УДК 531.38; 532.5

О форме замкнутой полости, в которой существуют однородные вихревые движения идеальной несжимаемой жидкости

С. Н. Судаков
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк, Украина, 83114
sudakov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 03 октября 2009 г.

В работе С. В. Жака [1] рассмотрен вопрос об отыскании форм полостей вращения, в которых может существовать однородное вихревое движение идеальной несжимаемой жидкости. В настоящей работе эта задача решается без предположения, что граница полости есть поверхность вращения.

Ключевые слова: однородное вихревое движение, идеальная несжимаемая жидкость, полость, теоремы Гельмгольца о вихрях

S. N. Sudakov

On the form of a closed cavity in which there exist homogeneous vortex motions of an ideal incompressible fluid

The paper of S. V. Jaques [1] is concerned with the problem of finding forms of rotation cavities in which there can exist a homogeneous vortex motion of an ideal incompressible fluid. This paper solves this problem without the assumption that the boundary of the cavity is the rotation surface.

Keywords: the homogeneous vortex flows, incompressible inviscid fluid, cavity, the theorems of Helmholtz
Mathematical Subject Classifications: 76M23

Постановка задачи

Рассмотрим случай неподвижной полости. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — неподвижная прямоугольная декартова система координат. Движение жидкости в полости описывается уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}|_S = 0$, где S — граница полости, $\boldsymbol{\nu}$ — вектор нормали к границе. При однородном вихревом движении жидкости вектор вихря $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \mathbf{v}$ не зависит от координат x_1, x_2, x_3. Векторное поле $\mathbf{v}$ можно найти по его вихрю и расхождению [4]:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} - \nabla \varphi, \tag{3}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, φ — гармоническая функция с граничным условием

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|_S = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}. \tag{4}$$

Уравнения Гельмгольца, описывающие изменение вектора вихря, имеют вид [4]

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Используя (4) и учитывая, что $\boldsymbol{\Omega}$ не зависит от координат x_1, x_2, x_3, перепишем уравнения Гельмгольца в виде

$$-\dot{\Omega}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\varphi, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ — компоненты вектора $\boldsymbol{\Omega}$.

При однородном вихревом движении $\dot{\Omega}_i$, $i = 1, 2, 3$, не зависят от координат x_1, x_2, x_3. Тогда для существования в полости однородного вихревого движения необходимо и достаточно, чтобы правые части выражений (5) не зависели от x_1, x_2, x_3, если φ — гармоническая функция с граничным условием (4).

Таким образом, надо найти границу S замкнутой полости, для которой правые части выражений (5) не зависят от x_1, x_2, x_3.

Решение задачи

Граничные условия (4) можно записать так:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|_S = (x_2\nu_3 - x_3\nu_2)\Omega_1 + (x_3\nu_1 - x_1\nu_3)\Omega_2 + (x_1\nu_2 - x_2\nu_1)\Omega_3.$$

Следуя работе [2], функцию φ представим в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \Omega_i, \tag{6}$$

где φ_i, $i = 1, 2, 3$, — гармонические функции с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}\right|_S = x_2\nu_3 - x_3\nu_2 \qquad (123). \tag{7}$$

Обозначим правые части уравнений (5) через $\chi_i(\mathbf{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$. Используя (6), получаем

$$\chi_i(\mathbf{\Omega}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\varphi_j \Omega_j, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Функции $\chi_i(\mathbf{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$, однородны относительно $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$:

$$\chi_i(\mathbf{\Omega}) = \sum_{j,k=1}^{3} A^i_{jk} \Omega_j \Omega_k, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Если $\chi_i(\mathbf{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$, не зависят от x_1, x_2, x_3 при любых $\mathbf{\Omega}$ из множества $|\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_0| < \delta$, где δ и $\mathbf{\Omega}_0$, соответственно, некоторое положительное число и вектор, то A^i_{jk} не зависят от x_1, x_2, x_3. Вычисляя от (8) вторые производные по $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и учитывая, что $A^i_{jk} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \chi_i}{\partial \Omega_j \partial \Omega_k}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, находим

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i \partial x_j} = A^j_{ii}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial {x_j}^2} = 2A^j_{ij} - A^i_{jj}, \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) = 2A^k_{ij}, \qquad i \neq j \neq k \neq i, \qquad i, j, k, = 1, 2, 3.$$

Левые части этих равенств не зависят от $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, а правые — от x_1, x_2, x_3. Поэтому A^k_{ij}, $i, j, k = 1, 2, 3$, постоянны. Выражения для функций φ_i, найденные из (10), имеют вид

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(2A^j_{ij} - A^i_{jj})x_j^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} A^j_{ii} x_i x_j - \varepsilon_i x_m x_n + \sum_{j=1}^{3} k_{ij} x_j + \lambda_i, \tag{11}$$

$$i = 1, 2, 3, \qquad i \neq m \neq n \neq i,$$

где $\varepsilon_i + \varepsilon_j = -2A^k_{ij}$, $i \neq j \neq k \neq i$, а k_{ij} и λ_i — произвольные постоянные.

Из (6) и (11) следует, что функция φ — многочлен второй степени относительно x_1, x_2, x_3. Это согласуется с ее представлением в работе [6].

Подставив (11) в уравнение Лапласа, получим три соотношения для коэффициентов:

$$\begin{gathered} A^1_{11} + A_1 + A_2 = 0, \qquad 2A^1_{12} - A^2_{11} + A^2_{22} + A_3 = 0, \\ 2A^1_{13} - A^3_{11} + A^3_{33} + A_4 = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где $A_1 = 2A^2_{12} - A^1_{22}$, $A_2 = 2A^3_{13} - A^1_{33}$, $A_3 = 2A^3_{23} - A^2_{33}$, $A_4 = 2A^2_{23} - A^3_{22}$.

Таким образом, если $\chi_i(\mathbf{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$, не зависят от x_1, x_2, x_3 при любом $\mathbf{\Omega}$ из множества $|\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_0| < \delta$, где δ и $\mathbf{\Omega}_0$, соответственно, некоторое положительное действительное число и вектор, то существуют гармонические многочлены φ_i, $i = 1, 2, 3$, вида (11), удовлетворяющие граничным условиям (7). Из выражения (8) следует, что существование таких многочленов φ_i, $i = 1, 2, 3$, является достаточным условием независимости правых частей (5) от $\mathbf{x}$ при любых значениях $\mathbf{\Omega}$.

Систему (5), описывающую изменение вихря $\mathbf{\Omega}(t)$, после учета выражений (9) запишем так:

$$\dot{\omega}_i = \sum_{j,k=1}^{3} A^i_{jk}\Omega_j\Omega_k, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{13}$$

Лемма 1. Если $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$, то векторы $\dot{\mathbf{\Omega}}$ и $\mathbf{\Omega}$ не могут быть коллинеарными.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть в некоторый момент времени t_1 выполнено неравенство $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}$ коллинеарен $\mathbf{\Omega}$. Не умаляя общности, будем считать, что при $t = t_1$ направление оси Ox_1 совпадает с направлением вектора $\mathbf{\Omega}$. Тогда в момент t_1 векторы $\mathbf{\Omega}$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}$ примут вид $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{\Omega}} = (\dot{\Omega}_1, 0, 0)$, а система уравнений (13) будет выглядеть так:

$$\dot{\Omega}_1 = -2A^1_{11}\Omega^2_1, \qquad 0 = -2A^2_{11}\Omega^2_1, \qquad 0 = -2A^3_{11}\Omega^2_1.$$

По предположению, $\Omega_1 \neq 0$, $\cdot\Omega_1 \neq 0$. Поэтому $A^1_{11} \neq 0$, $A^2_{11} = A^3_{11} = 0$ и система (13) при начальных данных $\mathbf{\Omega}|_{t=t_1} = (\Omega^0_1, 0, 0)$ имеет единственное решение

$$\Omega_1 = \frac{\Omega^0_1}{1 + 2\Omega^0_1 A^1_{11}(t - t_1)}, \qquad \Omega_2 = \Omega_3 = 0.$$

Покажем,что это решение противоречит теоремам Гельмгольца о сохранении интенсивности вихревых трубок [3]. Для этого спроектируем объем, занимаемый полостью, на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{\Omega}$. Площадь проекции будет конечной величиной, не зависящей от времени. Рассмотрим любую вихревую трубку, имеющую в начальный момент времени конечную площадь ортогонального сечения. Так как выбранная вихревая трубка находится внутри полости, то площадь ее ортогонального сечения не превышает площади проекции объема полости.

По теореме Гельмгольца, должна сохраняться интенсивность вихревой трубки (произведение площади ортогонального сечения трубки на длину вектора вихря). Так как величина вихря с течением времени убывает и стремится к нулю, то площадь ортогонального сечения трубки должна возрастать и стремиться к бесконечности, т. е. должна превзойти величину площади проекции объема полости. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Лемма 2. Существует по крайней мере одно направление вектора $\mathbf{\Omega}$, при котором $\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$.

Доказательство. Разложим $\dot{\mathbf{\Omega}}$ на составляющие, одна из которых, $\mathbf{\Omega}_\rho$, параллельна $\mathbf{\Omega}$, а другая, $\mathbf{\Omega}_\tau$, ортогональна $\mathbf{\Omega}$. Возьмем единичную сферу и из ее центра проведем луч, параллельный вектору $\mathbf{\Omega}$. Из точки пересечения луча и сферы отложим составляющую $\mathbf{\Omega}_\tau$ вектора $\mathbf{\Omega}$. Из (13) следует, что $\dot{\mathbf{\Omega}}$ является непрерывной функцией вектора $\mathbf{\Omega}$. Тогда ортогональная составляющая $\mathbf{\Omega}_\tau$ вектора $\dot{\mathbf{\Omega}}$ также будет непрерывной функцией вектора $\mathbf{\Omega}$. Считая длину вектора $\mathbf{\Omega}$ постоянной и придавая ему все возможные направления, строим на сфере непрерывное касательное векторное поле $\mathbf{\Omega}_\tau(\mathbf{\Omega})$. Это поле при некотором $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0$ должно иметь нулевую точку [5]. По лемме 1, $\mathbf{\Omega}_\tau \neq 0$, если $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$. Поэтому $\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$, если $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0$. Лемма доказана.

Не умаляя общности рассуждений, будем считать, что направление оси Ox_1 совпадает с направлением вектора $\mathbf{\Omega}_0$. Тогда при $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, 0.0)$ из уравнения (13) получим $2A^i_{11}\Omega_1^2 = 0$, $i = 1, 2, 3$, откуда $A^i_{11} = 0$.

Соотношения (12) примут вид

$$A_1 + A_2 = 0, \qquad 2A^1_{12} + A^2_{22} + A_3 = 0, \qquad 2A^1_{13} + A^3_{33} + A_4 = 0. \tag{14}$$

Выражения (11) запишутся так:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}A_1x_2^2 - \frac{1}{2}A_1x_3^2 - \varepsilon_1x_2x_3 + \sum_{j=1}^{3}k_{1j}x_j + \lambda_1,$$

$$\varphi_2 = A^1_{12}x_1^2 + \frac{1}{2}A^2_{22}x_2^2 + \frac{1}{2}A_3x_3^2 + A^1_{22}x_1x_2 - \varepsilon_2x_1x_3 + A^3_{22}x_2x_3 + \sum_{j=1}^{3}k_{2j}x_j + \lambda_2,$$

$$\varphi_3 = A^1_{13}x_1^2 + \frac{1}{2}A_4x_2^2 + \frac{1}{2}A^3_{33}x_3^2 - \varepsilon_3x_1x_2 + A^1_{33}x_1x_3 + A^2_{33}x_2x_3 + \sum_{j=1}^{3}k_{3j}x_j + \lambda_3.$$

Подставив выражения для φ_i, $i = 1, 2, 3$, в (7), получим соотношения, которые должны выполняться на границе полости:

$$k_{11}\nu_1 + [A_1x_2 + (1-\varepsilon_1)x_3 + k_{12}]\nu_2 + [-(1+\varepsilon_1)x_2 - A_1x_3 + k_{13}]\nu_3\Big|_S = 0,$$

$$[2A^1_{12}x_1 + A^1_{22}x_2 - (1+\varepsilon_2)x_3 + k_{21}]\nu_1 + \left(\sum_{i=1}^{3}A^i_{22}x_i + k_{22}\right)\nu_2 +$$

$$+[(1-\varepsilon_2)x_1 + A^3_{22}x_2 + A_3x_3 + k_{23}]\nu_3\Big|_S = 0, \tag{15}$$

$$[2A^1_{13}x_1 + (1-\varepsilon_3)x_2 + A^1_{33}x_3 + k_{31}]\nu_1 + [-(1+\varepsilon_3)x_1 + A_4x_2 + A^2_{32}x_3 + k_{32}]\nu_2 +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{3}A^i_{33}x_i + k_{33}\right)\nu_3\Big|_S = 0.$$

Покажем, что $k_{11} = 0$. Действительно, если $\mathbf{\Omega} = (1, 0, 0)$, то движение частиц жидкости будет описываться следующей системой уравнений:

$$\dot{x}_1 = k_{11}, \qquad \dot{x}_2 = A_1x_2 + (1-\varepsilon_2)x_3 + k_{12}, \qquad \dot{x}_3 = -(1+\varepsilon_1)x_2 - A_1x_3 + k_{13},$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты рассматриваемой частицы.

Первое уравнение интегрируется независимо от двух других, и его решение имеет вид $x_1 = k_{11}t + x_1^0$, где x_1^0 — координата x_1 рассматриваемой частицы жидкости при $t = 0$. Если полость замкнута, то x_1 должна быть ограниченной, что возможно только при $k_{11} = 0$.

Лемма 3. Если граница полости не имеет двумерных участков, на которых $\nu_1 \equiv \nu_2 \equiv 0$, то всякая линия пересечения ее с плоскостью $x_1 = \mathrm{const}$ будет описываться уравнением

$$(1+\varepsilon_1)x_2^2 + (1-\varepsilon_1)x_3^2 + 2A_1x_2x_3 - 2k_{13}x_2 + 2k_{12}x_3 = \zeta, \tag{16}$$

где ζ — параметр, принимающий определенное значение на каждой линии пересечения.

Доказательство. Придавая параметру ζ допустимые значения, покроем плоскость $x_1 = \mathrm{const}$ семейством D, линии которого описываются уравнением (16). Вектор нормали к линиям этого семейства $\mathbf{n}$, лежащий в плоскости $x_1 = \mathrm{const}$, имеет компоненты

$$n_1 = 0, \qquad n_2 = (1+\varepsilon_1)x_2 + A_1x_3 - k_{13}, \qquad n_3 = (1-\varepsilon_1)x_3 + A_1x_2 + k_{12}.$$

Линию пересечения плоскости $x_1 = \mathrm{const}$ с границей полости обозначим через l, а касательный к ней вектор — через $\boldsymbol{\tau}$. Компоненты вектора $\boldsymbol{\tau}$ найдем из первого выражения (15):

$$\tau_1 = 0, \qquad \tau_2 = A_1x_2 + (1-\varepsilon_1)x_3 + k_{12}, \qquad \tau_3 = -(1+\varepsilon_1)x_2 - A_1x_3 + k_{13}.$$

В каждой точке линии l векторы $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ связаны соотношением $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$. Следовательно, l принадлежит семейству D или является его огибающей. Однако семейство D огибающей не имеет, и линия l будет описываться уравнением (16). Лемма доказана.

Предположим, что условия леммы 3 выполнены. В случае замкнутой полости уравнения (16) описывают семейство эллипсов. Не умаляя общности, будем считать, что ось Ox_1 проходит через их центры, а Ox_2 и Ox_3 совпадают с главными направлениями. Тогда $A_1 = k_{12} = k_{13} = 0$ и (16) примет вид $(1+\varepsilon_1)x_2^2 + (1-\varepsilon_1)x_3^2 = \zeta$.

Границу полости зададим соотношениями

$$x_2 = a(x_1)\cos\alpha, \qquad x_3 = ba(x_1)\sin\alpha, \tag{17}$$

где $b = \sqrt{(1+\varepsilon_1)/(1-\varepsilon_1)}$, $a(x_1)$ — кусочно-гладкая неотрицательная функция, в общем случае многозначная, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Компоненты вектора нормали имеют вид

$$\nu_1 = -ba(x_1)a'(x_1), \qquad \nu_2 = ba(x_1)\cos\alpha, \qquad \nu_3 = a(x_1)\sin\alpha,$$

где $a'(x_1)$ — производная от $a(x_1)$.

Подставив выражения для ν_1, ν_2, ν_3 в две последние формулы (15), получим

$$\begin{aligned} B\sin^2\alpha &= B_0 + B_1\sin\alpha + B_2\cos\alpha + B_3\sin 2\alpha, \\ C\cos^2\alpha &= C_0 + C_1\sin\alpha + C_2\cos\alpha + C_3\sin 2\alpha, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$B = b(A_{22}^2 - A_3)a(x_1), \qquad B_0 = b[A_{22}^2 a(x_1) - (2A_{12}^1 x_1 + k_{21})a'(x_1)],$$
$$B_1 = b^2(1+\varepsilon_2)a(x_1)a'(x_1) + (1-\varepsilon_2)x_1 + k_{23},$$
$$B_2 = b[-A_{22}^1 a(x_1)a'(x_1) + A_{22}^1 x_1 + k_{22}], \qquad B_3 = \frac{1}{2}A_{22}^3(b^2+1)a(x_1),$$
$$C = b(A_{33}^3 - A_4)a(x_1), \qquad C_0 = b[A_{33}^3 a(x_1) - (2A_{13}^1 x_1 + k_{31})a'(x_1)],$$
$$C_1 = -A_{33}^1 b^2 a(x_1)a'(x_1) + A_{33}^1 x_1 + k_{33},$$
$$C_2 = -b[(1-\varepsilon_3)a(x_1)a'(x_1) + (1+\varepsilon_3)x_1 + k_{32}],$$
$$C_3 = \frac{1}{2}A_{33}^2(b^2+1)a(x_1).$$

Равенства (18) должны выполняться тождественно при всех допустимых значениях x_1 и α. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $a(x_1)$ была решением системы уравнений

$$B(x_1, a) = 0, \qquad C(x_1, a) = 0, \qquad B_i(x_1, a) = 0, \qquad C_i(x_1, a) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3,$$

которые в развернутом виде выглядят так:

$$A_{22}^3 a(x_1) = 0, \qquad A_{33}^2 a(x_1) = 0, \tag{19}$$

$$b(A_{22}^2 - A_3)a(x_1) = 0, \qquad b(A_{33}^3 - A_4)a(x_1) = 0, \tag{20}$$

$$A_{22}^2 a(x_1) - (2A_{12}^1 x_1 + k_{21})a'(x_1) = 0, \tag{21}$$

$$b^2(1+\varepsilon_2)a(x_1)a'(x_1) + (1-\varepsilon_2)x_1 + k_{23} = 0, \tag{22}$$

$$-A_{22}^1 a(x_1)a'(x_1) + A_{22}^1 x_1 + k_{22} = 0, \tag{23}$$

$$A_{33}^3 a(x_1) - (2A_{13}^1 x_1 + k_{31})a'(x_1) = 0, \tag{24}$$

$$-A_{33}^1 b^2 a(x_1)a'(x_1) + A_{33}^1 x_1 + k_{33} = 0, \tag{25}$$

$$-(1-\varepsilon_3)a(x_1)a'(x_1) - (1+\varepsilon_3)x_1 + k_{32} = 0. \tag{26}$$

Лемма 4. Чтобы уравнения (19)–(26) были совместны и имели решение, не равное тождественно нулю, необходимо и достаточно выполнения условий

$$1)\ 1+\varepsilon_2 \neq 0, \qquad 1-\varepsilon_3 \neq 0, \qquad A_{22}^3 = A_{33}^2 = 0, \qquad A_{ii}^1 = k_{ii} = A_{1i}^1 + A_{ii}^i = 0,$$
$$i = 2, 3;$$

$$2)\ b^2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = (1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3), \qquad b^2 k_{32}(1+\varepsilon_2) = -k_{23}(1-\varepsilon_3),$$
$$A_{12}^1 = k_{21} = A_{13}^1 = k_{31} = 0.$$

Доказательство. Покажем, что $1+\varepsilon_2 \neq 0, \quad 1-\varepsilon_3 \neq 0$. Действительно, если $1+\varepsilon_2 = 0$, то для тождественного выполнения (22) необходимо равенство $1-\varepsilon_2 = 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения. Используя (26), докажем второе неравенство.

Подставив выражение для $a(x_1)a'(x_1)$, найденное из (26), в (23), получим тождество $2A_{22}^1 x_1 - A_{22}^1 k_{32} + k_{22}(1-\varepsilon_3) \equiv 0$, для выполнения которого необходимо $A_{22}^1 = k_{22} = 0$. Аналогично, используя (22) и (25), докажем, что $A_{33}^1 = k_{33} = 0$.

Равенства (19) и (20) дают $A_{22}^3 = A_{33}^2 = A_{22}^2 - A_3 = A_{33}^3 - A_4 = 0$. Складывая $A_{22}^2 - A_3 = 0$ и $A_{33}^3 - A_4 = 0$ соответственно со вторым и третьим выражениями (14), находим $A_{12}^1 + A_{22}^2 = A_{13}^1 + A_{33}^3 = 0$.

Необходимость условий 1) доказана. При выполнении этих условий равенства (19), (20), (23), (25) справедливы для любой функции $a(x_1)$.

Из уравнения (22) следует

$$b^2 a^2(x_1) = -\kappa_1 x_1^2 - \kappa_2 x_1 + \beta, \tag{27}$$

где $\kappa_1 = (1-\varepsilon_2)/(1+\varepsilon_2)$, $\kappa_2 = -2k_{23}/(1+\varepsilon_2)$, β — произвольная постоянная.

Подставляя (27) в (26), (21), (24) и учитывая $A_{12}^1 = -A_{22}^2$, $A_{13}^1 = -A_{33}^3$, получаем

$$\left(\frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2} - b^2\,\frac{1+\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3}\right)x_1 + \frac{k_{23}}{1+\varepsilon_2} + b^2\,\frac{k_{32}}{1-\varepsilon_3} = 0,$$

$$3A_{12}^1(1-\varepsilon_2)x_1^2 + [4k_{23}A_{12}^1 + k_{21}(1-\varepsilon_2)]x_1 - A_{12}^1\beta(1+\varepsilon_2) + k_{21}k_{23} = 0,$$

$$3A_{13}^1(1-\varepsilon_2)x_1^2 + [4k_{23}A_{13}^1 + k_{31}(1-\varepsilon_2)]x_1 - A_{13}^1\beta(1+\varepsilon_2) + k_{31}k_{23} = 0.$$

Тождественное выполнение этих равенств, являющееся необходимым и достаточным условием совместности уравнений (21), (22), (24), (26), возможно при $b^2a^2(x_1) \not\equiv 0$ в том и только том случае, если

$$b^2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = (1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3), \qquad b^2k_{32}(1+\varepsilon_2) = -k_{23}(1-\varepsilon_3),$$
$$A^1_{12} = k_{21} = A^1_{13} = k_{31} = 0.$$

Лемма доказана.

Функция $a(x_1)$ может быть многозначной, но точек ветвления не имеет. Действительно, каждая ветвь этой функции описывается уравнением (27). Параметры b, κ_1, κ_2 выражаются через ε_i, $i = 1, 2, 3$, и k_{23} и одинаковы для всех ветвей. Если $a(x_1)$ имеет точку ветвления, то выходящие из нее ветви будут иметь одинаковые значения параметра β и сольются.

Из соотношений (17) следует $b^2x_2^2 + x_3^2 = b^2a^2(x_1)$. Подставляя сюда (27), находим уравнение границы полости

$$(x_1+d)^2/b_1^2 + x_2^2/b_2^2 + x_3^2 = \beta_1,$$

где

$$d = \frac{k_{23}}{1-\varepsilon_2}, \qquad b_1^2 = \frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}, \qquad b_2^2 = \frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}, \qquad \beta_1 = \beta - \frac{k_{23}^2}{1-\varepsilon_2^2}.$$

Постоянные d, b_1, b_2 выражаются через коэффициенты многочленов φ_i единственным образом. Параметр β_1 может иметь как одно, так и несколько значений. Учитывая замкнутость полости, приходим к выводу, что искомая граница либо эллипсоид, либо состоит из двух подобных соосных концентрических эллипсоидов.

Замечание 1. При решении задачи предполагалось, что искомая поверхность не имеет двумерных участков, на которых $\nu_2 \equiv \nu_3 \equiv 0$. Это условие будет выполнено, если такие участки отсутствуют на части поверхности, заключенной между плоскостями $x_1 = h_a$ и $x_1 = h_b$, где h_a и h_b — некоторые отличные друг от друга действительные числа.

Действительно, пусть на поверхности S существуют двумерные участки S_i, $i = 1, 2, \ldots$, на которых $\nu_2 \equiv \nu_3 \equiv 0$. На каждом таком участке $x_1 \equiv h_i$, где h_i, $i = 1, 2, \ldots$, — постоянные. Для части поверхности, заключенной между плоскостями $x_1 = h_a$ и $x_1 = h_b$, справедлива лемма 3. Тогда будут справедливы доказанные в лемме 4 соотношения $1+\varepsilon_2 \neq 0$, $1-\varepsilon_3 \neq 0$, $A^1_{22} = A^1_{33} = 0$. Применяя их к двум последним выражениям (15) и учитывая, что на S_i, $i = 1, 2, \ldots$, выполняются равенства $\nu_2 \equiv \nu_3 \equiv 0$ и $x_1 = h_i$, получаем

$$[2A^1_{12}h_i + k_{21} - (1+\varepsilon_2)x_3]\nu_1\Big|_{S_i} = 0,$$
$$[2A^1_{13}h_i + k_{31} + (1-\varepsilon_3)x_2]\nu_1\Big|_{S_i} = 0.$$

Так как $\nu_1 \neq 0$ на S_i, $2A^1_{12}h_i + k_{21}$ и $2A^1_{13}h_i + k_{31}$ — константы, то $1+\varepsilon_2 = 0$ и $1-\varepsilon_3 = 0$, что противоречит неравенствам $1+\varepsilon_2 \neq 0$ и $1-\varepsilon_3 \neq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения.

Замечание 2. Полученный в работе результат можно распространить на случай оболочки, имеющей только одну неподвижную точку. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если твердое тело с одной неподвижной точкой имеет замкнутую полость, целиком заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, причем вектор $\boldsymbol{\Omega}$ и вектор угловой скорости оболочки $\boldsymbol{\omega}$ могут принимать любые значения из множеств $|\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0| < \delta_1$ и $|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0| < \delta_2$, где $\boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_0$ —*

некоторые векторы, а δ_1 и δ_2 — произвольные малые положительные числа, то граница полости является эллипсоидом или состоит из двух подобных соосных концентрических эллипсоидов.

Для доказательства можно использовать приведенные выше рассуждения, изменив их следующим образом. Учитывая, что полость подвижна, выражения (4), (6), (8) заменим следующими:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_S = (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x})\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{3}\varphi_i(\Omega_i - \omega_i),$$

$$\chi_i(\mathbf{\Omega},\boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\varphi_j(\Omega_j - \omega_j), \qquad i = 1,2,3.$$

Вводя вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_6)$, где $\xi_i = \Omega_i$, $\xi_{i+3} = \omega_i$, $i = 1,2,3$, представим χ_i так:

$$\chi_i(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi_j(\xi_j - \xi_{j+3}), \qquad i = 1,2,3. \tag{28}$$

Функции χ_i однородны относительно $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_6$:

$$\chi_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j,k=1}^{3} A^i_{jk}\xi_j\xi_k, \qquad i = 1,2,3,$$

где A^i_{jk} — константы.

Вычисляя от формул (28) вторые производные по ξ_1,ξ_2,ξ_3 и используя равенства $A^i_{jk} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\chi_i}{\partial\xi_j\partial\xi_k}$, приходим к уравнениям (10), из которых следует, что φ_i, $i = 1,2,3$, имеют вид (11).

Таким образом, если векторы $\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяют условиям $|\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_0| < \delta_1$, $|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0| < \delta_2$, то необходимым и достаточным условием независимости правых частей уравнений (5) от $\mathbf{x}$ будет существование гармонических многочленов φ_i, $i = 1,2,3$, вида (11), удовлетворяющих граничным условиям (7). Из (28) видно, что существование таких многочленов φ_i, $i = 1,2,3$, обеспечивает независимость правых частей уравнений (5) от $\mathbf{x}$ при любых значениях $\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Положив $\boldsymbol{\omega} = 0$, сведем доказательство к случаю неподвижной полости.

Список литературы

[1] Жак С. В. О возможности квазитвердого вращения жидкости // ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 569–570.

[2] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью // Собр. соч. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1, с. 31–170.

[3] Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 811 с.

[4] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.

[5] Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971. 680 с.

[6] Stekloff W. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Sér. 3, no. 1, 1909, pp. 145–256.