачи (5.7) тождественно равно нулю, то для всякого компактного $X\subseteq X_0$ и любого $\sigma\in\Sigma$ множество достижимости $A(t,\omega)$ определено при всех $t\geqslant 0$ и $A(t,\omega)$ поглощается множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$ при каждом $t\geqslant 0$.*

В другой терминологии это свойство называется *положительной инвариантностью* (при каждом σ) множества $\mathfrak{A}(\sigma)$ относительно решений включения (3.1).

Пример 7. Пусть U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, такое, что $0 \in U$. Пусть, далее, задана функция $\phi(t,x,u)$ переменных $(t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям примера 5. Множество достижимости системы

$$\dot{x} = \int_U \phi(t,x,u)\eta_t(du) \tag{5.11}$$

из начальной точки $x_0 = 0$ в момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$ обозначим $A(t,t_0)$, $t \geqslant t_0$.

Пусть, кроме того, для каждого t задано множество

$$\mathbb{A}(t) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x^*Q(t)x \leqslant r^2(t)\big\}, \tag{5.12}$$

где $Q(t)$ и $r(t)$ — квадратная матрица и скалярная функция, причём $Q(t)$ симметрична и определенно положительная, а $r(t) \geqslant 0$. Будем предполагать, кроме того, что Q и r ограничены на числовой прямой $\mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемы и производные $\dot{Q}$, $\dot{r}$ тоже ограничены на $\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $V(t,x) = x^*Q(t)x - r^2(t)$. Как легко убедиться, V является функцией Ляпунова относительно множества (5.12) и при каждом $q \in \mathbb{R}^n$ производная V по направлению $(1,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$V^o(t,x;q) = x^*\dot{Q}(t)x - 2r(t)\dot{r}(t) + 2x^*Q(t)q.$$

Поэтому, с учётом леммы 3, верхняя производная в силу включения

$$\dot{x} \in \varPhi(t,x), \quad \varPhi(t,x) = \mathrm{co}\{\phi(t,x,u)\colon\ u \in U\},$$

определяется равенством

$$V^o_{\max}(t,x) = x^*\dot{Q}(t)x - 2r(t)\dot{r}(t) + 2x^*Q(t)\phi\big(t,x,u_+(t,x)\big), \tag{5.13}$$

где $u_+(t,x)$ удовлетворяет условию максимума

$$\max_{u\in U} x^*Q(t)\phi\big(t,x,u\big) = x^*Q(t)\phi\big(t,x,u_+(t,x)\big).$$

Пусть Q и r постоянны, тогда из равенства (5.13) следует равенство

$$V^o_{\max}(t,x) = 2x^*Q\phi\big(t,x,u_+(t,x)\big),$$

и поэтому если найдутся число $\gamma > r$, функция $\alpha(t)$ и константа β, такие, что при всех x из окрестности $\mathbb{A}^\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x^*Qx \leqslant \gamma^2\}$ множества $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x^*Qx \leqslant r^2\}$ и всех t выполнено неравенство

$$\max_{u\in U} x^*Q\phi\big(t,x,u\big) \leqslant \alpha(t)(x^*Qx - \beta), \tag{5.14}$$

то, как несложно убедиться, неравенство (5.8) теоремы 1 выполнено для функции

$$w(t,z) = 2\alpha(t)(z + r^2 - \beta).$$

Поэтому единственное решение задачи $\dot{z} = w(t,z)$, $z(0) = 0$ имеет вид

$$z(t) = (\beta - r^2)\Big(1 - \exp\big(2\int_0^t \alpha(s)ds\big)\Big).$$

Следовательно, в силу теоремы 1 и леммы 4, *множество достижимости* $A(t,t_0)$ *системы* (5.11) *существует для всех* $t \geqslant t_0$, *относительная частота поглощения*

$$\mathrm{freq}^*(A,\mathbb{A}) \doteq \lim_{\vartheta\to 0}\frac{\mathrm{mes}\{t\in[t_0,t_0+\vartheta]\colon\ A(t,t_0)\subseteq\mathbb{A}\}}{\vartheta}$$

множества $A(t,t_0)$ *множеством* $\mathbb{A}$ *не зависит от* t_0 *и если* $r^2>\beta$, *то выполнено неравенство* $\mathrm{freq}^*(A,\mathbb{A})\geqslant\varkappa_-$, *где*

$$\varkappa_- \doteq \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{1}{\vartheta}\mathrm{mes}\Big\{t\in[0,\vartheta]:\int_0^t\alpha(s)ds\leqslant 0\Big\}. \tag{5.15}$$

Далее, если $r^2<\beta$, *то выполнено неравенство* $\mathrm{freq}^*(A,\mathbb{A})\geqslant\varkappa_+$, *где*

$$\varkappa_+ \doteq \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{1}{\vartheta}\mathrm{mes}\Big\{t\in[0,\vartheta]:\int_0^t\alpha(s)ds\geqslant 0\Big\}. \tag{5.16}$$

Наконец, если $r^2=\beta$, *то* $A(t,t_0)$ *поглощается множеством* $\mathbb{A}$ *при всех* $t\geqslant t_0$.

6. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 5 (эта лемма аналогична лемме 3 работы [6]). *Пусть* $\varphi(t,\sigma)$ *— одно из решений включения* (3.1), *такое, что* $\varphi(0,\sigma)\in X$ *и функция* $V(t,\sigma,x)$ *локально липшицева по* (t,x) *равномерно относительно* $\sigma\in\Sigma$. *Тогда функция* $t\to v(t)\doteq V(t,\sigma,\varphi(t,\sigma))$ *локально липшицева для всех таких* $t\geqslant 0$, *при которых* $\big(t,\varphi(t,\sigma)\big)\in\mathfrak{A}^r(\sigma)$.

Доказательство. Пусть $\vartheta>0$ и $\big(t,\varphi(t,\sigma)\big)\in\mathfrak{A}^r(\sigma)$ при $|t|\leqslant\vartheta$. Тогда при всех $t,t+$ $+\tau\in[-\vartheta,\vartheta]$ имеем:

$$|v(t+\tau)-v(t)| = |V\big(t+\tau,\sigma,\varphi(t+\tau,\sigma)\big)-V\big(t,\sigma,\varphi(t,\sigma)\big)| \leqslant \ell\big(|\tau|+|\varphi(t+\tau,\sigma)-\varphi(t,\sigma)|\,\big) \leqslant$$
$$\leqslant \ell\Big(|\tau|+\Big|\int_t^{t+\tau}\dot\varphi(s,\sigma)\,ds\Big|\,\Big) \leqslant \ell\Big(|\tau|+\Big|\int_t^{t+\tau}\big|F\big(h^s\sigma,\varphi(s,\sigma)\big)\big|\,ds\Big|\,\Big) \leqslant \ell(|\tau|+k|\tau|) = \ell(1+k)|\tau|,$$

где ℓ — константа Липшица, а константа k мажорирует $\big|F(\sigma,x)\big|$; ℓ и k не зависят от σ. ∎

Лемма 6 (дополнение леммы 5 работы [6]). *Пусть функция* $V(t,\sigma,x)$ *локально липшицева по* (t,x) *равномерно относительно* σ *и* $\varphi(t,\sigma)$ *— решение включения* (3.1). *Тогда в точках дифференцируемости функции* $v(t)\doteq V\big(t,\sigma,\varphi(t,\sigma)\big)$ *выполнены неравенства*

$$V^o_{\min}\big(t,\sigma,\varphi(t,\sigma)\big)\leqslant\dot v(t)\leqslant V^o_{\max}\big(t,\sigma,\varphi(t,\sigma)\big).$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi(t,\sigma)$— произвольное решение включения (3.1), такое, что $\varphi(0,\sigma)\in X$. Допустим, что это решение не может быть продолжено на полуось $\mathbb{R}_+$. Тогда точка $\big(t,\varphi(t,\sigma)\big)$ должна покинуть множество $\mathfrak{A}^r(\sigma)$ за конечное время. Следовательно, существует момент времени t_0, такой, что $\big(t,\varphi(t,\sigma)\big)\in\mathfrak{A}^r(\sigma)$ при $t\in[0,t_0]$, $\big(t_0,\varphi(t_0,\sigma)\big)\in\partial\,\mathfrak{A}^r(\sigma)$, и для всякого $\delta>0$ найдется такой момент времени $t_1\in(t_0,t_0+\delta)$, что $\big(t_1,\varphi(t_1,\sigma)\big)\notin\mathfrak{A}^r(\sigma)$. Здесь $\partial\,\mathfrak{A}$— граница множества $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим функцию $v(t)=V(t,\sigma,\varphi(t,\sigma))$. Из условия локальной липшицевости функции Ляпунова и леммы 5 следует (в силу теоремы Радемахера), что $v(t)$ дифференцируема при почти всех t и поскольку $\varphi(0,\sigma)\in X_0$, то $v(0)\leqslant 0$. Поэтому, с учетом леммы 6 и неравенства (5.8), имеем при всех $t\in[0,t_0)$ неравенство $\dot v(t)\leqslant w\big(h^t\sigma, v(t)\big)$. В силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, из этого неравенства при всех $t\in[0,t_0)$ следует неравенство $v(t)\leqslant z^*(t,\sigma)$ и $v(t_0)=z^*(t_0,\sigma)$, где $z^*(t,\sigma)$— верхнее решение задачи (5.7). Так как неравенство (5.8) сохраняется при всех $(t,x)\in\mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$, то и неравенство $v(t)\leqslant z^*(t,\sigma)$ сохранится на отрезке $[t_0,t_0+\varepsilon]$ при некотором $\varepsilon>0$. Но последнее неравенство эквивалентно включению $\big(t,\varphi(t,\sigma)\big)\in\mathfrak{A}^r(\sigma)$ при всех $t\in[t_0,t_0+\varepsilon]$, что противоречит определению точки t_0. Продолжая этот процесс, получаем, что неравенство $v(t)\leqslant z^*(t,\sigma)$ выполнено при всех $t\geqslant 0$ и, следовательно, решение $\varphi(t,\sigma)$ определено при всех $t\geqslant 0$. Таким образом, доказано, что множество достижимости $A(t,\omega)$ системы (2.1) определено при всех $t\geqslant 0$.

Отметим теперь, что каждое из множеств

$$\{t\in[0,\vartheta]\colon\ v(t)\leqslant 0\},\quad \{t\in[0,\vartheta]\colon\ z^*(t)\leqslant 0\},$$

измеримо по Лебегу; это доказывается так же, как лемма 4. Далее, в силу (5.10), из неравенства $v(t)\leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство

$$\overline{\lim}_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: v(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}\geqslant \varkappa^*(\sigma),$$

которое эквивалентно неравенству $\operatorname{freq}^*(\omega)\geqslant\varkappa^*(\sigma)$.

Неравенство $\operatorname{freq}_*(\omega)\geqslant\varkappa_*(\sigma)$ доказывается аналогично. ■

7. Теорема о статистически слабой инвариантности

Напомним, что мы пользуемся следующими обозначениями

$$\mathfrak{A}(\sigma)\doteq\big\{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\colon\ x\in\mathbb{A}(t,\omega_0)\big\},\quad \omega_0=(\sigma,X_0),$$

$$\mathfrak{A}^r(\sigma)\doteq\big\{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\colon\ \rho_{\mathbb{R}^n}\big(x,\mathbb{A}(t,\omega_0)\big)\leqslant r(t,\sigma)\big\},\quad \mathfrak{B}^r(\sigma)\doteq\mathfrak{A}^r(\sigma)\setminus\mathfrak{A}(\sigma).$$

Определение 5. Множество $\mathfrak{A}(\sigma)$ будем называть *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы

$$\dot x=\int_U f(h^t\sigma,x,u)\eta_t(du), \tag{7.1}$$

если для любой точки $x_0\in X_0$ найдется такое решение $\varphi(t,\sigma)$ включения

$$\dot x\in F(h^t\sigma,x),\quad F(\sigma,x)=\operatorname{co}\{y\in\mathbb{R}^n\colon\ y=f(\sigma,x,u),\ u\in U\}, \tag{7.2}$$

что $\varphi(t,\sigma)$ определено при всех $t\geqslant 0$, $\varphi(0,\sigma)=x_0$ и

$$\operatorname{freq}^*(\varphi)\doteq\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\varphi(t,\sigma)\in\mathbb{A}(t,\omega_0)\}}{\vartheta}=1,\quad \omega_0=(\sigma,X_0). \tag{7.3}$$

Далее, $\mathfrak{A}(\sigma)$ будем называть *слабо инвариантным*, если для некоторого решения $\varphi(t,\sigma)$ включение $\varphi(t,\sigma)\in\mathbb{A}(t,\omega_0)$ выполнено при всех $t\geqslant 0$.

Замечание 2. Напомним, что *допустимым процессом* управляемой системы (7.1) при фиксированном σ называется такая пара $\big(\varphi(t),\eta_t\big)$, что управление $t\to\eta_t\in\operatorname{rpm}(U)$ измеримо, функция

$t \to \varphi(t)$ абсолютно непрерывна и $\dot\varphi(t) = \int_U f(h^t\sigma, \varphi(t), u)\eta_t(du)$ при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$. Далее, если существует по крайней мере один допустимый процесс $(\varphi(t), \eta_t)$ системы (7.1), то $\varphi(t)$ является решением дифференциального включения (7.2). Верно и обратное: если множество решений включения (7.2), определённых на $\mathbb{R}_+$, непусто, то всякому такому решению $\varphi(t)$ отвечает допустимый процесс $(\varphi(t), \eta_t)$ системы (7.1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1 и 2, функция $\mathbb{A}$ удовлетворяет условиям (4.1), фиксировано множество $X_0 \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и для каждой точки $x_0 \in X_0$ всякое решение включения (7.2), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.*

Пусть, далее, существуют непрерывные скалярные функции $V(t, \sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ переменных $(t, \sigma, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, такие, что:

1. *Для каждого σ верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи*

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{7.4}$$

определено при всех $t \geqslant 0$ и

$$\varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1. \tag{7.5}$$

2. *Для каждого σ в области $\mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$, где $r(t, \sigma) \doteq \max\{z^*(t, \sigma), 0\}$, функция $V(t, \sigma, x)$ является функцией Ляпунова, и при всех $(t, x) \in \mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$ выполнено неравенство*

$$\min_{u\in U} V^o\big(t, \sigma, x; f(h^t\sigma, x, u)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t, \sigma, x)\big). \tag{7.6}$$

Тогда при каждом $\sigma \in \Sigma$ множество $\mathfrak{A}(\sigma)$ статистически слабо инвариантно.

Замечание 3. Повторяя доказательство леммы 4 и учитывая непрерывность решения $\varphi(t, \sigma)$ по t, можно доказать, что множество $\{t \in [0, \vartheta] \colon \varphi(t, \sigma) \in \mathbb{A}(t, \omega_0)\}$, определяющее предел (7.3), измеримо по Лебегу при каждом $\vartheta > 0$. Отметим, кроме того, что в силу леммы 3 неравенство (7.6) эквивалентно неравенству $V^o_{\min}\big(t, \sigma, x)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t, \sigma, x)\big)$.

Доказательство теоремы 2 разобьём на несколько пунктов.

A. При каждом $\sigma \in \Sigma$ и всех $(t, x) \in \mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$ построим множество

$$U_0 = U_0(t, \sigma, x) = \big\{\, u \in U \colon V^o\big(t, \sigma, x; f(h^t\sigma, x, u)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t, \sigma, x)\big)\big\}. \tag{7.7}$$

Покажем, что при фиксированных t, σ, x множество $U_0(t, \sigma, x)$ непусто, замкнуто и, следовательно, *компактно.* Действительно, непустота $U_0(t, \sigma, x)$ следует из второго условия теоремы. Далее, если последовательность $\{u_i\}$ такова, что $u_i \in U_0$ и $u_i \to u$, то $f(h^t\sigma, x, u_i) \to f(h^t\sigma, x, u)$ и в силу липшицевости функции $q \to V^o(t, \sigma, x; q)$,

$$V^o\big(t, \sigma, x; f(h^t\sigma, x, u)\big) = \lim_{i\to\infty} V^o\big(t, \sigma, x; f(h^t\sigma, x, u_i)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t, \sigma, x)\big).$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Фиксируем $\sigma \in \Sigma$, точку (t_0, x_0) множества $\mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$ и $u_0 \in U_0(t_0, \sigma, x_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех $(t, x) \in \mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| + |x - x_0| \leqslant \delta$, выполнено неравенство*

$$V^o\big(t, \sigma, x; f(h^t\sigma, x, u_0)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t, \sigma, x)\big) + \varepsilon. \tag{7.8}$$

Действительно, перепишем неравенство $V^o\big(t_0,\sigma,x_0; f(h^{t_0}\sigma,x_0,u_0)\big) \leqslant w\big(h^{t_0}\sigma, V(t_0,\sigma,x_0)\big)$, которое выполнено в силу условия $u_0 \in U_0(t_0,\sigma,x_0)$, в виде

$$V^o\big(t,\sigma,x; f(h^t\sigma,x,u_0)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t,\sigma,x)\big) + \Big(w\big(h^{t_0}\sigma, V(t_0,\sigma,x_0)\big) - w\big(h^t\sigma, V(t,\sigma,x)\big)\Big)+ \\ + \Big(V^o\big(t,\sigma,x; f(h^t\sigma,x,u_0)\big) - V^o\big(t_0,\sigma,x_0; f(h^{t_0}\sigma,x_0,u_0)\big)\Big). \quad (7.9)$$

В силу непрерывности функций V и w по (t,x), первая разность в правой части неравенства (7.9) стремится к нулю при $(t,x) \to (t_0,x_0)$, а вторая разность, в силу непрерывности функции $(t,x) \to f(h^t\sigma,x,u_0)$ и полунепрерывности сверху функции $(t,x,q) \to V^o(t,\sigma,x;q)$ [16, с. 32], допускает оценку

$$V^o\big(t,\sigma,x; f(h^t\sigma,x,u_0)\big) - V^o\big(t_0,\sigma,x_0; f(h^{t_0}\sigma,x_0,u_0)\big) \leqslant \varepsilon/2$$

при (t,x), близких к (t_0,x_0), что и доказывает лемму. ∎

B. Множеству $U_0(t,\sigma,x)$ (см. (7.7)), отвечают управляемая система

$$\dot{x} = f(h^t\sigma,x,u), \quad u \in U_0(t,\sigma,x), \quad \text{где} \quad \sigma \in \Sigma,\ (t,x) \in \mathfrak{A}^{1+r}(\sigma), \qquad (7.10)$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F_0(t,\sigma,x), \quad F_0(t,\sigma,x) \doteq \operatorname{co} f\big(h^t\sigma,x,U_0(t,\sigma,x)\big), \qquad (7.11)$$

всякое решение которого одновременно является и решением исходного дифференциального включения (7.2). Напомним, что допустимый процесс задачи (7.10) — это такая пара $(\varphi(t),\eta_t)$, что $\varphi(t)$ — решение системы

$$\dot{x} = \int_{U_0(t)} f(h^t\sigma,x,u)\,\eta_t(du), \qquad (7.12)$$

где $U_0(t) = U_0(t,\sigma,\varphi(t))$, $\eta_t \in \operatorname{rpm}\big(U_0(t)\big)$. Если $(\varphi(t),\eta_t)$ — допустмый процесс, то $\varphi(t)$ — решение включения (7.11). Верно и обратное утверждение: если $\varphi(t)$ — решение включения (7.11), то найдётся такое управление η_t, что пара $(\varphi(t),\eta_t)$ образует допустимый процесс задачи (7.10).

Лемма 8. *Для каждого $\sigma \in \Sigma$ функции $(t,x) \to U_0(t,\sigma,x)$, $(t,x) \to F_0(t,\sigma,x)$ полунепрерывны сверху при всех $(t,x) \in \mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$.*

Доказательство. Пусть $(t_i,x_i) \to (t,x)$ и $u_i \to u$, где $u_i \in U_0(t_i,\sigma,x_i)$. С учётом теоремы Куратовского, достаточно показать, что $u \in U_0(t,\sigma,x)$ (см. [14, с. 204]). В силу неравенства (7.8), найдётся такая последовательность $\{\varepsilon_i\}$, что $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$ и

$$V^o\big(t_i,\sigma,x_i; f(h^{t_i}\sigma,x_i,u)\big) \leqslant w\big(h^{t_i}\sigma, V(t_i,\sigma,x_i)\big) + \varepsilon_i.$$

Переходя к пределу, получим неравенство $V^o\big(t,\sigma,x; f(h^t\sigma,x,u)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t,\sigma,x)\big)$, из которого следует включение $u \in U_0(t,\sigma,x)$.

Пусть теперь $(t_i,x_i) \to (t,x)$ и $p_i \to p$, где $p_i \in F_0(t_i,\sigma,x_i)$. Покажем, что $p \in F_0(t,\sigma,x)$. Из включения $p_i \in F_0(t_i,\sigma,x_i)$ и теоремы Каратеодори следует, что

$$p_i = \lambda_i^1 f(h^{t_i}\sigma,x_i,u_i^1) + \dots + \lambda_i^{n+1} f(h^{t_i}\sigma,x_i,u_i^{n+1}) \qquad (7.13)$$

при некоторых $\lambda_i^k \geqslant 0$, $\lambda_i^1 + \dots + \lambda_i^{n+1} = 1$, $u_i^k \in U_0(t_i,\sigma,x_i)$. Пусть $\lambda_i^k \to \lambda^k$, $u_i^k \to u^k$ (в противном случае перейдём к подпоследовательностям), тогда $u^k \in U_0(t,\sigma,x)$, и из (7.13) имеем $p = \lambda^1 f(h^t\sigma,x,u^1) + \dots + \lambda^{n+1} f(h^t\sigma,x,u^{n+1})$. Следовательно, $p \in F_0(t,\sigma,x)$. ∎

C. Из доказанного и теоремы А. Ф. Филиппова [14, с. 213] следует, что дифференциальное включение (7.11) имеет по крайней мере одно решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $x(0)=x_0$, и в силу условия теоремы о нелокальной продолжаемости всех решений вправо, каждое решение определено при всех $t \geqslant 0$. Всякому решению $\varphi(t)$ отвечает такое управление $\eta_t \in \mathrm{rpm}(\mathrm{U_0(t)})$, что пара $(\varphi(t), \eta_t)$ образует допустимый процесс управляемой системы (7.12).

Лемма 9. *При каждом* $\sigma \in \Sigma$ *и любом допустимом процессе* $(\varphi(t), \eta_t)$ *управляемой системы* (7.10), *где* $\eta_t \in \mathrm{rpm}\big(U_0(t)\big)$, $U_0(t) = U_0\big(t, \sigma, \varphi(t)\big)$, *имеет место неравенство*

$$V^o\Big(t, \sigma, \varphi(t); \int_{U_0(t)} f(h^t\sigma, \varphi(t), u)\eta_t(du)\Big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t, \sigma, \varphi(t))\big). \tag{7.14}$$

Поэтому если $v(t) = V\big(t, \sigma, \varphi(t)\big)$, *то* $V^o_{\min}\big(t, \sigma, \varphi(t)\big) \leqslant \dot v(t) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t)\big)$ *при почти всех* $t \in \mathbb{R}_+$.

Докажем неравенство (7.14). Так как вектор

$$q(t) = \int_{U_0(t)} f(h^t\sigma, \varphi(t), u)\eta_t(du)$$

является измеримым сечением многозначной функции $t \to F_0(h^t\sigma, \varphi(t))$, то, в силу теоремы Каратеодори, при каждом t сечение $q(t)$ представимо в виде выпуклой комбинации

$$\lambda_1(t) f(h^t\sigma, \varphi(t), u_1(t)) + \ \ldots\ + \lambda_{n+1}(t) f(h^t\sigma, \varphi(t), u_{n+1}(t))$$

точек $f(h^t\sigma, \varphi(t), u_i(t))$ множества $F_0(h^t\sigma, \varphi(t))$. Поэтому $u_i(t) \in U_0(t)$, и с учётом положительной однородности и субаддитивности функции $q \to V^o(t, \sigma, x; q)$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} &V^o\big(t, \sigma, \varphi(t); \int_{U_0(t)} f(h^t\sigma, \varphi(t), u)\eta_t(du)\big) \leqslant \\ &\leqslant \lambda_1(t) V^o\big(t, \sigma, \varphi(t); f(h^t\sigma, \varphi(t), u_1(t))\big) + \ \ldots\ + \lambda_{n+1}(t) V^o\big(t, \sigma, \varphi(t); f(h^t\sigma, \varphi(t), u_{n+1}(t))\big) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \max_{u \in U_0(t)} V^o\big(t, \sigma, \varphi(t); f(h^t\sigma, \varphi(t), u)\big) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t, \sigma, \varphi(t))\big), \end{aligned}$$

из которых и следует неравенство (7.14). ■

D. Мы построили такой допустимый процесс $(\varphi(t), \eta_t)$ управляемой системы (7.1), что функция $v(t) = V\big(t, \sigma, \varphi(t)\big)$ удовлетворяет неравенству $\dot v(t) \leqslant w\big(h^t\sigma, \varphi(t)\big)$, а из условия $x_0 \in X_0$ следует, что выполнено неравенство $v(0) \leqslant 0$. Поэтому $v(t) \leqslant z^*(t, \sigma)$, где $z^*(t, \sigma)$ — верхнее решение задачи (7.4). Далее, в силу условия (7.5), из неравенства $v(t) \leqslant z^*(t, \sigma)$ следует равенство

$$\varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1,$$

которое эквивалентно равенству $\mathrm{freq}^*(\omega) = 1$. ■

Пример 8. Вернёмся к примеру 7, в котором мы рассматривали систему

$$\dot x = \int_U \phi(t, x, u)\eta_t(du), \tag{7.15}$$

где U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, такое, что $0 \in U$, а функция $\phi(t, x, u)$ удовлетворяет условиям примера 5. Множество достижимости системы (7.15) из начальной точки $x_0 = 0$

в момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$ обозначим $A(t, t_0)$, $t \geqslant t_0$. Пусть, кроме того, задано множество $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x^*Qx \leqslant r^2\}$, где Q симметрична и определённо положительна, $r > 0$.

Для того чтобы воспользоваться теоремой 2, рассмотрим определённо положительную относительно множества $\mathbb{A}$ функцию Ляпунова $V(x) = x^*Qx - r^2$. Тогда (см. пример 7)

$$V^o_{\min}(t, x) = 2x^*Q\phi\bigl(t, x, u_-(t, x)\bigr),$$

где $u_-(t, x)$ удовлетворяет условию минимума

$$\min_{u\in U} x^*Q\phi\bigl(t, x, u\bigr) = x^*Q\phi\bigl(t, x, u_-(t, x)\bigr),$$

и поэтому если найдутся число $\gamma > r$, функция $\alpha(t)$ и константа β, такие, что при всех x из окрестности $\mathbb{A}^\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x^*Qx \leqslant \gamma^2\}$ множества $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x^*Qx \leqslant r^2\}$ и всех t выполнено неравенство

$$\min_{u\in U} x^*Q\phi\bigl(t, x, u\bigr) \leqslant \alpha(t)(x^*Qx - \beta), \tag{7.16}$$

то, как несложно убедиться, неравенство (7.6) теоремы 2 выполнено для функции

$$w(t, z) = 2\alpha(t)(z + r^2 - \beta).$$

Поэтому единственное решение задачи $\dot z = w(t, z)$, $z(0) = 0$, имеет вид

$$z(t) = (\beta - r^2)\Bigl(1 - \exp\bigl(2\int_0^t \alpha(s)ds\bigr)\Bigr).$$

Следовательно, в силу теоремы 2, *если выполнено условие* (7.16), *то для каждого* $t_0 \geqslant 0$ *множество* $\mathfrak{A}(t_0) \doteq [t_0, \infty) \times \mathbb{A}$ *статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы* (7.15) *в одном из двух случаев:*

1) *если* $r^2 > \beta$ *и* $\displaystyle\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta}\mathrm{mes}\Bigl\{t \in [0, \vartheta] : \int_0^t \alpha(s)ds \leqslant 0\Bigr\} = 1;$

2) *если* $r^2 < \beta$ *и* $\displaystyle\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta}\mathrm{mes}\Bigl\{t \in [0, \vartheta] : \int_0^t \alpha(s)ds \geqslant 0\Bigr\} = 1.$

Если же $r^2 = \beta$, *то множество* $\mathfrak{A}(t_0)$ *слабо инвариантно при всех* $t_0 \geqslant 0$.

8. Неблуждающее множество достижимости

По заданой топологической динамической системе (Σ, h^t) и управляемой системе

$$\dot x = \int_U f(h^t\sigma, x, u)\eta_t(du), \quad u \in U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m), \tag{8.1}$$

построим топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t), служащую расширением системы (Σ, h^t). С этой целью будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 3. Найдется непрерывная функция $M : \Sigma \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, такая, что множество $\Omega_0 = \{\omega = (\sigma, X) \in \Sigma \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) : X \subseteq M(\sigma)\}$ положительно инвариантно относительно потока $g^t = (h^t\sigma, A(t, \omega))$, где $A(t, \omega)$ — множество достижимости системы (8.1).

Напомним, что множество Ω_0 называется *положительно инвариантным*, если для всех $\omega \in \Omega_0$ и всех $t \geqslant 0$ имеет место включение $g^t\omega \in \Omega_0$. В этом случае будем говорить также, что множество Ω_0 положительно инвариантно относительно системы (8.1).

Условия положительной инвариантности см. [6, 19]. В дополнение к этим условиям приведем простое следствие теоремы 1 о положительной инвариантности множества Ω_0 относительно системы (8.1).

Следствие 2 (теоремы 1). *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2, $M : \Sigma \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *непрерывная функция, множество* $X \in \mathrm{comp}\big(M(\sigma)\big)$ *и существуют положительное число* ε *и непрерывные скалярные функции* $V(\sigma, x)$ *и* $w(\sigma, z)$ *переменных* $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^\varepsilon(\sigma)$ *и* $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, *где*

$$M^\varepsilon(\sigma) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \rho_{_{\mathbb{R}^n}}\big(x, M(\sigma)\big) \leqslant \varepsilon\}$$

такие, что выполнены следующие два условия.

1. *Для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *верхнее решение* $z^*(t,\sigma)$ *задачи* $\dot z = w(h^t\sigma, z)$, $z(0) = 0$, $t \geqslant 0$, *определено при всех* $t \geqslant 0$ *и* $z^*(t,\sigma) \leqslant 0$.

2. $V(\sigma, x) \leqslant 0$ *при* $x \in M(\sigma)$, $V(\sigma, x) > 0$ *при* $x \in N^\varepsilon(\sigma) \doteq M^\varepsilon(\sigma) \setminus M(\sigma)$ *и для всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \overline{N^\varepsilon}$ *и всех* $u \in U$ *имеет место неравенство*

$$V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big),$$

где $V^o(\sigma, x; q) = \limsup\limits_{(t,y,\varepsilon)\to(0,x,0)} \dfrac{V\big(h^{t+\varepsilon}\sigma, y + \varepsilon q\big) - V\big(h^t\sigma, y\big)}{\varepsilon}$.

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ *множество достижимости* $A(t, \sigma, X)$ *существует на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *и множество* Ω_0 *положительно инвариантно относительно системы* (8.1).

Поскольку мы предполагаем, что пространство Σ компактно, а функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна, то сужение потока g^t на Ω_0 образует топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t) с компактным фазовым пространством Ω_0.

Далее, точка σ фазового пространства Σ называется *неблуждающей* (nonwandering point) относительно потока h^t (см. [2, гл. 5, § 5]), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\vartheta > 0$ найдутся такой момент времени $t \geqslant \vartheta$ и такая точка σ_0, что $\rho_{_\Sigma}(\sigma_0, \sigma) < \varepsilon$ и $\rho_{_\Sigma}(h^t\sigma_0, \sigma) < \varepsilon$. Так как Σ компактно, то *множество* Σ_{nw} *неблуждающих точек непусто, компактно и инвариантно* относительно потока h^t.

Определение 6. Пусть $\omega = (\sigma, X) \in \Sigma_{nw} \times \mathrm{comp}(M(\sigma))$. Множество достижимости $A(t, \omega)$ системы (2.1) будем называть *неблуждающим*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдутся точка $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$, удовлетворяющая условиям $\rho_{_\Sigma}(\sigma_0, \sigma) < \varepsilon$, $\mathrm{dist}(X_0, X) < \varepsilon$ и момент времени $t \geqslant \vartheta$, такие, что $\mathrm{dist}(A(t, \omega_0), X) < \varepsilon$. Будем говорить также, что точка ω является *неблуждающей*, и совокупность всех неблуждающих точек обозначим Ω_{nw}.

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1–3, *то множество* Ω_{nw} *неблуждающих точек, содержащихся в* Ω_0, *непусто. Оно компактно и инвариантно относительно потока* g^t. *Следовательно, для каждого* $\sigma \in \Sigma_{nw}$ *найдется компактное подмножество* $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ *пространства* $\mathrm{comp}\big(M(\sigma)\big)$, *такое, что всякому* $X \in \mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ *отвечает неблуждающее множество достижимости* $A(t, \omega)$ *системы* (2.1).

Доказательство. Из определения 6 следует, что при фиксированном $\omega \in \Omega_0$ множество достижимости $A(t, \omega)$ будет неблуждающим в том и только в том случае, если точка ω является неблуждающей относительно потока g^t, определенного равенством $g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t, \omega)\big)$. Поскольку Ω_0 компактно, то, как доказано в [2, гл. 5, § 5], множество Ω_{nw}

неблуждающих точек динамической системы (Ω_0, g^t) непусто, компактно и инвариантно относительно потока g^t. Поскольку всякое подмножество Ω_1 множества Ω_0 представимо в виде $\Omega_1 = \{(\sigma, X) \in \Omega_0 \colon \sigma \in \Sigma_1,\ X \in \mathfrak{X}_1(\sigma)\}$, то множество Ω_{nw} имеет ту же структуру

$$\Omega_{nw} = \{(\sigma, X) \in \Omega_0 \colon \sigma \in \Sigma_{nw},\ X \in \mathfrak{X}_{nw}(\sigma)\},$$

где Σ_{nw}— подмножество неблуждающих точек потока h^t (оно компактно). Далее, в силу компактности Ω_{nw}, подмножество $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ пространства $\operatorname{comp}\bigl(M(\sigma)\bigr)$ тоже компактно при каждом σ. ■

Пример 9. Пусть Σ — окружность радиуса единица, σ — угловая координата, поток $h^t\sigma = t + \sigma \pmod{2\pi}$. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = -x + (\cos(t+\sigma)+1)u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u \in U = [-1, 1]. \tag{8.2}$$

По динамической системе (Σ, h^t) и системе (8.2) построим топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t), служащую расширением системы (Σ, h^t). Несложно проверить, что для функции $M(\sigma) = m(\sigma)U$, где $m(\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\bigl(\sigma + \dfrac{\pi}{4}\bigr) + 1$, выполнено условие 3. Следовательно, множество

$$\Omega_0 = \bigl\{\omega = (\sigma, X) \colon \sigma \in \Sigma,\ X \in \operatorname{comp}(M\bigl(\sigma)\bigr)\bigr\}$$

положительно инвариантно относительно движений $t \to g^t\omega = \bigl(h^t\sigma, A(t,\omega)\bigr)$, где множество достижимости $A(t,\omega)$ системы (8.2) имеет вид

$$A(t,\omega) = e^{-t}X + \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl\{\Bigl(\sin\bigl(t+\sigma+\frac{\pi}{4}\bigr) + \sqrt{2}\Bigr)u - e^{-t}\Bigl(\sin\bigl(\sigma + \frac{\pi}{4}\bigr) + \sqrt{2}\Bigr)u \colon u \in U\Bigr\}.$$

Поскольку $h^{2\pi}\sigma = \sigma$ для любого $\sigma \in \Sigma$, то все точки множества Σ являются неблуждающими относительно потока h^t. Анализируя поведение множества $A(t,\omega)$ при $t \to \infty$, получаем, что множество неблуждающих точек Ω_{nw} содержит все множества вида $\Sigma \times [-a, a]$, где a — любое число, принадлежащее отрезку $\Bigl[1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Bigr]$.

Пусть $\Omega_w \doteq \Omega_0 \setminus \Omega_{nw}$— множество *блуждающих* точек динамической системы (Ω_0, g^t). Точка ω является блуждающей, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$, что для любой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$, удовлетворяющей условиям $\rho_{\Sigma}(\sigma_0, \sigma) < \varepsilon$, $\operatorname{dist}(X_0, X) < \varepsilon$ и для любого $t \geqslant \vartheta$ выполнено по крайней мере одно из неравенств $\rho_{\Sigma}(h^t\sigma_0, \sigma) \geqslant \varepsilon$, $\operatorname{dist}(A(t,\omega_0), X) \geqslant \varepsilon$.

Пусть $\mathfrak{X}_{nw}$ — объединение компактных подмножеств $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma) \in \operatorname{comp}\bigl(M(\sigma)\bigr)$ по всем $\sigma \in \Sigma$. Введем расстояния $\varrho\,(X, \mathfrak{X}_{nw}) = \min\limits_{X_0 \in \mathfrak{X}_{nw}} \operatorname{dist}(X, X_0)$, $\varrho(\sigma, \Sigma_{nw}) = \min\limits_{\sigma_0 \in \Sigma_{nw}} \rho_{\Sigma}(\sigma, \sigma_0)$, $\varrho(\omega, \Omega_{nw}) = \max\bigl\{\varrho(\sigma, \Sigma_{nw}),\ \varrho(X, \mathfrak{X}_{nw})\bigr\}$ и обозначим через $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$ открытую ε-окрестность множества $\Omega_{nw} : \Omega^{\varepsilon}_{nw} = \bigl\{\omega \in \Omega_0 \colon \varrho(\omega, \Omega_{nw}) < \varepsilon\bigr\}$.

В [2, с. 374] показано, что если выполнено условие 3, то для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $\omega \in \Omega_0$ каждое блуждающее движение $t \to g^t\omega$ протекает только конечное время вне множества $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$. Следовательно, относительная частота пребывания движения $t \to g^t\omega$ в множестве $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$ равна единице:

$$\operatorname{freq}(\omega, \Omega^{\varepsilon}_{nw}) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} \chi_{\Omega^{\varepsilon}_{nw}}(g^t\omega)\, dt = 1,$$

где χ_E— характеристическая функция множества E.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1–3. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и всякой точки* $\omega \in \Omega_0$ *найдется такое* $\vartheta > 0$, *что для всех* $t \geqslant \vartheta$ *выполнено неравенство* $\varrho(A(t,\omega), \mathfrak{X}_{nw}) < \varepsilon$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и всякого $\omega \in \Omega_0$ найдется такое $\vartheta > 0$, что каждое блуждающее движение $t \to g^t\omega$ протекает только конечное время, не превышающее ϑ, вне множества $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$; следовательно, при $t \geqslant \vartheta$ траектория движения $g^t\omega$ содержится в множестве $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$. Тогда для $g^t\omega$ выполнено неравенство $\varrho(g^t\omega, \Omega_{nw}) < \varepsilon$; следовательно, $\varrho(A(t,\omega), \mathfrak{X}_{nw}) < \varepsilon$ при $t \geqslant \vartheta$. ■

9. Минимальный центр притяжения

Положительно инвариантное замкнутое множество $\Omega_c(\omega)$ называется *центром притяжения* движения $g^t\omega$ при $t \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ относительная частота пребывания движения $t \to g^t\omega$ в открытой ε-окрестности $\Omega^{\varepsilon}_c(\omega)$ этого множества равна единице. Если множество $\Omega_c(\omega)$ не содержит собственного подмножества, также являющегося центром притяжения, то $\Omega_c(\omega)$ называется *минимальным центром притяжения* движения $t \to g^t\omega$ и обозначается $\Omega_{mc}(\omega)$; тогда

$$\operatorname{freq}(\omega,\varepsilon) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} \chi_{\Omega^{\varepsilon}_{mc}}(g^t\omega)\,dt = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in \Omega^{\varepsilon}_{mc}(\omega)\}}{\vartheta} = 1.$$

Следующая теорема является дополнением теоремы 22 работы [2, гл. 5, § 6].

Теорема 5. *Если выполнены условия* 1–3, *то для каждого* $\omega = (\sigma, X) \in \Omega_0$ *существует минимальный центр притяжения* $\Omega_{mc}(\omega)$ *движения* $t \to g^t\omega$ *при* $t \to +\infty$. *Следовательно, для любого* $\varepsilon > 0$ *и всякой точки* $\omega \in \Omega_0$ *существует множество* $\mathfrak{X}_{mc}(\omega) \in \operatorname{comp}(M(\sigma))$, *такое, что*

$$\operatorname{freq}^*(\omega,\varepsilon) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \operatorname{dist}\bigl(A(t,\omega), \mathfrak{X}_{mc}(\omega)\bigr) < \varepsilon\}}{\vartheta} = 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}^{\varepsilon}(\omega) \doteq \{\omega_0 \in \Omega_0 : \rho_{\Omega}(\omega_0,\omega) < 1\}$ — открытая окрестность радиуса ε точки $\omega \in \Omega_0$. Поскольку для каждого $\omega \in \Omega_0$ относительная частота $\operatorname{freq}(\omega, \Omega_0)$ пребывания движения $g^t\omega$ в множестве Ω_0 равна единице, то существуют окрестности единичного радиуса, для которых относительная частота пребывания движения $g^t\omega$ положительная. Пространство Ω_0, в силу компактности, можно покрыть конечным числом таких окрестностей $\mathcal{O}^1(\omega_1), \ldots, \mathcal{O}^1(\omega_k)$. Для фиксированного $\omega \in \Omega_0$ обозначим через $S_1(\omega)$ объединение этих окрестностей и построим замыкание $\overline{S_1(\omega)}$ множества $S_1(\omega)$, тогда для относительной частоты пребывания движения $g^t\omega$ в множестве $\overline{S_1(\omega)}$ выполнено равенство $\operatorname{freq}\bigl(\overline{S_1(\omega)}\bigr) = 1$.

Компактное множество $\overline{S_1(\omega)}$ можно покрыть конечным числом открытых окрестностей радиуса $1/2$ и среди них отобрать те, для которых относительная частота пребывания движения $g^t\omega$ не равна нулю. Пусть $S_2(\omega)$ — объединение этих окрестностей, тогда $\operatorname{freq}\bigl(\overline{S_2(\omega)}\bigr) = 1$. Аналогично определяем множества $S_k(\omega)$ как объединение конечного числа окрестностей радиуса $1/2^{k-1}$, для которых относительная частота пребывания движения $g^t\omega$ положительная, следовательно, $\operatorname{freq}\bigl(\overline{S_k(\omega)}\bigr) = 1$.

Таким образом, мы построили последовательность вложенных компактных множеств:

$$\overline{S_1(\omega)} \subset \Omega_0, \quad \overline{S_{k+1}(\omega)} \subset \overline{S_k(\omega)}, \quad k = 1, 2 \ldots .$$

Докажем, что пересечение данных множеств (которое непусто и компактно) является минимальным центром притяжения, то есть $\Omega_{mc}(\omega) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{S_k(\omega)}$. Отметим, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется номер такой k, что $\overline{S_k(\omega)} \subset \Omega_{mc}^{\varepsilon}(\omega)$, поэтому выполнено неравенство $\operatorname{freq}(\omega, \varepsilon) \geqslant \operatorname{freq}\big(\overline{S_k(\omega)}\big) = 1$.

Покажем, что если множество $\Omega_{mc}(\omega)$ является минимальным центром притяжения для некоторой точки $\omega \in \Omega_0$, то оно также минимальный центр притяжения для $g^{\vartheta_0}\omega$ при любом $\vartheta_0 > 0$, то есть это множество положительно инвариантно. Действительно, если для $\omega \in \Omega_0$ выполнено равенство $\operatorname{freq}(\omega, \varepsilon) = 1$, то частота попадания движения $g^{\vartheta_0}\omega$ в множество $\Omega_{mc}^{\varepsilon}(\omega)$ равна пределу

$$\operatorname{freq}(g^{\vartheta_0}\omega, \varepsilon) = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : g^t\omega \in \Omega_{mc}^{\varepsilon}(\omega)\}}{\vartheta - \vartheta_0} =$$
$$= \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\vartheta}{\vartheta - \vartheta_0} \cdot \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : g^t\omega \in \Omega_{mc}^{\varepsilon}(\omega)\}}{\vartheta} = \operatorname{freq}(\omega, \varepsilon) = 1.$$

Аналогично [2, гл. 5, § 6] можно показать, что множество $\Omega_{mc}(\omega)$ можно определить как множество точек $\omega_0 \in \Omega_0$, в которых для любого $\varepsilon > 0$ частота попадания движения $t \to g^t\omega$ в ε-окрестность точки ω_0 положительна:

$$\operatorname{freq}(\mathcal{O}^{\varepsilon}(\omega_0)) > 0\,; \tag{9.1}$$

следовательно, множество $\Omega_{mc}(\omega)$ не зависит от выбора построенной системы окрестностей.

Покажем, что $\Omega_{mc}(\omega)$ является минимальным центром притяжения движения. Допустим, что существует компактное собственное подмножество $\widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)$ множества $\Omega_{mc}(\omega)$, являющееся центром притяжения движения. Тогда множество $\Omega_{mc}(\omega) \setminus \widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)$ непусто и если точка ω_0 принадлежит $\Omega_{mc}(\omega) \setminus \widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)$, то $\varrho(\omega_0, \widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)) = \alpha > 0$. Выберем $\varepsilon < \alpha/2$, тогда множества $\widetilde{\Omega}_{mc}^{\varepsilon}(\omega)$ и $\overline{\mathcal{O}^{\varepsilon}(\omega_0)}$ имеют пустое пересечение, а это противоречит неравенству (9.1) и определению минимального центра притяжения.

Пусть $\Sigma_{mc}(\sigma)$ — минимальный центр притяжения движения $t \to h^t\sigma$, тогда множество $\Omega_{mc}(\omega)$ имеет структуру $\Omega_{mc}(\omega) = \{\omega_0 \in \Omega_0 : \sigma_0 \in \Sigma_{mc}(\sigma),\ X_0 = \mathfrak{X}_{mc}(\omega)\}$, где $\mathfrak{X}_{mc}(\omega)$ — некоторое подмножество пространства $\operatorname{comp}(M(\sigma))$. Поскольку из неравенства $\varrho(g^t\omega, \Omega_{mc}(\omega)) < \varepsilon$ следует неравенство $\operatorname{dist}(A(t, \omega), \mathfrak{X}_{mc}(\omega)) < \varepsilon$ и $\Omega_{mc}(\omega)$ — минимальный центр притяжения движения $t \to g^t\omega$, то $\operatorname{freq}^*(\omega, \varepsilon) \geqslant \operatorname{freq}(\omega, \varepsilon) = 1$, откуда получаем последнее утверждение теоремы. ■

Пример 10. Рассмотрим динамическую систему (Σ, h^t), где Σ— окружность радиуса единица, σ— угловая координата, $h^t\sigma = t + \sigma \pmod{2\pi}$, и управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \dfrac{x_1 - \cos(t + \sigma)}{2} + \dfrac{x_1 - \cos(t + \sigma)}{2}u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \dfrac{x_2 - \sin(t + \sigma)}{2} + \dfrac{x_2 - \sin(t + \sigma)}{2}u, \end{cases} \tag{9.2}$$

где $u \in [-1, 1]$. По системе (Σ, h^t) и системе (9.2) построим топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t), служащую расширением системы (Σ, h^t). Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутый круг радиуса 2 с центром в начале координат, $\Omega_0 = \Sigma \times \operatorname{comp}(M)$, $g^t\omega = (h^t\sigma, A(t, \omega))$.

Рассмотрим множество X, содержащееся в $\operatorname{comp}(M)$. Обозначим $\varrho = \varrho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $d_1(X) = \min\limits_{x \in X} \varrho(x)$, $d_2(X) = \max\limits_{x \in X} \varrho(x)$. При $u = 1$ все интегральные кривые системы (9.2) являются окружностями; при $u = -1$ множество интегральных кривых состоит из окружности $\varrho = 1$ и спиралей, которые при $t \to +\infty$ наматываются на предельный цикл $\varrho = 1$.

Опишем множества $\Omega_{mc}(\omega)$ для различных $\omega = (\sigma, X) \in \Omega_0$. Если $d_2(X) \leqslant 1$, то

$$\Omega_{mc}(\omega) = \Sigma \times M_1, \quad \text{где} \quad M_1 = \{x \in M : d_1(X) \leqslant \varrho \leqslant 1\};$$

если $d_1(X) \leqslant 1$, $d_2(X) > 1$, то $\Omega_{mc}(\omega) = \Sigma \times M_2$, где $M_2 = \{x \in M : d_1(X) \leqslant \varrho \leqslant d_2(X)\}$; если $d_1(X) > 1$, то $\Omega_{mc}(\omega) = \Sigma \times M_3$, где $M_3 = \{x \in M : 1 \leqslant \varrho \leqslant d_2(X)\}$.

Выражаем благодарность А. Г. Ченцову за содержательное обсуждение результатов этой работы, Халику Гусейнову и Л. И. Данилову, обратившим наше внимание на ряд пробелов в доказательстве теорем 1 и 2.

Список литературы

[1] Krylov N. M. and Bogolyubov N. N. La théorie générale de la mesure et son application à l'étude des systèmes dynamiques de la méchanique non linéaire // Ann. Math., Ser. 2, 1937, vol. 38, pp. 65–113.
[2] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
[3] Birkhoff G. D. Proof of Recurrence Theorem for Strongly Transitive Systems: Proof of the Ergodic Theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1931, vol. 17, pp. 650-655.
[4] Колмогоров А. Н. Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина // УМН, 1938, № 5, с. 52–56.
[5] Aubin J.-P. Viability Theory. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1991. 543 p.
[6] Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 2008, т. 262, с. 202–221.
[7] Тонков Е. Л. Канонический представитель линейной управляемой системы // Вестн. УдГУ. Сер. Матем., 2003, с. 113–128.
[8] Тонков Е. Л. Глобально управляемые линейные системы // Современная математика и её приложения, 2005, т. 23, с. 145–165.
[9] Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З. Динамические системы: 1 // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»: Т. 1. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. 244 с.
[10] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
[11] Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Почти периодические управляемые процессы // Вестник Тамбовского ун-та, 2007, т. 12, вып. 4, с. 456–459.
[12] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.
[13] Бебутов М. В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. Мех.-матем. фак-та МГУ, 1941, № 5, с. 1–52.
[14] Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1985, т. 169, с. 194–252.
[15] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
[16] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
[17] Peano G. Sull' integrabilitá delle equazione differenziali di primo ordine // Atti. R. Accad. Torino, 1885/1886, № 21. pp. 667–685.
[18] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
[19] Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения, 2007, т. 43, № 6, с. 859–860.