

О периодических возмущениях автоколебательных маятниковых уравнений

С. А. Королев, А. Д. Морозов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

morozov@mm.unn.ru

Получено 5 октября 2009 г.

Рассматриваются периодические по времени возмущения автоколебательного маятникового уравнения, к которому приводит анализ системы с двумя степенями свободы. Выводятся усредненные системы, описывающие поведение решений исходного уравнения в резонансных зонах; устанавливается условие существования гомоклинической структуры Пуанкаре. Приводятся результаты численного счета в случае, когда у автономного уравнения существует 5 предельных циклов в колебательной области. При изменении частоты возмущения исследуются перестройки фазовых портретов отображения Пуанкаре, связанные с прохождением замкнутых инвариантных кривых через основной резонанс.

Ключевые слова: маятниковое уравнение, предельные циклы, резонансы

S. A. Korolev, A. D. Morozov

On periodic perturbations of self-oscillating pendulum equations

In this paper we consider time-periodic perturbations of self-oscillating pendulum equation which arises from analysis of one system with two degrees of freedom. We derive averaged systems which describe the behavior of solutions of original equation in resonant areas and we find existence condition of Poincaré homoclinic structure. In the case when autonomous equation has 5 limit cycles in oscillating region we give results of numerical computation. Under variation of perturbation frequency we investigate bifurcations of phase portraits of Poincaré map.

Keywords: pendulum equation, limit cycles, resonances

Mathematical Subject Classification 2000: 34C15, 79K30

1. Введение

Исследованию маятниковых уравнений посвящено большое число работ, в которых рассматривается, как правило, квазилинейное приближение (малые углы отклонения маятника от положения покоя, см., например, [1]). В некоторых работах исследование маятниковых уравнений сводится к исследованию уравнений Дюффинга (например, [2]). В [3] исследуются существенно нелинейные системы, близкие к интегрируемым, и, в частности, маятниковые уравнения. Используя [3], мы рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(a + b \cos nx)\dot{x} + \alpha y(t)], \quad (1.1)$$

где a, b, α — параметры, $n \geq 1$ — натуральное число, а $y(t)$ — производная от периодического решения уравнения

$$\ddot{y} + \sin y = 0. \quad (1.2)$$

Таким образом, система уравнений (1.1), (1.2) — это по сути система с двумя степенями свободы, которая легко сводится к системе с $3/2$ степенями свободы. При $\alpha = 0$ в уравнении (1.1) может существовать n предельных циклов, причем существует точно $n - 1$ предельных циклов в колебательной области [4], [3].

Как известно, периодические решения уравнения (1.2) выражаются через эллиптические функции. Поэтому $y(t)$ в (1.1) можно представить в виде известного ряда Фурье. Оставляя в этом ряду главную гармонику, придем к уравнению

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(a + b \cos nx)\dot{x} + c\nu \cos \nu t], \quad (1.3)$$

где c, ν — параметры, на связь которых с параметром α и решением уравнения (1.2) мы укажем ниже. Эта связь и является спецификой этого уравнения. В области, отделенной от невозмущенной сепаратрисы, поведение решений уравнения (1.3) и исходного уравнения (1.1) качественно не отличаются.

Рассмотрение уравнения (1.1) представляет интерес, с одной стороны, для решения проблемы о воздействии периодического по времени возмущения на систему с любым наперед заданным числом предельных циклов, обобщающую известную задачу о «захватывании» в уравнении Ван дер Поля» [5], а с другой стороны — для решения задачи о взаимодействии двух связанных маятников. Эти проблемы связаны с исследованием резонансов и, в частности, с проблемой синхронизации колебаний, которой в последние годы уделяется большое внимание (например, в связи с исследованием нейронных сетей [6]).

2. Переход к уравнению (1.3)

Уравнение (1.2) допускает интеграл энергии

$$H_2(y, \dot{y}) \equiv \dot{y}^2/2 - \cos y = h_2 = \text{const}. \quad (2.1)$$

При $h_2 \in (-1, 1)$ замкнутые фазовые кривые охватывают состояние равновесия $(0, 0)$ типа «центр» (колебательные движения маятника), а при $h_2 > 1$ — охватывают фазовый цилиндр (вращательные движения маятника).

Пусть $h_2 \in (-1, 1)$. Как известно (см., например, [3]), производная от решения уравнения (1.2) имеет вид

$$\dot{y}(\vartheta_2) = 2k_2 \text{cn}(2\mathbf{K}\vartheta_2/\pi), \quad \vartheta_2 = \omega_2 t, \quad \omega_2 = \pi/2\mathbf{K}(k_2). \quad (2.2)$$

Здесь $\operatorname{sn}(2\mathbf{K}\vartheta_2/\pi)$ — эллиптический косинус, \mathbf{K} — полный эллиптический интеграл первого рода, k_2 — его модуль, причем $k_2^2 = (1 + h_2)/2$, $\omega_2(h_2)$ — частота движения.

Во вращательной области ($h_2 > 1$) имеем

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{2}{k_2} \operatorname{dn} \left(\frac{\mathbf{K}(k_2)\vartheta_2}{\pi}, k_2 \right), \quad \omega_2^{\text{rot}} = \frac{\pi}{k_2 \mathbf{K}(k_2)}, \quad (2.3)$$

где dn — дельта амплитуды Якоби, $k_2^2 = 2/(1 + h_2)$.

Заметим, что для решения уравнения (1.1) при $\varepsilon = 0$ имеем аналогичные формулы. В этом случае для отличия от (1.2) модуль эллиптического интеграла обозначим через k_1 , значение интеграла энергии — через h_1 , угловую переменную — через ϑ_1 , собственную частоту через $-\omega_1(h_1)$.

Представляя эллиптический косинус в (2.2) в виде ряда Фурье, получаем

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{4\pi}{\mathbf{K}(k_2)} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2m-1)\vartheta_2, \quad (2.4)$$

где

$$a_m = \frac{d_2^{m-1/2}}{1 + d_2^{2m-1}}, \quad d_2 = \exp \left(\frac{-\pi \mathbf{K}(\sqrt{1-k_2^2})}{\mathbf{K}(k_2)} \right). \quad (2.5)$$

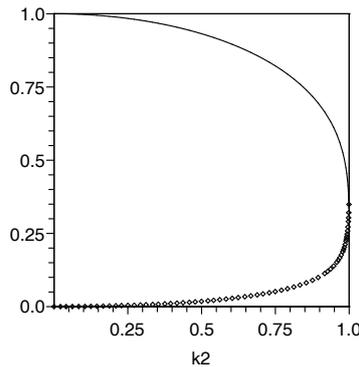


Рис. 1. График функций $d_2(k_2)$ (ромбы) и $\omega_2(k_2)$ (линия).

На рис. 1 ромбиками представлен график функции $d_2(k_2)$, а сплошной линией — график $\omega_2(k_2)$. Поэтому при $k_2 < 1$ коэффициенты a_m убывают, и тем быстрее, чем k_2 ближе к 0. Для значительной части интервала $(0, 1)$ в ряде (2.4) преобладающей является первая гармоника. Оставляя эту гармонику в (2.4), получим уравнение (1.3) с $\nu = \omega_2$, $c = 8\alpha a_1$.

3. Резонансы

Переходя в уравнении (1.3) в области, отделенной от невозмущенной сепаратрисы, от переменных x, \dot{x} к переменным действие $I(h_1)$, угол ϑ_1 , приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon[(a + b \cos nx)\dot{x} + c\nu \cos \vartheta_2]x'_{\vartheta_1} \equiv \varepsilon F(I, \vartheta_1, \vartheta_2), \\ \dot{\vartheta}_1 &= \omega_1(I) + \varepsilon[(a + b \cos nx)\dot{x} + c\nu \cos \vartheta_2]x'_I \equiv \omega_1(I) + \varepsilon G(I, \vartheta_1, \vartheta_2), \\ \dot{\vartheta}_2 &= \omega_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$



Говорят, что в системе (3.1) имеет место резонанс, если выполняется условие

$$\omega_1(I) = (q/p)\omega_2, \quad q, p \in \mathbf{N}. \quad (3.2)$$

В силу (2.2) при $h_1 \in (-1, 1)$ имеем $0 < \omega_1 = \pi/2\mathbf{K}(k_1) < 1$. Поэтому $p > q\omega_2$. Фиксируя взаимно простые p и q , из уравнения (3.2) находим, если это возможно, значение $I = I_{pq}$. Уровень энергии $I = I_{pq}$ ($H_1(x, \dot{x}) \equiv \dot{x}^2/2 - \cos x = h_{1pq}$) называют резонансным уровнем. Заметим, что в области колебательных движений имеем $h_1 \in (-1, 1)$, а в области вращательных движений $h_1 > 1$.

Согласно [7], [3], поведение решений системы (3.1) в окрестности $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I, \vartheta_1) : I_{pq} - C_1\sqrt{\varepsilon} < I < I_{pq} + C_1\sqrt{\varepsilon}, C_1 = \text{const} > 0\}$ индивидуального резонансного уровня $I = I_{pq}$ описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu A_0(v, I_{pq}) + \mu^2 \sigma(v, I_{pq})u, \\ \dot{v} &= \mu b_1 u + \mu^2 b_2 u^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$A_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F(I_{pq}, v + q\vartheta_2/p, \vartheta_2) d\vartheta_2, \quad (3.4)$$

$$\sigma(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} [a + b \cos(n\vartheta_2/p)] d\vartheta_2, \quad (3.5)$$

$b_1 = \omega_1'(I_{pq}), b_2 = \omega_1''(I_{pq})/2$. Очевидно, σ не зависит от v .

Вычислим $A_0(v, I_{pq})$. Из (3.1), (3.4) следует

$$A_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} [(a + b \cos nx)\dot{x} + cv \cos \vartheta_2] x'_{\vartheta_1} d\vartheta_2 \equiv \tilde{A}_0(v, I_{pq}) + B_n, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0(v, I_{pq}) &= \frac{cv}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} \cos \vartheta_2 x'_{\vartheta_1} d\vartheta_2, \\ B_n &= \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (a + b \cos nx) \dot{x} x'_{\vartheta_1} d\vartheta_2 \equiv aF_0 + bF_n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1. Колебательная область

Согласно [3], имеем

$$F_0^{osc}(\rho) = \frac{8}{\pi}[(\rho - 1)\mathbf{K} + \mathbf{E}],$$

$$(2j + 3)F_{j+1}^{osc}(\rho) + 4j(2\rho - 1)F_j^{osc}(\rho) + (2j - 3)F_{j-1}^{osc}(\rho) = 0, \quad j \geq 2,$$

$$F_1^{osc}(\rho) = \frac{8}{3\pi}[(1 - \rho)\mathbf{K} + (2\rho - 1)\mathbf{E}],$$

$$F_2^{osc}(\rho) = \frac{8}{15\pi}[(\rho - 1)(8\rho - 1)\mathbf{K} + (-16\rho^2 + 16\rho - 1)\mathbf{E}],$$

где $\rho = k_1^2$, причем $\rho = \rho(I_{pq})$, а \mathbf{K}, \mathbf{E} — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.



Отсюда можно найти $B_n^{osc}(\rho)$ при любом фиксированном натуральном n . Например, при $n = 5$ получаем

$$B_5^{osc} = \frac{8a}{\pi}[(\rho - 1)\mathbf{K} + \mathbf{E}] + \frac{8b}{3465\pi}[(1 - \rho)(32768\rho^4 - 53248\rho^3 + 25728\rho^2 - 3568\rho + 35)\mathbf{K} + (2\rho - 1)(32768\rho^4 - 65536\rho^3 + 38016\rho^2 - 5248\rho + 35)\mathbf{E}]. \quad (3.8)$$

Используя (3.7), (3.5), находим

$$\tilde{A}_0(v, I_{pq}) = \begin{cases} \frac{4c\nu d_1^{p/2}}{1 + d_1^p} \cos(pv), & \text{если } p \text{ нечетное, } q = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\sigma(I_{p1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a + b \cos(nx(I_{p1}, \psi))] d\psi, \quad (3.10)$$

где $d_1 = \exp[-\pi\mathbf{K}(\sqrt{1 - k_1^2})/\mathbf{K}(k_1)]$, $x = 2 \arcsin [k_1 \operatorname{sn}(2\mathbf{K}\psi/\pi)]$.

3.2. Вращательная область

Используя формулы [3]

$$F_0^{rot}(\rho) = \frac{4\mathbf{E}}{\pi k_1},$$

$$(2j + 3)\rho F_{j+1}^{rot}(\rho) + 4j(2 - \rho)F_j^{rot}(\rho) + (2j - 3)F_{j-1}^{rot}(\rho) = 0, \quad j \geq 2,$$

$$F_1^{rot}(\rho) = \frac{4}{3\pi k_1^3}[2(\rho - 1)\mathbf{K} + (2 - \rho)\mathbf{E}],$$

$$F_2^{rot}(\rho) = \frac{4}{15\pi k_1^5}[8(\rho - 1)(\rho - 2)\mathbf{K} + (-\rho^2 + 16\rho - 16)\mathbf{E}],$$

можно найти $B_n^{rot}(\rho)$ при любом фиксированном n . Например, при $n = 5$ имеем

$$B_5^{rot} = \frac{4a\mathbf{E}}{\pi k_1} + \frac{4b}{3465\pi k_1^{11}}[2(\rho - 1)(875\rho^4 - 11392\rho^3 + 44160\rho^2 - 65536\rho + 32768)\mathbf{K} + (2 - \rho)(35\rho^4 - 5248\rho^3 + 38016\rho^2 - 65536\rho + 32768)\mathbf{E}]. \quad (3.11)$$

Используя (3.7), (3.5), находим

$$\tilde{A}_0(v, I_{pq}) = \begin{cases} \frac{2c\nu d_1^p}{1 + d_1^{2p}} \cos(pv), & \text{если } q = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\sigma(I_{p1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a + b \cos(nx(I_{p1}, \psi))] d\psi, \quad (3.13)$$

где $x = 2\operatorname{am}(\mathbf{K}\psi/\pi)$, $\operatorname{am}(z)$ — амплитуда Якоби.

4. Поведение решений в резонансных зонах

Прежде всего заметим, что в автономном случае ($\alpha = 0$) поведение решений уравнения (1.1) определяет усредненная система

$$\dot{u} = \varepsilon B_n(u), \quad u = I + O(\varepsilon), \quad (4.1)$$

где $B_n(u) = aF_0(u) + bF_n(u)$. Вместо функции $B_n(u)$ можно рассматривать функцию $B_n(\rho)$. Рассмотрим для примера случай $n = 5$. Так как порождающее уравнение Пуанкаре–Понтрягина

$$B_5(\rho) = 0, \quad \rho \in (0, 1), \quad (4.2)$$

имеет при $a \lesssim -1/99$ и $b = 1$ пять вещественных нулей $\rho = \rho_k$, $k = 1, \dots, 5$, в колебательной области и не имеет нулей во вращательной области [3], то у автономного уравнения существует пять предельных циклов (ПЦ) в колебательной области и отсутствуют предельные циклы (второго рода) во вращательной области. На рис. 2 показан случай, когда в колебательной области существует 5 ПЦ, причем один ПЦ близок к сепаратрисе, разделяющей колебательную и вращательную области ($a = -0.011$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.01$).

Итак, если $I_{p1} = I(\rho_k)$, то $B_5^{osc} = 0$.

Качественное поведение решений системы (3.3) с учетом (3.8)–(3.10) легко установить, ибо при $\sigma \neq 0$ система (3.3) не имеет предельных циклов (подробности см. в [7], а также в [3]). Отметим лишь, что при $I_{p1} = I(\rho_k)$ имеет место синхронизация колебаний.

5. Поведение решений в окрестности невозмущенной сепаратрисы

Используя формулу Мельникова [9], установим взаимное расположение сепаратрисных многообразий седлового периодического движения L_ε , порожденного седлом $L_0 : x = \pi$, $\dot{x} = 0$ автономной системы ($c = 0$ в уравнении (1.3)). Прежде всего сделаем в уравнении (1.3) замену

$$x = \xi - \pi + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \quad (5.1)$$

где

$$x_1(t) = \frac{-c\nu}{1 + \nu^2} \cos \nu t. \quad (5.2)$$

В результате, пренебрегая членами $O(\varepsilon^2)$, приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} - \sin \xi = \varepsilon \left((a + (-1)^n b \cos n\xi) \dot{\xi} + \frac{c\nu}{1 + \nu^2} (1 - \cos \xi) \cos \nu t \right). \quad (5.3)$$

При $\xi = \dot{\xi} = 0$ правая часть уравнения (5.3) обращается в нуль для любых t .

Величина $\Delta_\varepsilon = \varepsilon \Delta_1 + O(\varepsilon^2)$ определяет расстояние между сепаратрисными многообразиями седлового периодического движения L_ε .

Используя [9], получаем

$$\begin{aligned} \Delta_1(t_0) = & \int_{-\infty}^{+\infty} [(a + (-1)^n b \cos(n\xi_s(t - t_0))) \dot{\xi}_s(t - t_0) + \\ & + \frac{c\nu}{1 + \nu^2} (1 - \cos \xi_s(t - t_0)) \cos \nu t] \dot{\xi}_s(t - t_0) dt, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\xi_s(t) = \pi + 2 \arcsin(\operatorname{th} t)$, $\dot{\xi}_s(t) = 2/\operatorname{ch} t$. Представим Δ_1 в виде

$$\Delta_1(t_0) = D_0^n + \frac{c\nu}{1 + \nu^2} D_1(t_0), \tag{5.5}$$

где

$$D_0^n = \int_{-\infty}^{+\infty} (a + (-1)^n b \cos(n\xi_s(t - t_0))) \dot{\xi}_s^2(t - t_0) dt,$$

$$D_1(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \xi_s(t - t_0)) \cos \nu t \dot{\xi}_s(t - t_0) dt.$$

Нетрудно показать, что $D_0^n = \pi B_n^{osc}(1)$. Например, при $n = 5$ имеем $D_0^5 = 8a + \frac{8}{99}b$. Далее, находим $D_1(t_0) = A \cos \nu t_0$, где $A = 8 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \nu r}{\operatorname{ch}^3 r} dr = \frac{2\pi(\nu^2 + 1)}{\operatorname{ch}(\pi\nu/2)}$. Поэтому при $\left| \frac{Ac\nu}{1 + \nu^2} \right| > |D_0^n|$ сепаратрисные многообразия трансверсально пересекаются и имеем гомоклиническую структуру Пуанкаре. В частности, гомоклиническую структуру (неинтегрируемость [10]) имеем в консервативном случае, когда $D_0^n = 0$. Отметим, что в неконсервативном случае также возможно $D_0^n = 0$ при $B_n^{osc}(1) = 0$ (предельный цикл автономного уравнения влипаёт в сепаратрисы).

Впервые математически строгое исследование структуры окрестности гомоклинической кривой и гомоклинического контура было проведено Л. П. Шильниковым [11].

6. Численные результаты

Прежде чем говорить о численных результатах, отметим следующее. Согласно (3.9), (3.12) расщепляемыми являются резонансные уровни $I = I_{p_1}$, причем резонансные уровни с большим значением p лежат ближе к невозмущенной сепаратрисе. Ширина резонансной зоны, определяемая амплитудой функции $\tilde{A}_0(\nu, I_{p_1})$, согласно (3.9), (3.12) убывает с ростом p .

Рассмотрим колебательную область и основной резонанс $p = q = 1$. Условие резонанса имеет вид $\omega_1(h_1) = \nu$. Поэтому при увеличении параметра ν резонансный уровень $I = I_{11}$ смещается к состоянию равновесия типа «центр» невозмущенной системы. Если взять начальное значение ν достаточно малое, то при его увеличении резонансный уровень $I = I_{11}$ последовательно будет совпадать с уровнями, порождающими предельные циклы автономного возмущенного уравнения ($\alpha = 0$ в (1.1)). При фиксированном значении параметра ε в резонансную зону могут попадать, например, два ПЦ. Это приводит к существенным отличиям от теоретических исследований, использующих метод малого параметра. Если же ПЦ не попадает в резонансную зону, то у отображения Пуанкаре существует замкнутая инвариантная кривая. При малых значениях ν основной резонанс попадает в окрестность сепаратрисы и резонансная структура разрушается. Поэтому ниже мы берем $\nu \in (0.6, 1)$.

Положим в (1.3) $\varepsilon a = p_1, \varepsilon b = p_2, n = p_3, \varepsilon \alpha = p_4, \nu = p_5$. Зафиксируем $p_1 = -0.0001, p_2 = 0.01, p_3 = 5, p_4 = 0.1$ и будем изменять параметр p_5 . Согласно (2.2) имеем $p_5 \in (0, 1)$. На рисунках 2–6 показаны численные результаты на плоскости $(x, z = \dot{x})$, полученные с помощью программы WInSet [8].

В автономном случае, когда $p_4 = 0$, фазовый портрет уравнения (1.3) показан на рис. 2 (представлены только предельные циклы). Существует 5 предельных циклов: три устойчивых и два неустойчивых. Устойчивые и неустойчивые циклы чередуются. При этом один из



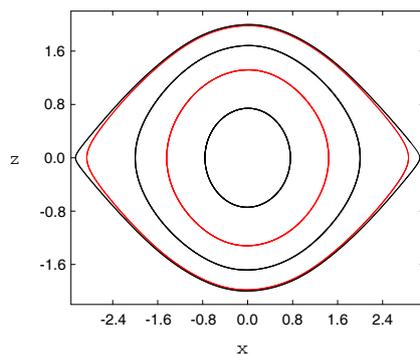


Рис. 2. Предельные циклы автономного уравнения ($p_4 = 0$) при $p_1 = -0.00011$, $p_2 = 0.01$.

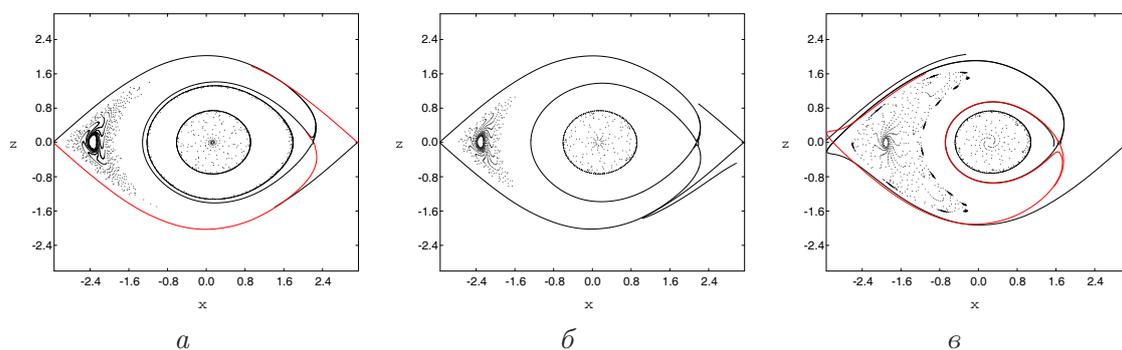


Рис. 3. Сепаратрисы неподвижной точки и другие траектории отображения Пуанкаре при $p_1 = -0.0001$, $p_2 = 0.01$ и (а) $p_5 = 0.68$, (б) $p_5 = 0.69$, (в) $p_5 = 0.8$.

устойчивых циклов близок к сепаратрисному контуру невозмущенного уравнения, разделяющему области колебательных и вращательных движений маятника. Состояние равновесия $O(0, 0)$ — неустойчиво. В области вращательных движений циклы (охватывающие фазовый цилиндр) отсутствуют. Этот численный результат находится в полном соответствии с теорией [3].

При $p_4 = 0.1$ на рис. 3 и 5 показано поведение траекторий и инвариантных кривых отображения Пуанкаре. На рис. 4 показана область притяжения (белый цвет) устойчивого резонансного режима при $p_5 = 0.8$. Граница области притяжения имеет фрактальную структуру. Траектории отображения Пуанкаре для этого случая показаны на рис. 3в.

Начнем с $p_5 = 0.68$ (рис. 3а), когда существуют две замкнутые инвариантные кривые вне резонансной зоны: внутренняя устойчивая и внешняя неустойчивая. При переходе через бифуркационное значение $p_5 = p_5^* \simeq 0.69$ (рис. 3б) внешняя замкнутая кривая (цикл) переходит в резонансную зону (рис. 3в). При переходе p_5 через бифуркационное значение $p_5 = p_5^{**} \simeq 0.83$ (рис. 5а) устойчивый цикл также переходит в резонансную зону. В этом случае в резонансной зоне существуют два цикла: внутренний неустойчивый и внешний устойчивый (рис. 5б). При дальнейшем увеличении p_5 внутренний цикл влипает в резонансную неподвижную точку, изменяя ее устойчивость (рис. 5в). Резонансный режим становится неустойчивым и существует либо устойчивый режим биений, либо резонансный режим «второго рода» более высокого порядка. Вне резонансной зоны при $p_5 \simeq 0.865$ от петли сепаратрисы рождается устойчивый ПЦ, который с увеличением p_5 стягивается в

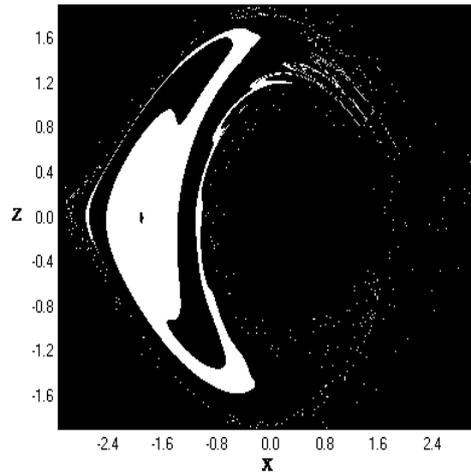


Рис. 4. Область притяжения (белый цвет) устойчивого резонансного режима при $p_5 = 0.8$.

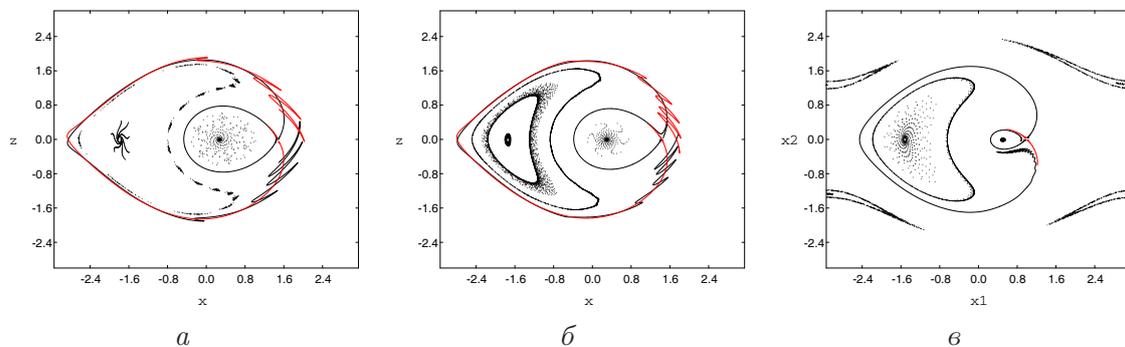


Рис. 5. Сепаратрисы неподвижной точки и другие траектории отображения Пуанкаре при $p_1 = -0.0001$, $p_2 = 0.01$ и (а) $p_5 = 0.83$; (б) $p_5 = 0.84$; (в) $p_5 = 0.89$.

неподвижную точку при $p_5 \simeq 0.888$. Далее, при $p_5 \simeq 0.905$ седловая резонансная и устойчивая нерезонансная точки сливаются и затем исчезают (резонансная структура исчезает). Существует неустойчивая неподвижная резонансная точка и устойчивая замкнутая инвариантная кривая в колебательной области. При дальнейшем увеличении параметра ν вне устойчивой инвариантной кривой появляются неустойчивая и устойчивая (внешняя) инвариантные кривые. Далее, внутренняя устойчивая инвариантная кривая стягивается в неподвижную точку, делая ее устойчивой.

Во вращательной области также может существовать устойчивый резонансный режим, например, при $p = q = 1$ (рис. 5в).

На рис. 6 показан квазиаттрактор, который возникает в результате периодического воздействия на устойчивый предельный цикл автономного уравнения, лежащий вблизи невозмущенной сепаратрисы. В этом случае $D_0 \simeq 0$ в (5.5) и существует гомоклиническая структура Пуанкаре. Здесь, в отличие от предыдущих численных исследований, мы положили $p_4 = 0.01$ для того, чтобы окрестность с квазиаттрактором включала только один устойчивый цикл автономного уравнения.

Отметим, что гомоклинические структуры наблюдаются также и в резонансной зоне основного резонанса (см. рис. 5а, б).

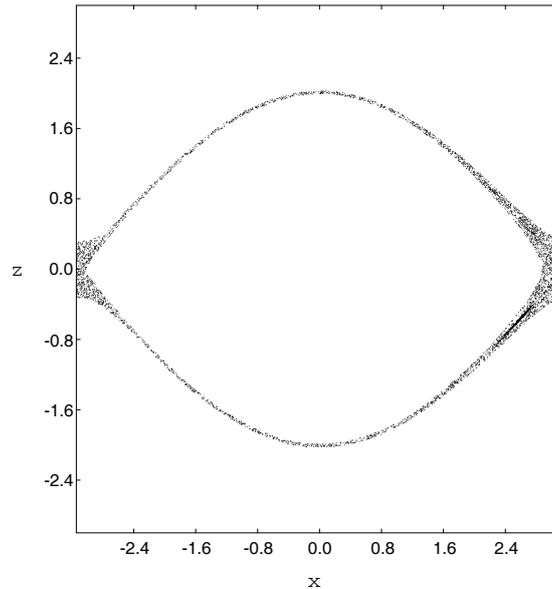


Рис. 6. Квазиаттрактор при $p_1 = -0.0001$, $p_2 = 0.01$, $p_4 = 0.01$, $p_5 = 0.83$.

7. Заключение

Маятниковые уравнения являются одними из основных уравнений в теории нелинейных колебаний. Несмотря на большую историю в их исследовании, мы еще далеки от полного понимания глобального поведения решений. Основные проблемы в исследовании таких уравнений связаны с резонансами и возможностью существования гомоклинических структур Пуанкаре.

Следует также отметить сложность в исследовании резонансных зон маятниковых уравнений, связанную с тем, что собственная частота $\omega_1(k_1)$ маятника на значительной части интервала изменения k_1 остается близкой к единице и существенно убывает лишь при приближении k_1 к единице (на фазовой плоскости — при приближении к сепаратрисе). Это приводит к тому, что резонансные уровни $I = I_{p1}$ с $p > 1$ лежат вблизи невозмущенной сепаратрисы. При наличии периодического возмущения невозмущенная сепаратриса расщепляется, что приводит к разрушению (перекрытию) резонансных зон. Поэтому в наших численных экспериментах фигурирует лишь главный резонанс ($p = q = 1$), который наиболее удален от невозмущенной сепаратрисы и имеет наибольшую ширину резонансной зоны.

Уравнение (1.3) обладает спецификой, связанной с тем, что собственная частота и частота возмущения изменяются на интервале $(0, 1)$. Это приводит к тому, что период возмущения превосходит 2π . При численном анализе отображения Пуанкаре следствием этого являются значительные временные затраты.

Остановимся на основных новых моментах в исследовании системы (1.1), (1.2).

Во-первых, иерархия бифуркаций и различных режимов, связанных с наличием предельных циклов у автономного уравнения. До сих пор был рассмотрен детально лишь случай, когда у автономного уравнения существует один предельный цикл [3]. Исключение составляет рассмотренная в [4] задача о существовании квазиаттракторов в маятниковом уравнении вида (1.3) при $n = 3$. Для получения в резонансной зоне двух замкнутых инвариантных кривых мы положили $n = 5$.

Во-вторых, возможность существования устойчивых режимов биений в резонансной зоне основного резонанса при фиксированной величине параметра ε . Согласно теории, когда параметр ε является малым, такие режимы не могут существовать в силу условия $\sigma = \text{const}$ (см. (3.3),(3.5)).

В-третьих, рассмотрен случай, когда неавтономный член в возмущении представим рядом Фурье, в котором определяющую роль играет основная гармоника, что типично для систем с двумя степенями свободы.

В-четвертых, установлено существование гомоклинической структуры Пуанкаре и связанного с ней квазиаттрактора.

Авторы посвящают статью 75-летию Л. П. Шильникова и 60-летию В. В. Козлова.

Работа поддержана РФФИ, грант №09-01-00356а, а также Минобрнауки в рамках программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 год», НК-13П-13, № П945.

Список литературы

- [1] Struble, R. A. Oscillations of a pendulum under parametric excitation // *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, pp. 121–131.
- [2] Belykh V. N., Pankratova E. V., Pogromsky A. Yu., Nijmeijer H. Two Van der Pol–Duffing oscillators with Huygens coupling // *Proc. 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (Saint Petersburg, Russia, 2008)*.
- [3] Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.–Ижевск: РХД, 2005. 420 с.
- [4] Морозов А. Д. О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа // *ПММ*, 1989, т. 53, вып. 5, с. 721–730.
- [5] Андронов А. А., Витт А. А. К теории захватывания Ван дер Поля // *Собр. трудов А. А. Андропова / А. А. Андронов. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 51–64.*
- [6] Борисюк Г. Н., Борисюк Р. М., Казанович Я. Б., Лузянина Т. Б., Турова Т. С., Цымбалюк Г. С. Осцилляторные нейронные сети. Математические результаты и приложения // *Матем. моделирование*, 1992, т. 4, № 1, с. 3–43.
- [7] Морозов А. Д., Шильников Л. П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // *ПММ*, 1983, т. 47, вып. 3, с. 385–394.
- [8] Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2003. 304 с.
- [9] Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. матем. об-ва*, 1963, т. 12, с. 3–52.
- [10] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // *УМН*, 1983, т. 38, вып. 1, с. 3–67.
- [11] Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // *Матем. сб.*, 1967, т. 74, № 3, с. 378–397.

