УДК 517.9

Нормализация в системе с двумя близкими большими запаздываниями

И. С. Кащенко
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, Россия, г. Ярославль, Советская, 14
iliyask@uniyar.ac.ru

Получено 23 ноября 2009 г.

Работа посвящена локальной динамике дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями в случае, когда оба запаздывания асимптотически велики и относительно близки друг другу. В зависимости от параметров выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Как оказалось, все критические случаи имеют бесконечную размерность. Показано, что роль нормальных форм играют семейства уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Их нелокальная динамика и определяет локальное поведение решений исходных уравнений.

Ключевые слова: запаздывание, нормальные формы, мультистабильность, малый параметр, сингулярное возмущение

I. S. Kashchenko

Normalization in the system with two close large delays

This work deals with local dynamics of difference-differential equation with two delays. Supposed that both delays are asymptotically large and relatively close to each other. In critical cases of equlibrium state stability problem, which all have infinite dimention, special equations – normal forms – were built. Shown that normal forms are Ginzburg-Landau equations.

Keywords: delay, normal forms, multistability, small parameter, singular perturbations
Mathematical Subject Classification 2000: 34K17

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями для многих прикладных задач [1, 2, 3, 4]. Среди них важное место занимают системы, в которых время запаздывания относительно велико. Для уравнений с запаздыванием характерно наличие многих специфических эффектов и явлений, обусловленных тем, что фазовое пространство является бесконечномерным.

Важно отметить, что задачи о локальной (т. е. в малой окрестности стационара) динамике сингулярно возмущенных систем с запаздыванием могут быть достаточно сложными и специфичными. В настоящей работе развивается метод исследования локальной динамики в окрестности состояния равновесия, предложенный в [6, 7, 8].

Одним из простейших и в то же время наиболее часто встречающихся в прикладных задачах [4, 9, 5] уравнением с запаздыванием является скалярное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + F(x, x(t-T)), \quad T > 0. \tag{1}$$

В работах [6, 10, 11, 12] подробно изучена локальная динамика уравнения (1) при условии $T \gg 1$.

Логичным обобщением уравнения (1) является уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + bx(t-T_1) + F(x, x(t-T), x(t-T_1)), \quad T, T_1 > 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) при условии, что T велико, а T_1 фиксировано, было изучено в [8, 13].

В настоящей работе мы изучим особенности динамики (2) при условии, что обе величины запаздывания T и T_1 достаточно большие и относительно близкие друг другу величины, т. е.

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad T_1 = T(1 + \varepsilon c), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{3}$$

Для простоты вычислений будем считать, что в (2) функция F зависит только от первого аргумента

$$F(x, y, z) = f(x).$$

Нелинейную функцию $f(x)$ в окрестности нуля представим в виде

$$f(x) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ \ldots\ .$$

Произведем в (2) стандартную замену времени $t \to tT$. В результате получим более удобную форму записи исходного уравнения:

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-1) + bx(t-1-\varepsilon c) + f(x). \tag{4}$$

Как известно, локальная динамика во многом определяется расположением корней характеристического квазиполинома линеаризованного уравнения

$$\varepsilon\lambda + 1 = e^{-\lambda}[a + be^{-c\varepsilon\lambda}]. \tag{5}$$

Легко показать, что если $|a+b| > 1$, то (5) при малых ε имеет корень с положительной вещественной частью. Таким образом, при этом условии динамика (4) становится нелокальной. Далее будем полагать, что всегда выполнено

$$|a+b| \leqslant 1.$$

1. Низкочастотные колебания

Пусть сначала $|a+b| = 1$. Для того чтобы характеристический квазиполином (5) не имел отделенных от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$ корней с положительной вещественной частью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$1 + abc^2 > 0. \tag{1.1}$$

При сделанных ограничениях, ситуация во многом повторяет ситуацию, возникающую в уравнениях с одним запаздыванием (см. [6, 10, 11]). Кратко опишем основные результаты.

Пусть

$$a = a_0 - \varepsilon^2 a_1, \quad b = b_0 - \varepsilon^2 b_1, \quad a_0 + b_0 = -1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0.$$

Сделаем в исходном уравнении замену

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon u(t_1, \tau) + \varepsilon^2 x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^3 x_3(t_1, \tau) + \ldots, \tag{1.2}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $t_1 = (1 - (1 + b_0 c)\varepsilon + (1 + b_0 c)^2 \varepsilon^2)t$, а $x_2(\cdot, \tau)$ и $x_3(\cdot, \tau)$ являются π-периодичными функциями. Подставляя этот ряд в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на третьем шаге получим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3, \tag{1.3}$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \tag{1.4}$$

Эта система параболического типа играет роль нормальной формы для (4) в рассматриваемом случае. Приведем основной результат.

Теорема 1. *Пусть краевая задача (1.3), (1.4) имеет решение $u_*(\tau, r)$. Тогда при достаточно малых ε уравнение (4) имеет асимптотическое по невязке на луче $t \geqslant 0$ решение $x_*(t, \varepsilon)$. Причем*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_*(\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t) + o(\varepsilon).$$

Отметим, что из этого утверждения мы не можем сделать вывод, существует ли у (4) точное решение с приведенной асимптотикой. Можем лишь сказать, что если u_* неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно заведомо неустойчиво. Поэтому рассматривать нужно только устойчивые решения (1.3), (1.4). Однако если u_* имеет определенный вид, то сформулировать утверждение о существовании и устойчивости у (4) соответствующего точного решения можно.

Теорема 2. *Пусть (1.3), (1.4) имеет периодическое по τ грубое решение $u_*(\tau, r)$. Тогда, при малых ε, уравнение (4) имеет близкое к периодическому решение*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_*(\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 - (1 + b_0 c)\varepsilon + (1 + b_0 c)^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2))t) + o(\varepsilon)$$

той же устойчивости.

Если

$$a = a_0 - \varepsilon^p a_1,\ b = b_0 - \varepsilon^p b_1,\ a_0 + b_0 = -1,\ 1 + a_0 b_0 c^2 > 0,\ 0 < p < 2, \tag{1.5}$$

то подстановка, аналогичная (1.2), имеет вид

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u(\tau, t_1) + \varepsilon^p x_2(t_1,\tau) + \varepsilon^{3p/2} x_3(t_1,\tau) + \ \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $t_1 = (\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\omega,\varepsilon) - \omega(1+b_0 c)\varepsilon^{p/2})t$, а функции $x_2(\cdot,\tau)$ и $x_3(\cdot,\tau)$ предполагаются π-периодинчыми. Параметр $\omega > 0$ выбирается произвольно, а $\theta(\omega,\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ таково, что выражение $\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta$ нечетно кратно π. Подставим это в (4) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Из разрешимости соответствующих уравнений получим семейство параболических задач, зависящих от положительного параметра ω:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3, \tag{1.6}$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}). \tag{1.7}$$

Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место.

Теорема 3. *Пусть при некотором $\omega > 0$ краевая задача (1.6), (1.7) имеет решение $u_*(\tau, r)$. Тогда при достаточно малых ε уравнение (4) имеет асимптотическое по невязке на луче $t \geqslant 0$ решение $x_*(t,\varepsilon)$. Причем*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_*(\varepsilon^p(1 + o(1))t, (\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\omega,\varepsilon) + o(1))t) + o(\varepsilon^{p/2}).$$

Теорема 4. *Пусть при некотором $\omega > 0$ краевая задача (1.6), (1.7) имеет периодическое по τ грубое решение $u_*(\tau, r)$. Тогда, при малых ε, уравнение (4) имеет решение, близкое к периодическому,*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_*(\varepsilon^p(1 + o(1))t, (\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\omega,\varepsilon) + o(1))t) + o(\varepsilon^{p/2})$$

той же устойчивости.

Случай $a + b = 1$ менее интересен. Кратко приведем результаты. Если

$$a = a_0 + \varepsilon^2 a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b_1, \quad a_0 + b_0 = 1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0,$$

то роль нормальной формы играет задача параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2 \tag{1.8}$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \tag{1.9}$$

В случае, если

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1, \quad a_0 + b_0 = 1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0, \quad 0 < p < 2,$$

то в качестве нормальной формы получим семейство краевых задач (1.8) с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}). \tag{1.10}$$

Задачи (1.8), (1.9) и (1.8), (1.10) могут иметь устойчивыми лишь пространственно-однородные состояния равновесия, которые, очевидно, не зависят от ω. В силу этого динамика (4) описывается следующим образом.

Теорема 5. *Если $a_1 + b_1 < 0$, то при малых ε нулевое решение уравнения (4) асимптотически устойчиво. Все решения из его малой, но не зависящей от ε окрестности, стремятся к нулю.*

Если $a_1 + b_1 > 0$, то при малых ε нулевое решение уравнения (4) неустойчиво, а в его окрестности существует асимптотически устойчивое близкое к постоянному решение вида

$$x_* = -\varepsilon^p (a_1 + b_1) f_2^{-1} (1 + o(1)).$$

Таким образом, если $a + b$ близко по модулю к 1, наличие второго большого запаздывания не приводит к принципиальному усложнению динамики.

2. Высокочастотные колебания

Изучим теперь динамику (4) при условии

$$|a + b| < 1. \tag{2.1}$$

Отметим (см. [10, 11]), что в аналогичной ситуации уравнение (1) обладает тривиальной динамикой: все решения из малой окрестности стремятся к нулю. Добавление второго, близкого запаздывания, существенно усложняет поведение решений.

Анализируя корни характеристического квазимногочлена (5), можно выделить критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. Введем несколько обозначений. Положим

$$\alpha = (a + b)^2, \quad \beta = ab, \tag{2.2}$$

и при фиксированных значениях $\alpha \in (0, 1)$ и $c > 0$ рассмотрим систему двух уравнений

$$R(\omega) = \omega^2 + 1 - \alpha + 2\beta(1 - \cos(c\omega)) = 0 \tag{2.3}$$

и

$$R'(\omega) = 2[\omega + \beta c \sin(c\omega)] = 0 \tag{2.4}$$

относительно неизвестных вещественных $\omega > 0$ и β. Обозначим через ω_0 и β_0 корни этой системы, если они существуют. В случае, если корней несколько, берем тот, где значение β_0 наибольшее. Если корней нет, положим $\beta_0 = -\infty$. Отметим, что всегда $\beta_0 < 0$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие (2.1) и $\beta > \beta_0$. Тогда, при достаточно малых ε все корни характеристического квазиполинома (5) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$.*

Лемма 2. *Пусть выполнено (2.1) и $\beta < \beta_0$. Тогда при достаточно малых значениях ε квазиполином (5) имеет корень с вещественной частью, которая имеет положительный предел при $\varepsilon \to 0$.*

Обоснование этих утверждений стандартно, поэтому мы его опустим. Отметим, что в условиях леммы 1 все решения (4) из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Таким образом, в рассмотрении нуждается «критический» случай, когда в (4) $\beta = \beta_0$. Из (2.2) имеем

$$a, b = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha - 4\beta}).$$

Положим сначала в (4)

$$a = a_0 + \varepsilon^2 a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b_1, \quad a_0, b_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha - 4\beta_0}).$$

Из (2.3) вытекает, что

$$\left|(i\omega_0 + 1)(a_0 + b_0 \exp(-ic\omega_0))^{-1}\right| = 1.$$

Вещественное значение $\Omega \in [0, 2\pi)$ определим равенством

$$e^{-i\Omega} = (i\omega_0 + 1)(a_0 + b_0 \exp(-ic\omega_0))^{-1}.$$

Наконец, через $\theta_0(\varepsilon)$ обозначим такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что выражение $\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0(\varepsilon)$ является кратным 2π.

Относительно корней характеристического квазиполинома (5) можно тогда утверждать следующее: имеется счетное множество таких корней $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, асимптотика которых имеет вид

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_0(\varepsilon) + 2k\pi + \Omega\right) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + \ldots, \tag{2.5}$$

а все остальные корни (5) имеют отрицательные вещественные части, отделенные от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. При этом $\operatorname{Re}\lambda_{k1} = 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{k2} = -4k^2\pi^2 d_1$.

Похожая ситуация была исследована в [8, 10, 13]. Подставим в исходное уравнение

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(\exp((\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0 + \Omega)it)u(\tau, t) + \text{к.с.}\right) + \varepsilon^2 x_2(t\varepsilon^{-1}, t, \tau) + \varepsilon^3 x_3(t\varepsilon^{-1}, t, \tau),$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а x_2 и x_3 являются периодическими по первым двум аргументам. В результате стандартных действий получим, что роль нормальной формы в этом случае играет параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2\frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + d u|u|^2 \tag{2.6}$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \tag{2.7}$$

Здесь d_1, $d_2 = d_2(\theta_0(\varepsilon))$, $d_3 = d_3(\theta_0(\varepsilon))$ и d — некоторые комплексные числа, причем $\operatorname{Re} d_1 > 0$. Формулы для их вычисления могут быть записаны явно, однако они являются весьма громоздкими, поэтому приводить их мы не будем.

Важно, что коэффициенты d_2 и d_3 зависят через θ_0 от ε. Если $\varepsilon \to 0$, то θ_0 принимает каждое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$ бесконечное количество раз. Таким образом, даже небольшое изменение параметра ε может привести к существенным изменениям в динамике.

Теорема 6. *Пусть последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такова, что $\theta_0(\varepsilon_n) \equiv \xi$. Пусть при $\varepsilon = \varepsilon_n$ (2.6), (2.7) имеет решение $u_*(\tau, r)$. Тогда исходное уравнение имеет асимптотическое по невязке на последовательности ε_n решение вида*

$$x(t,\varepsilon_n) = \varepsilon_n\left(\exp((\omega_0\varepsilon_n^{-1} + \Omega + \xi)it)u_*(\varepsilon_n^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t) + \textit{к.с.}\right) + o(\varepsilon_n).$$

Утверждение о существовании точного решения с приведенной асимптотикой здесь сформулировать затруднительно. Однако если $u_*(\tau, r)$ неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно неустойчиво.

Аналогичным образом разбирается ситуация

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1, \quad a_0, b_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha - 4\beta_0}), \quad 0 < p < 2.$$

В этом случае для корней характеристического квазиполинома (5) асимптотическую формулу удобно записать в следующем виде:

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \frac{\omega k}{\varepsilon^{1-p/2}} + k\theta(\varepsilon) + \theta_0(\varepsilon) + \Omega\right) + \varepsilon^{p/2}\lambda_{k1} + \varepsilon^p \lambda_{k2} + \ \ldots . \tag{2.8}$$

Здесь $\omega \geqslant 0$ — произвольное фиксированное число, а $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ дополняет $\omega\varepsilon^{1-p/2}$ до значения, кратного 2π.

Подстановка, аналогичная предыдущей, имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2}\left(\exp((\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0 + \Omega)it)u(\tau, t_1) + \text{к.с.}\right) + \varepsilon^p x_2 + \varepsilon^{3p/2}x_3 + \ \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $t_1 = (\omega\varepsilon^{1-p/2} + \theta + o(1))t$, а $x_j = x_j(t\varepsilon^{-1}, t_1, \tau)$ периодичны по первым двум аргументам. Производя те же действия, что и ранее, в качестве нормализованной формы мы получим набор краевых задач

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2\frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + du|u|^2, \tag{2.9}$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}). \tag{2.10}$$

Теорема, аналогичная теореме 6, имеет место.

Теорема 7. *Пусть при фиксированном $\omega > 0$ и $\theta_0 = \xi$ система (2.9), (2.10) имеет решение $u_*(\tau, r)$. Тогда исходное уравнение имеет асимптотическое по невязке решение вида*

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2}(\exp((\omega_0\varepsilon^{-1} + \Omega + \theta(\varepsilon))it)u_*(\varepsilon^p t, (\varepsilon^{1-p/2} + \omega^{-1}\theta + o(1))t) + \textit{к.с.}) + o(\varepsilon^{p/2}),$$

где ε таково, что $\theta_0(\varepsilon) = \xi$.

3. Обобщения

В заключение рассмотрим следующую ситуацию. Пусть вместо (3) выполняется

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad T_1 = T(1 + \varepsilon^q c), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad q > 0. \tag{3.1}$$

Тогда после стандартной замены времени исходное уравнение приводится к виду

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-1) + bx(t - 1 - \varepsilon^q c) + f_2x^2 + f_3x^3 + \ \ldots . \tag{3.2}$$

Характеристический квазимногочлен линеаризованного в нуле уравнения (3.2) принимает вид

$$\varepsilon\lambda + 1 = e^{-\lambda}(a + be^{-c\varepsilon^q\lambda}). \tag{3.3}$$

Если $q > 1$, то для (3.2) эта ситуация в главном эквивалентна случаю $c = 0$, т. е. случаю, когда оба запаздывания равны. Будем далее считать, что $0 < q < 1$.

Лемма 3. *Пусть $|a|+|b|>1$, тогда характеристический квазиполином (3.3) имеет корень с положительной вещественной частью, отделенный от мнимой оси. В этом случае нулевое решение (3.2) неустойчиво, и в некоторой достаточно малой (но не зависящей от ε) его окрестности нет устойчивых режимов.*

Пусть $|a|+|b|<1$, тогда все корни характеристического квазиполинома (3.3) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. В этом случае нулевое решение (3.2) асимптотически устойчиво, все решения из некоторой достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля стремятся к нулю.

Если $|a|+|b|=1$, то у характеристического уравнения (3.3) не существует корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси, и существует бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, необходимо провести дополнительные исследования при условии $|a|+$ $+|b|=1$. Асимптотика корней (3.3), стремящихся к мнимой оси, существенно зависит от точного значения параметра q. Справедливы следующие формулы:

$$\lambda = \frac{\omega}{\varepsilon^q}i + \lambda_0(\varepsilon)i + \varepsilon^{1-q}\lambda_1(\varepsilon)i + \varepsilon^{2-2q}\lambda_2(\varepsilon), \quad \frac{1}{2} \leqslant q < 1; \tag{3.4}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\varepsilon^q}i + \lambda_0(\varepsilon)i + \varepsilon^{q}\lambda_1(\varepsilon)i + \varepsilon^{2q}\lambda_2(\varepsilon), \quad 0 < q < \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

В этих формулах ω, λ_0, λ_1 и λ_2 — это действительные числа, причем λ_0, λ_1 и λ_2 имеют порядок $O(1)$. Для определения ω и λ_0 в обоих случаях справедливы равенства

$$\omega = \frac{2\pi k}{c}, \quad \lambda_0(\varepsilon) = 2\pi k\theta(\varepsilon) + 2\pi n, \quad a>0, b>0; \tag{3.6}$$

$$\omega = \frac{\pi(2k+1)}{c}, \lambda_0(\varepsilon) = 2\pi k\theta(\varepsilon) + \theta_1(\varepsilon) + 2\pi n, \quad a>0, b<0; \tag{3.7}$$

$$\omega = \frac{\pi(2k+1)}{c}, \lambda_0(\varepsilon) = \pi(2k+1)\theta(\varepsilon) + 2\pi n, \quad a<0, b>0; \tag{3.8}$$

$$\omega = \frac{2\pi k}{c}, \lambda_0(\varepsilon) = 2\pi k\theta(\varepsilon) + \pi(2n+1), \quad a<0, b<0. \tag{3.9}$$

Главные части λ_1 и λ_2 теперь определяются без труда. Введем в рассмотрение значение p_*, которое вычисляется по правилу

$$p_* = \begin{cases} 2-2q, & \frac{1}{2} \leqslant q < 1, \\ 2q, & 0 < q < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Будем далее считать, что параметры a и b таковы, что значение выражения $|a|+|b|$ близко к единице. Положим

$$a = a_0 + \mathrm{sign}(a_0)\varepsilon^{p_*}a_1, \quad b = b_0 + \mathrm{sign}(b_0)\varepsilon^{p_*}b_1, \quad |a_0|+|b_0| = 1. \tag{3.10}$$

Первый случай. Пусть $a_0 \geqslant 0$, $b_0 \geqslant 0$.

При $\frac{1}{2} \leqslant q < 1$ в качестве нормальной формы получаем следующую систему

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1+b_1)u + f_2u^2, \tag{3.11}$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \tag{3.12}$$

Динамика этой задачи проста: устойчивы только пространственно-однородные состояния равновесия. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть краевая задача (3.11), (3.12) имеет экспоненциально устойчивое пространственно-однородное состояние равновесия u_*. Тогда исходное уравнение (3.2) имеет асимптотически устойчивое решение с асимптотикой*

$$x_* = \varepsilon^{2-2q} u_*(1 + o(1)).$$

Если $0 < q < \frac{1}{2}$, то нормализованная форма принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 b_0 c^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \theta^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + (a_1 + b_1) u + f_2 u^2, \tag{3.13}$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s) = u(\tau, r, s + 1). \tag{3.14}$$

Эта система является вырожденной. Однако, зная ее решения, мы можем находить асимптотические по невязке решения исходного уравнения (3.2).

Теорема 9. *Пусть система (3.13), (3.14) имеет решение $u_*(\tau, r, s)$. Тогда исходное уравнение (3.2) имеет асимптотическое по невязке на луче $t \geqslant 0$ решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{2q} u_* \left(\varepsilon^{2q} t, (\frac{1}{c\varepsilon^q} + \theta - \varepsilon^q b_0 c \theta + o(\varepsilon^q)) t, (1 - \varepsilon^q b_0 c + o(\varepsilon^q)) t \right) + o(\varepsilon^{2q}).$$

Второй случай. Пусть $a_0 \geqslant 0$, $b_0 < 0$. Если $\frac{1}{2} \leqslant q < 1$, то роль нормализованной формы играет система

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1) u + \left(\frac{2 f_2^2}{1 - a_0 - b_0} + f_3 \right) u^3, \tag{3.15}$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \tag{3.16}$$

Связь между решениями нормализованной формы и исходного уравнения (3.2) описывает следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть (3.15), (3.16) имеет решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (3.2) имеет асимптотическое по невязке на луче $t \geqslant 0$ решение*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p_*/2} u_* \left(\varepsilon^{p_*} t, (c^{-1} \varepsilon^{-q} + \theta - \varepsilon^{p_*/2} c^{-1} + o(\varepsilon^{p_*/2})) t \right) + o(\varepsilon^{p_*/2}).$$

Если $0 < q < \frac{1}{2}$, то нормализованной формой уравнения (3.2) является краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{|a_0||b_0|c^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \theta^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + (a_1 + b_1) u + \left(\frac{2 f_2^2}{1 - a_0 - b_0} + f_3 \right) u^3, \tag{3.17}$$

$$u(\tau, r, s) = -u(\tau, r + 1, s) = -u(\tau, r, s + 1). \tag{3.18}$$

Теорема 11. *Пусть краевая задача (3.17), (3.18) имеет решение $u_*(\tau, r, s)$. Тогда уравнение (3.2) имеет асимптотическое по невязке решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^q u_* \left(\varepsilon^{2q} t, (\frac{1}{c\varepsilon^q} + \theta - \varepsilon^q b_0 c \theta + o(\varepsilon^q)) t, (1 - \varepsilon^q b_0 c + o(\varepsilon^q)) t \right) + o(\varepsilon^q).$$

Третий случай. Пусть $a_0 < 0$, $b_0 > 0$. Если $\frac{1}{2} \leqslant q < 1$, то в качестве нормализованной формы мы получим краевую задачу (3.15)–(3.16). Соответственно, будет верна и теорема 10.

Если $0 < q < \frac{1}{2}$, то роль нормализованной формы будет играть уравнение (3.17) с краевыми условиями

$$u(\tau, r, s) = -u(\tau, r+1, s), \quad u(\tau, r, s) = u(\tau, r, s+1). \tag{3.19}$$

Теорема, аналогичная теореме 11, имеет место.

Четвертый случай. Пусть, наконец, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Тогда при $\frac{1}{2} \leqslant q < 1$ нормализованная форма принимает вид параболической краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + \left(f_2^2 + f_3\right)u^3, \tag{3.20}$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \tag{3.21}$$

В этом случае также верна теорема, аналогичная теореме 10.

Если же $0 < q < \frac{1}{2}$, то роль нормализованной формы играет уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 b_0 c^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\theta^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s}\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) + (a_1 + b_1)u + \left(f_2^2 + f_3\right)u^3 \tag{3.22}$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r+1, s), \quad u(\tau, r, s) = -u(\tau, r, s+1). \tag{3.23}$$

4. Выводы

Применим сказанное выше к численно-аналитическому исследованию конкретных систем с фиксированными числовыми параметрами. Пусть нам дано уравнение вида (4)

$$\frac{dx}{dt} + x = (a_0 - \mu_1)x(t - T) + (b_0 - \mu_2)x(t - T - c) + f_2 x^2 + f_3 x^3,$$

где $a_0 + b_0 = -1$. После замены $t \to tT$ оно принимает вид

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} + x = (a_0 + \mu_1)x(t-1) + (b_0 + \mu_2)x(t - 1 - \varepsilon c) + f_2 x^2 + f_3 x^3,$$

где $\varepsilon = T^{-1}$. Мы будем полагать, что значение ε некоторым образом фиксировано и при этом «достаточно мало».

Кроме того, будем считать, что параметры μ_1 и μ_2 также фиксированы и «достаточно малы». Представим μ_1 и μ_2 в виде $\mu_1 = \varepsilon^p a_1$, $\mu_2 = \varepsilon^p b_1$. Параметр p отсюда выражается как $p = \log_\varepsilon \mu_1 - \log_\varepsilon a_1 = \log_\varepsilon \mu_2 - \log_\varepsilon b_1$. Нас будут интересовать такие значения a_1 и b_1, что они не являются ни слишком малыми, ни слишком большими относительно ε. Можно считать, что a_1 и b_1 принадлежат некоторым интервалам.

Для каждой пары значений a_1, b_1 (для которых $0 < p < 2$) рассмотрим нормальную форму вида (1.6), (1.7), считая $\omega > 0$ произвольным параметром:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}). \tag{4.1}$$

Рассмотрим постоянные по τ решения (4.1). Они определяются краевой задачей

$$\frac{d^2u}{dr^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3 = 0, \quad u(r + \frac{\pi}{\omega}) = -u(r). \tag{4.2}$$

Можно показать, что при $f_2^2 + f_3 > 0$ существует $\omega = \omega_* > 0$, такое, что (4.2) имеет решение $u_0(r; a_1, b_1)$. Причем только одно собственное значение линеаризованной на u_0 задачи (4.1) равно нулю, а все остальные отрицательны. В силу этого, $u_0(r; a_1, b_1)$ является устойчивым решением нормальной формы. Тогда в силу теоремы 4 у исходного уравнения существуют устойчивые решения, близкие к

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_0((\omega_* \varepsilon^{p/2-1} + \theta(\omega_*, \varepsilon) + o(1))t; a_1, b_1). \tag{4.3}$$

При разных значениях a_1 и b_1 мы будем получать разные значения p, ω_* и u_0. Т. е. наше уравнение при одних и тех же параметрах имеет несколько устойчивых режимов вида (4.3), количество которых неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$. Этот результат подтверждается численными расчетами, приведенными в [14, 15, 16].

Аналогичные рассуждения можно провести и в других изученных в работе случаях.

Список литературы

[1] Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.

[2] Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

[3] Кузнецов С. П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика, 1982, т. 25, вып. 12, с. 1410–1428.

[4] Kilias T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W. Electromic chaos generators – design and applications // Internat. J. Electronics, 1995, vol. 79, no. 6, pp. 737–753.

[5] Кащенко С. А., Майоров В. В. Модели волновой памяти. М.: Либроком, 2009. 286 с.

[6] Кащенко С. А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференц. ур-ния, 1989, т. 25, № 8, с. 1448–1451.

[7] Кащенко С. А. Уравнения Гинзбурга–Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1998, т. 38, № 3, с. 457–465.

[8] Кащенко С. А. Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференц. ур-ния, 1999, т. 35, № 10, с. 1343–1355.

[9] Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Н., Шарковский А. Н. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986. 279 с.

[10] Кащенко И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 2008, т. 48, № 12, с. 2141–2150.

[11] Кащенко И. С. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Докл. РАН, 2008, т. 421, № 5, с. 586–589.

[12] Кащенко И. С. Численный анализ локальной динамики одного уравнения с запаздыванием // Математика, кибернетика, информатика: Тр. междунар. научн. конф. памяти А. Ю. Левина / С. А. Кащенко, В. А. Соколов. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 111–114.

[13] Кащенко И. С., Кащенко С. А. Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с большим запаздыванием // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам., 2008, т. 16, № 4, с. 137–146.

[14] Wolfrum M., Yanchuk S. Eckhaus Instability in Systems with Large Delay // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, 220201.

[15] Кащенко И. С. Буферность в уравнениях второго порядка с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем, 2008, т. 15, № 2, с. 31–35.

[16] Кащенко И. С. Численный анализ локальной динамики одного уравнения с запаздыванием // Математика, кибернетика, информатика: Тр. междунар. научн. конф. памяти А. Ю. Левина / С. А. Кащенко, В. А. Соколова. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 111–114.