

## Вынужденная синхронизация периодических колебаний в системе с фазовой мультистабильностью

С. А. Коблянский, А. В. Шабунин, В. В. Астахов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410026, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83

koblyansky-s@mail.ru, alexey@chaos.ssu.runnet.ru, astakhov@chaos.ssu.runnet.ru

*Получено 15 декабря 2009 г.*

В работе исследуется явление вынужденной синхронизации периодических автоколебаний в системе с мультистабильностью. В качестве примера рассматривается два линейно связанных генератора с инерционной нелинейностью. Обнаружено, что внешнее воздействие, при определенной амплитуде, может существенно менять структуру фазового пространства мультистабильной системы, в результате чего выход из соответствующих областей синхронизации для синфазных и несинфазных колебаний происходит по различным сценариям.

Ключевые слова: синхронизация, мультистабильность

S. Koblyanskiy, A. Shabunin, V. Astakhov

### Forced synchronization of periodic oscillations in a system with phase multistability

The phenomenon of forced synchronization of periodic oscillations in the multistable system is studied by the example of two linear coupled modified oscillators with inertial nonlinearity. It was found out that external forcing at certain amplitudes can sufficiently change the structure of the phase space of the system. As a result, the synchronous regime breaking for in-phase and non-in-phase oscillations proceeds in accordance with different scenarios.

Keywords: synchronization, multistability

Mathematical Subject Classification 2000: 39Axx, 93C10

## 1. Введение

Синхронизация колебаний под действием внешней силы — одно из классических и хорошо изученных явлений в теории колебаний. В радиофизике работы по синхронизации начинаются с первой половины 20 века, когда было обнаружено свойство захвата частоты колебаний триодного генератора периодическим сигналом [1, 2]. Подробный теоретический анализ данного явления был сделан в работах А. А. Андропова с соавторами [3, 4]. Фундаментальные результаты по синхронизации периодических колебаний с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений и теории бифуркаций были получены В. И. Арнольдом [5]. В дальнейшем синхронизация периодических колебаний применительно к автоколебательным системам разного вида и различной природы была исследована и описана во множестве научных работ, включая ряд монографий [6–11].

Несмотря на множество проведенных исследований, в задаче о вынужденной синхронизации все еще остаются «белые пятна». Как правило, они касаются тех случаев, когда фазовое пространство автоколебательной системы имеет более высокую размерность и более сложную структуру по сравнению с единственным устойчивым предельным циклом на фазовой плоскости. Одной из таких особенностей, усложняющих структуру фазового пространства, является мультистабильность. Мультистабильность системы может приводить к определенным особенностям в проявлении эффекта синхронизации. Некоторые аспекты этой задачи применительно к хаотической синхронизации рассматривались в работе [12].

Под мультистабильностью понимают сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов. Если такими аттракторами являются предельные циклы, то при внешнем воздействии на систему будет наблюдаться явление синхронизации периодических колебаний. Может ли мультистабильность влиять на закономерности этой синхронизации? Ответ на этот вопрос нетривиален. С одной стороны, сосуществующие аттракторы разделены в фазовом пространстве многообразиями седловых предельных множеств и не взаимодействуют друг с другом. Поэтому можно ожидать, что, выбирая начальные условия в бассейне одного или другого цикла, мы будем наблюдать классическое явление синхронизации для выбранного режима, на которое сосуществующие аттракторы не влияют. С другой стороны, разделяющие бассейны притяжения многообразия под действием внешнего воздействия также могут изменяться и, при определенных условиях разрушаться. В этом случае, очевидно, что мультистабильная система будет вести себя иначе, чем моностабильная.

Один из случаев мультистабильности — фазовая мультистабильность [13, 14], когда сосуществующие аттракторы отличаются друг от друга значениями разности фаз между колебаниями подсистем. Данное явление наблюдается, как правило, в ансамблях слабосвязанных автогенераторов. Так, например, при исследовании динамики двух взаимодействующих систем с бифуркациями удвоения периода было обнаружено, что при слабой диссипативной связи в фазовом пространстве происходит удвоение числа сосуществующих устойчивых предельных циклов после каждой бифуркации. При этом разным мультистабильным состояниям отвечают режимы, при которых колебания в подсистемах оказываются одинаковыми по форме, но отстающими друг от друга по времени на интервалы, кратные периоду исходного предельного цикла. Таким образом, в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы, отличающиеся по значениям разностей фаз между временными реализациями в подсистемах.

Закономерности развития фазовой мультистабильности в двух связанных фейгенбаумовских системах хорошо изучены [13–15]. В частности, было показано, что в формировании мультистабильности определяющую роль играют бифуркации седловых периодических

орбит, т. е. неустойчивых предельных множеств, соответствующих ненаблюдаемым в эксперименте колебаниям. Одни из этих орбит при изменении параметров приобретают устойчивость, другие определяют границы между бассейнами притяжения сосуществующих аттракторов. Таким образом, фазовое пространство в системах с фазовой мультистабильностью оказывается более сложно устроенным, чем в обычных автоколебательных системах с единственным устойчивым предельным циклом. Влияет ли эта сложность на процессы вынужденной синхронизации — этот вопрос и является основной целью данного исследования.

В работе мы рассматриваем систему двух связанных генераторов с бифуркациями удвоения периода при значениях параметров, соответствующих сосуществованию в фазовом пространстве двух устойчивых предельных циклов периода два. Это наиболее простой случай фазовой мультистабильности. Воздействуя на одну из подсистем внешней гармонической силой, с частотой, близкой к собственной частоте генераторов, мы исследуем процессы синхронизации колебаний как с точки зрения наблюдаемых эффектов, так и с точки зрения бифуркаций, приводящих к этим эффектам.

## 2. Исследуемая система и исходные колебательные режимы

Рассмотрим два генератора с инерционной нелинейностью (ГИН), связанных посредством линейной диффузионной симметричной связи на один из генераторов воздействует внешний гармонический сигнал

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= mx_1 - x_1 z_1 + y_1 + \varepsilon(x_2 - x_1) + A \sin(\omega t), \\ \dot{y}_1 &= -x_1, \\ \dot{z}_1 &= -0.2[z_1 - f(x_1)], \\ \dot{x}_2 &= mx_2 - x_2 z_2 + y_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= -x_2, \\ \dot{z}_2 &= -0.2[z_2 - f(x_2)], \\ f(x_{1,2}) &= \exp(x_{1,2}) - 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$  и  $z_{1,2}$  — динамические переменные первой и второй подсистемы,  $m$  — управляющий параметр каждого из генераторов,  $\varepsilon$  — коэффициент связи. Первый из генераторов находится под действием внешней периодической силы с амплитудой  $A$  и круговой частотой  $\omega$ .

Рассмотрим сначала поведение автономной системы ( $A = 0$ ). Генератор с инерционной нелинейностью — автоколебательная система, демонстрирующая переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Ее поведение с нелинейной функцией  $f(x) = x^2 h(x)$ , где  $h(x)$  — функция Хевисайда, достаточно подробно исследовано во множестве работ (см., например, [16]). В случае экспоненциальной нелинейности, рассматриваемом в настоящем исследовании, поведение ГИН остается качественно тем же, демонстрируя лишь количественные расхождения. Колебания генератора рождаются при  $m = 0$  в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. При увеличении  $m$ , при  $m = 0.73$  происходит бифуркация удвоения периода: исходный однооборотный цикл теряет устойчивость, и в его окрестности появляется устойчивый двухоборотный предельный цикл. Затем, при росте параметра, наблюдается бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при  $m = 0.974$  переходом к хаосу.

Динамика связанных генераторов сложнее, чем одиночного генератора. Рассмотрим типичные бифуркации, наблюдающиеся в связанных генераторах при небольших значениях  $m$ .

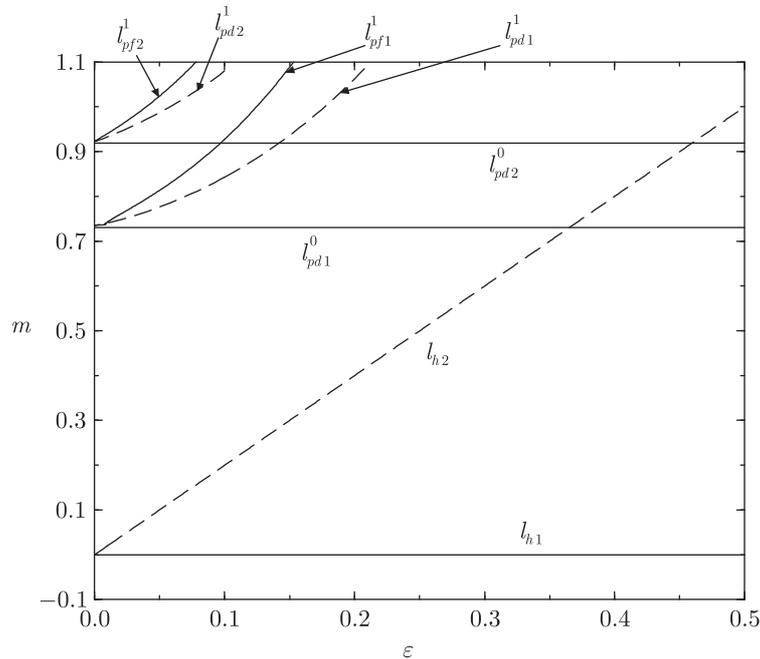


Рис. 1: Бифуркации предельных циклов в связанных генераторах

Расположение бифуркационных линий на плоскости параметров «связь–возбуждение» приведено на рис. 1. При  $m = 0$  состояние равновесия в начале координат  $P = (0; 0; 0; 0; 0; 0)$  претерпевает бифуркацию Андронова–Хопфа (линия  $l_{h1}$ ), в результате которой в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл  $1C^0$ , соответствующий синфазным колебаниям в подсистемах. На линии  $l_{h2}$  ставшее седлом состояние равновесия теряет устойчивость еще в одном направлении. В его окрестности рождается седловой предельный цикл  $1C_s$ . Этот предельный цикл остается неустойчивым в рассматриваемой области параметров и не участвует в процессе формирования мультистабильности, поэтому в дальнейшем он рассматриваться не будет.

Вернемся к исследованию устойчивых синфазных колебаний  $1C^0$ . При изменении параметров на базе данного цикла наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, ведущих к формированию хаотического аттрактора, расположенного в симметричном подпространстве  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ , который также будем называть синфазным хаотическим аттрактором. На рис. 1 построены две бифуркационные линии этого каскада:  $l_{pd1}^0$  и  $l_{pd2}^0$ . На первой из них старший мультипликатор цикла  $1C^0$  достигает значения  $-1$ , причем собственный вектор, соответствующий мультипликатору, направлен по касательной к подпространству симметрии ( $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ ). В результате в окрестности цикла рождается устойчивый синфазный предельный цикл  $2C^0$ , соответствующий колебаниям удвоенного периода. Аналогичная бифуркация, но уже для цикла  $2C^0$ , наблюдается на линии  $l_{pd2}^0$ . В дальнейшем происходят последующие бифуркации удвоения периода, формирующие синфазный хаотический аттрактор. Эти бифуркационные линии на рисунке не приведены.

Указанный каскад бифуркаций удвоения периода — не единственный. Каждый из синфазных предельных циклов, участвующих в нем, претерпевает еще одну бифуркацию удво-

ения периода. На рис.1 показаны две бифуркационные линии этого каскада:  $l_{pd1}^1$  и  $l_{pd2}^1$ . На первой из них ставший седловым предельный цикл  $1C^0$  претерпевает вторую бифуркацию удвоения периода: его следующий мультипликатор достигает значения  $-1$ , причем собственный вектор, соответствующий этому мультипликатору, направлен перпендикулярно подпространству симметрии ( $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ ). В результате в окрестности  $1C^0$  рождается седловой несинфазный цикл удвоенного периода  $2C^1$ , для которого характерно отставание колебаний во втором генераторе от колебаний в первом на полпериода (или на период исходного цикла  $1C^0$ ). Аналогичная бифуркация происходит на линии  $l_{pd2}^1$ , но уже для цикла  $2C^0$ . Подобные бифуркации наблюдаются и для циклов больших периодов, эти бифуркационные линии на рисунке не приведены.

Несинфазные циклы, появившиеся в результате второго каскада бифуркаций удвоения периода, являются неустойчивыми. Однако при дальнейшем росте  $m$  с ними происходит еще одна бифуркация — субкритическая бифуркация вил. Так, на линии  $l_{pf1}$  седловой предельный цикл  $2C^1$  претерпевает бифуркацию вил, в результате которой он становится устойчивым, а в его окрестности рождается пара симметричных друг другу седловых циклов  $2C_{s1}$  и  $2C_{s2}$ . Аналогичная бифуркация имеет место с циклом  $4C^2$  на линии  $l_{pf2}$ . Подобные бифуркации имеют место на базе каждого из несинфазных циклов, возникших в результате бифуркаций удвоения периода синфазных циклов. Таким образом, в результате последовательности бифуркаций удвоения периода и бифуркаций вил в фазовом пространстве кроме устойчивых синфазных циклов появляются устойчивые несинфазные. В дальнейшем на базе каждого из несинфазных циклов происходит свой каскад бифуркаций удвоения периода, в результате чего в системе возникает развитая мультистабильность. Данный сценарий является типичным для связанных систем с удвоениями периода и описан в ряде работ [17].

### 3. Синхронизация колебаний при фазовой мультистабильности

Итак, в соответствии с описанным выше сценарием, усложнение формы колебаний в автономной системе (2.1) ведет к увеличению числа сосуществующих аттракторов. Наиболее простым случаем мультистабильности является сосуществование двух предельных циклов  $2C^0$  и  $2C^1$ . Данный случай и будет исследоваться в дальнейшем. Выберем значения управляющих параметров  $m = 0.92$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . В фазовом пространстве сосуществуют два устойчивых предельных цикла периода два:  $2C^0$  и  $2C^1$ .

Эти аттракторы соответствуют режимам, при которых в каждом из генераторов наблюдаются периодические колебания удвоенного периода одинаковой формы, но сдвинутые относительно друг друга на время  $\tau = 0$  (рис. 2 а) и  $\tau = T/2$  (рис. 2 б), где  $T$  — период колебаний исходного цикла  $1C^0$ . Различие между этими двумя режимами проявляется также во взаимных фазовых спектрах: для синфазных колебаний разности фаз на любых частотах очевидно равны нулю, а для  $2C^1$  разности фаз на основной частоте и гармониках равны нулю, а на субгармониках  $-\pi/2$ . Поскольку оба предельных цикла являются аттракторами, у каждого из них существует свой бассейн притяжения. Элементами, разграничивающими бассейны притяжения сосуществующих предельных циклов, являются притягивающие инвариантные многообразия седловых предельных циклов  $2C_{s1}$  и  $2C_{s2}$ . Структура фазового пространства (в сечении Пуанкаре) приведена на рис. 3.

Предельным циклам, расположенным в полном фазовом пространстве, соответствуют точки на секущей Пуанкаре. Поскольку циклы двухоборотные, для каждого цикла таких точек две. Кроме того, на рисунке схематически изображены сечения инвариантных много-

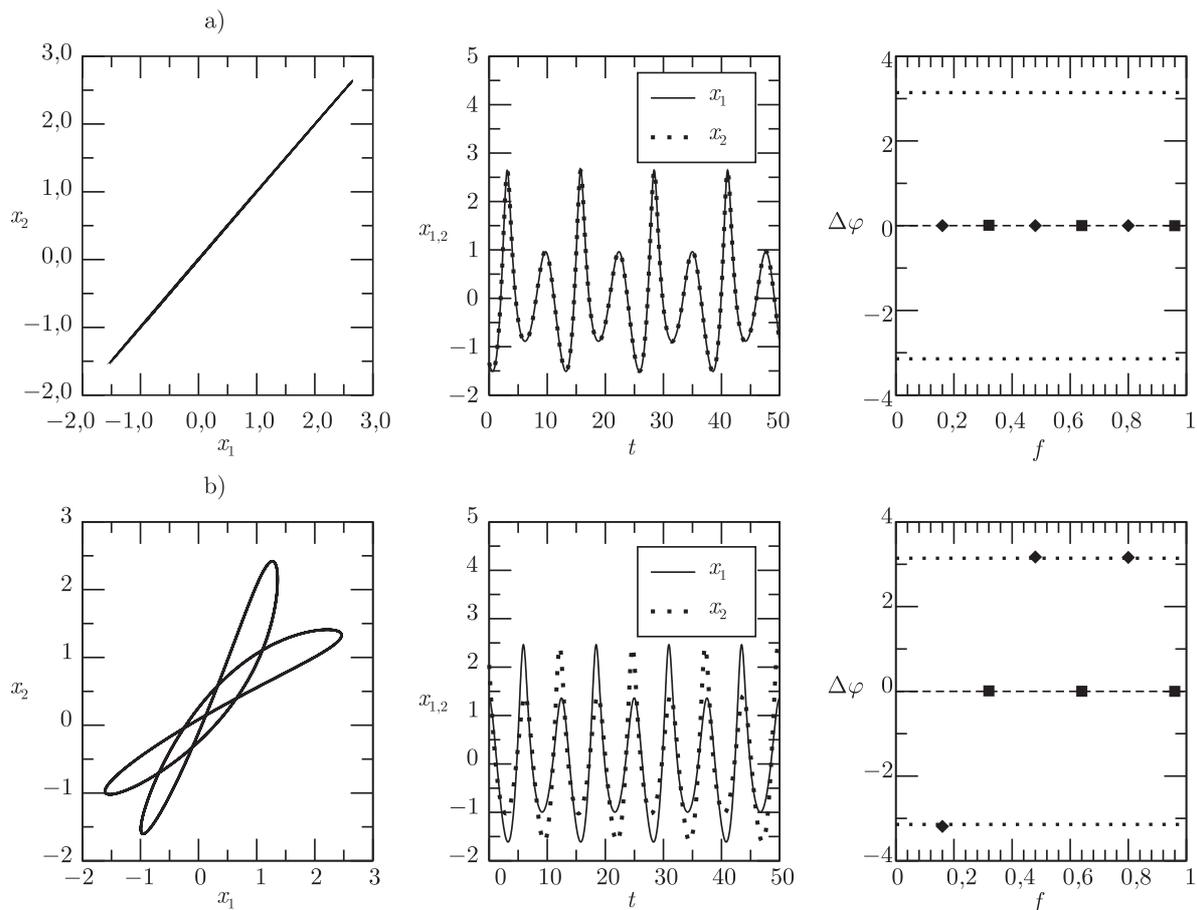


Рис. 2: Колебательные режимы  $2C^0$  (а) и  $2C^1$  (б) при отсутствии внешнего воздействия. Значения параметров:  $m = 0.92$ ,  $\varepsilon = 0.1$

образий циклов. Притягивающие многообразия седловых циклов  $2C_{s1}$  и  $2C_{s2}$ , играющие роль в разграничении бассейнов притяжения  $2C^0$  и  $2C^1$ , отмечены жирными линиями.

Рассмотрим, к каким эффектам приведет внешнее периодическое воздействие. На линии  $A = 0$  все указанные выше предельные циклы, включая неустойчивые, претерпевают бифуркацию Неймарка–Сакера, в результате которой из циклов рождаются двумерные двухоборотные торы  $2C \rightarrow 2T$ . Структура фазового пространства при этом останется схожей с изображенной на рис. 3, с той разницей, что вместо точек в сечении появятся замкнутые инвариантные кривые. В фазовом пространстве вместо двух устойчивых предельных циклов будут сосуществовать два притягивающих двумерных тора, которые обозначим как  $2T^0$  и  $2T^1$ . Образованные из циклов  $2C_{s1}$  и  $2C_{s2}$  седловые двумерные торы  $2T_{s1}$  и  $2T_{s2}$  являются разграничивающими элементами для их бассейнов притяжения.

Поскольку система (2.1) при выбранных значениях параметров характеризуется бистабильностью, выбор между сосуществующими торами осуществляется посредством выбора начальных условий. Выберем значение частоты воздействия  $\omega$  вблизи единицы и будем плавно увеличивать от нуля интенсивность воздействия  $A$ . При определенных соотношениях между  $A$  и  $\omega$  наблюдается эффект синхронизации на каждом из торов  $2T^0$  и  $2T^1$  в определенной области параметров  $A, \omega$ . Области синхронизации для каждого из этих режимов, а также связанные с синхронизацией бифуркационные переходы для обоих из указанных режимов отличаются друг от друга.

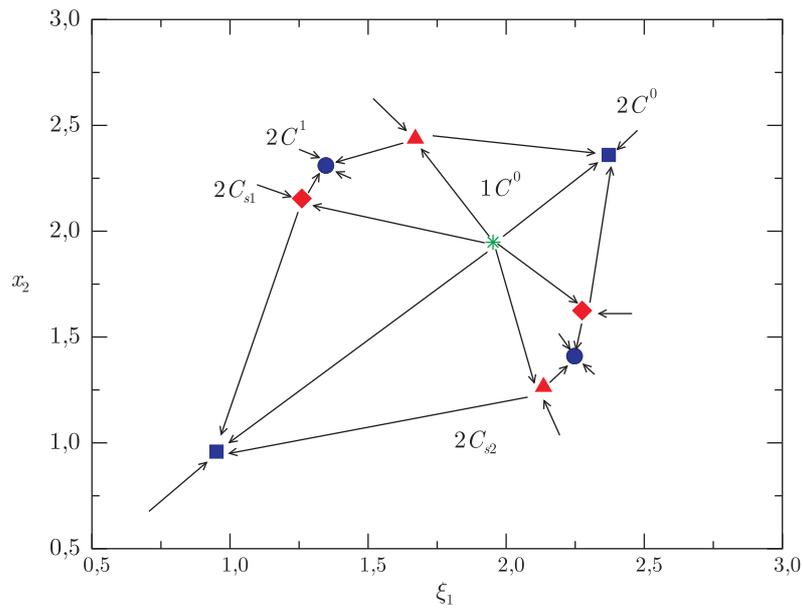


Рис. 3: Структура фазового пространства в окрестности предельных циклов  $2C^0$  и  $2C^1$

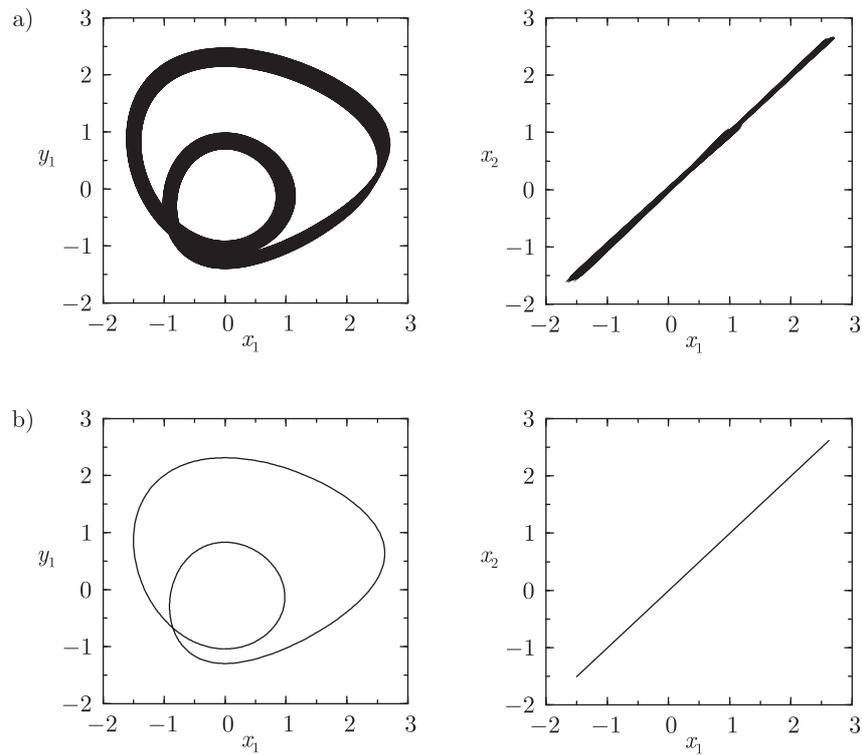


Рис. 4: Режимы на базе  $2C^0$ : (а)  $2T^0$  при  $A = 0.015$ ,  $\omega = 1.2$ , (б)  $2C_N^0$  при  $A = 0.015$ ,  $\omega = 1.004$

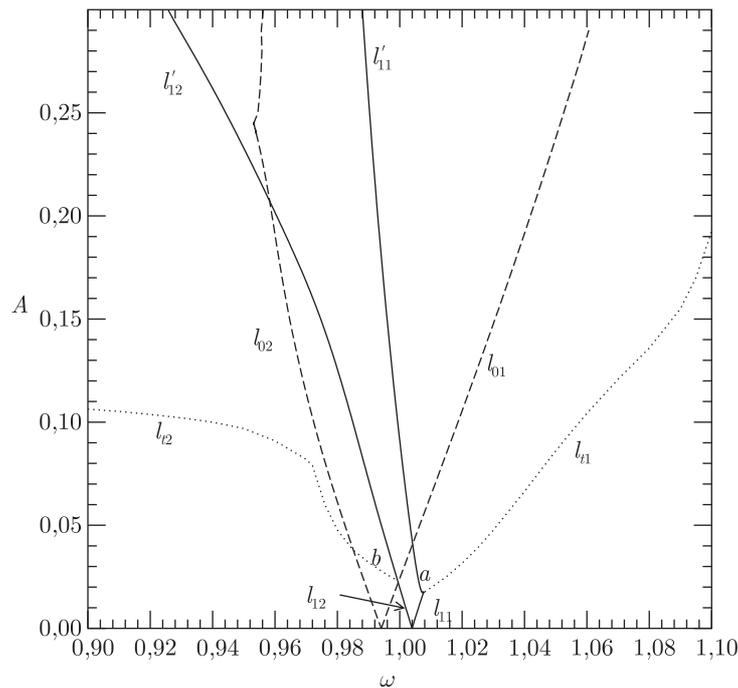


Рис. 5: Расположение областей синхронизации на торах  $2T^1$  и  $2T^0$  на плоскости параметров «частота – амплитуда воздействия»

Рассмотрим вначале эволюцию колебаний на базе аттрактора  $2T^0$ . Проекция фазового портрета этого аттрактора построена на рис. 4 а. Выберем начальные условия, соответствующие данному режиму и, меняя амплитуду и частоту внешнего воздействия, будем отслеживать качественные изменения в динамике системы. Результаты анализа изображены на рис. 5. При определенном соотношении между амплитудой и частотой воздействия наблюдается синхронизация на торе  $2T^0$ . Область синхронизации располагается между штриховыми линиями  $l_{01}$  и  $l_{02}$ , которые являются линиями седло-узловых бифуркаций предельных циклов, рождающихся на торе.

При пересечении этих линий на торе возникает пара циклов периода два: устойчивый  $2C_N^0$  и седловой  $2C_S^0$ . Проекция фазового портрета для устойчивого предельного цикла показаны на рис. 4 б. Как видно из рисунка, колебания  $2C_N^0$  сохраняют свойства исходного цикла  $2C^0$ : колебания в каждом из генераторов практически идентичны и синфазны. Таким образом, эволюция колебаний на базе режима  $2C^0$  происходит типичным образом: рождение двумерного тора и синхронизация на торе.

Перейдем теперь к рассмотрению колебательных режимов, образующихся на базе несинфазного цикла  $2C^1$ . Включение внешнего воздействия приводит к мягкому рождению двумерного тора  $2T^1$  (рис. 6 а).

Если частота воздействия близка к собственной частоте ( $\omega \simeq 1.004$ ), то при малых значениях  $A \leq 0.17$  наблюдается синхронизация на торе. На линиях  $l_{11}$  и  $l_{12}$  (рис. 5) в результате седло-узловых бифуркаций рождается пара предельных циклов: устойчивый  $2C_N^1$  и седловой  $2C_S^1$ . Устойчивый предельный цикл  $2C_N^1$  соответствует режиму вынужденной синхронизации. Он существует в области, ограниченной на рис. 5 сплошными линиями  $l_{11}$ ,  $l_{12}$ ,  $l'_{11}$  и  $l'_{12}$ . Проекция фазового портрета данного режима представлена на рис. 6 б. При выходе из области синхронизации вправо и влево ниже точек  $a$  и  $b$  из резонансного цикла  $2C_N^1$  рождается эргодический тор  $2T^1$ .

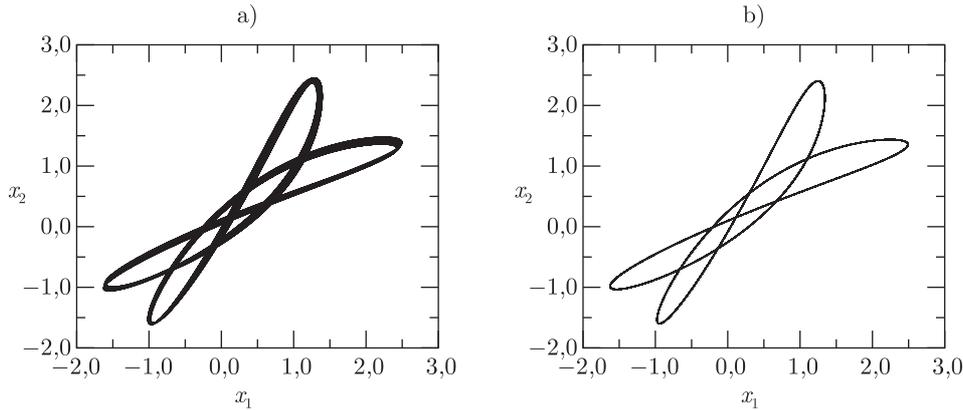


Рис. 6: Проекция фазового портрета (а) квазипериодических колебаний  $2T^1$  при  $A = 0.015$ ,  $\omega = 1.2$  и (б) синхронных колебаний  $2C_N^1$  при  $A = 0.015$ ,  $\omega = 1.004$

Таким образом, при малых  $A$  синхронизация колебаний на базе обоих предельных циклов  $2C^0$  и  $2C^1$  происходит одинаково и по стандартной схеме. Однако, при больших значениях  $A$  эта схожесть в их поведении нарушается. Рассмотрим, что будет происходить с колебаниями на базе  $2C^1$  при больших значениях амплитуды воздействия. Если выбрать значение частоты воздействия внутри области синхронизации, выше точки  $a$ , то при пересечении линии  $l'_{11}$  наблюдается жесткий переход с предельного цикла  $2C_N^1$  на режим, соответствующий синфазным колебаниям ( $2C_N^0$  или  $2T^0$ ). Этот переход является необратимым: при обратном изменении параметров возвращения на исходный предельный цикл  $2C_N^1$  не происходит. Переход за линию  $l'_{12}$  выше точки  $b$  при уменьшении частоты воздействия также приводит к необратимому исчезновению несинфазного режима. В отличие от области синхронизации для синфазных колебаний, границы области синхронизации для несинфазных колебаний устроены иначе. Обращает на себя внимание тот факт, что правая граница области синхронизации является негладкой. В то время как линия  $l'_{12}$  продолжает линию  $l_{12}$  за точку  $b$ , линии  $l_{11}$  и  $l'_{11}$  имеют характерный излом в точке  $a$ . Более того, выше этой точки граница области синхронизации в сторону больших частот наклонена в обратную сторону. Все это говорит о том, что при  $A > 0.18$  бифуркационный механизм, ответственный за разрушение синхронизации, меняется.

Таким образом, при выходе из области синхронизации при больших значениях амплитуды больше не наблюдается квазипериодических колебаний  $2T_1$ . Если выбрать значение частоты воздействия вне области синхронизации, где при малых  $A$  наблюдаются квазипериодические колебания  $2T^1$ , а затем начать плавно увеличивать значение амплитуды воздействия, то при некотором значении  $A$  будет наблюдаться необратимый переход с тора  $2T^1$  на колебательный режим, созданный на базе цикла  $2C^0$ . Таким образом, для эргодического тора  $2T^1$  существует верхняя граница по параметру  $A$ , выше которой он не наблюдается. Данная граница обозначена на рисунке 5 пунктирными линиями  $l_{t1}$  и  $l_{t2}$ .

#### 4. Особенности бифуркационного механизма выхода из синхронизации для случая мультистабильности

Рассмотрим более детально, что происходит с колебаниями  $2C_N^1$  и  $2T^1$  при больших значениях величины воздействия  $A$ . Прежде всего, заметим, что поскольку в этом случае

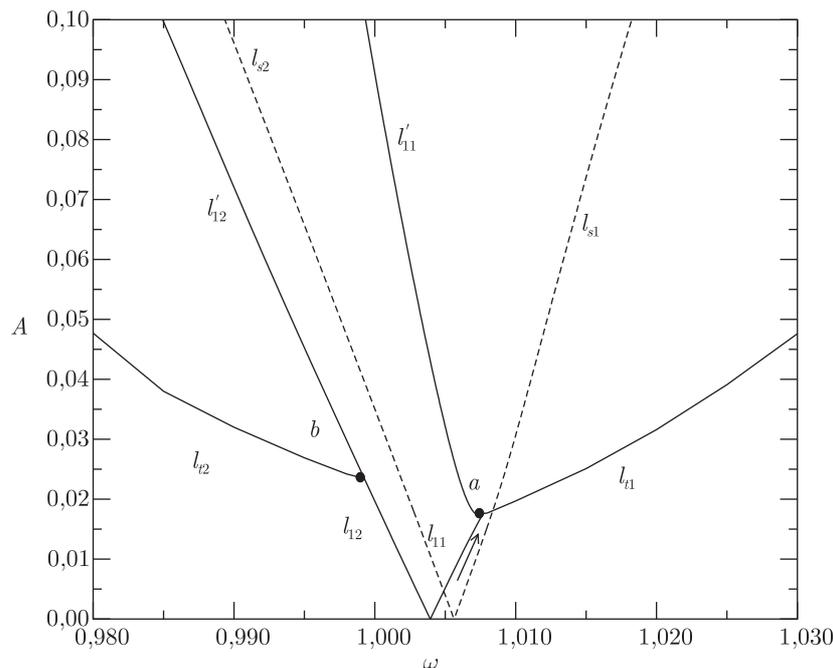


Рис. 7: Структура области синхронизации для режимов на базе  $2C^1$

наблюдается жесткий переход на один из синфазных колебательных режимов, в системе должны иметь место бифуркации, разрушающие границу между бассейнами притяжения аттракторов, образованных из  $2C^0$  и  $2C^1$ .

Напомним, что в автономной системе граница между бассейнами притяжения определялась притягивающими многообразиями седловых предельных циклов  $2C_{s1}$  и  $2C_{s2}$ , которые при включении периодического воздействия трансформировались в седловые двумерные торы  $2T_{s1}$  и  $2T_{s2}$  соответственно. Рост амплитуды внешней силы приводит к увеличению «толщины» двумерных торов, поэтому, при определенном значении параметра  $A$ , должно произойти их касание. Проследить за бифуркациями эргодических торов достаточно сложно, однако можно исследовать поведение резонансных торов.

Как уже было сказано выше, в результате седло-узловой бифуркации на притягивающем торе  $2T^1$  появляется пара циклов  $2C_N^1$  и  $2C_S^1$ . Аналогично, в результате синхронизации на каждом из седловых торов  $2T_{s1}$  и  $2T_{s2}$ , в результате седло-седловых бифуркаций появляется по паре седловых предельных циклов:  $2C_{s11}$ ,  $2C_{s12}$  и  $2C_{s21}$ ,  $2C_{s22}$ , соответственно. На рисунке 7 в более крупном масштабе воспроизведена область синхронизации для колебаний на базе  $2T^1$  и добавлена область синхронизации на одном из седловых торов ( $2T_{s2}$ ). Эта область ограничена штриховыми линиями  $l_{s1}$  и  $l_{s2}$ . При пересечении этих линий в результате седло-седловой бифуркации происходит рождение неустойчивых предельных циклов  $2C_{s21}$  и  $2C_{s22}$  на седловом торе  $2T_{s2}$ .

Для того чтобы проследить за взаимным расположением торов  $2T^1$  и  $2T_{s2}$ , выберем значения параметров  $A$  и  $\omega$  в той области, где сосуществуют эргодический притягивающий тор  $2T^1$  и седловые циклы на непритягивающем торе  $2T_{s2}$ :  $2C_{s21}$  и  $2C_{s22}$ . Поскольку тор  $2T^1$  устойчив, его проекцию можно построить прямым интегрированием системы (2.1). Координаты неустойчивых циклов  $2C_{s21}$  и  $2C_{s22}$  могут быть получены при использовании специальных программ бифуркационного анализа периодических решений дифференциальных уравнений. В нашем случае мы использовали программу AUTO [18].

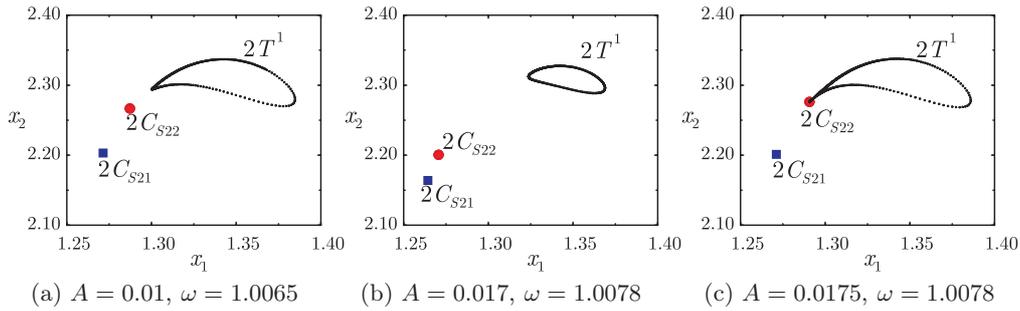


Рис. 8: Изменение взаимного расположения тора и седловых циклов

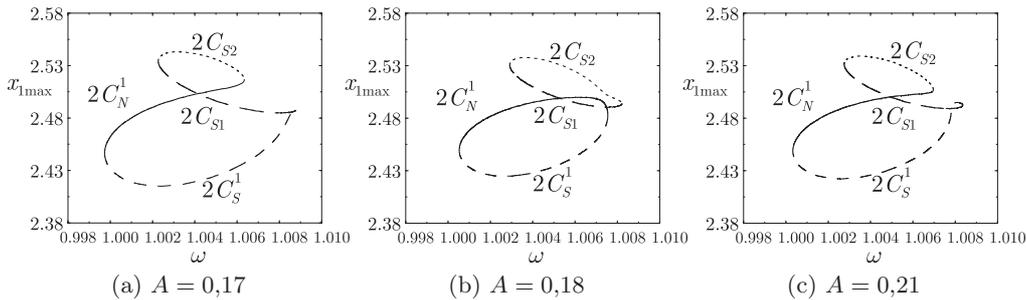


Рис. 9: Бифуркационные диаграммы предельных циклов

Будем менять значения управляющих параметров в соответствии со стрелкой, изображенной на рис. 7. Для каждого из значений построим сечение Пуанкаре для тора  $2T^1$  и предельных циклов  $2C_{s21}$  и  $2C_{s22}$ . Результаты расчетов приведены на рис. 8. При небольших значениях  $A \simeq 0.01$  оба предельных цикла располагаются вдали от тора  $2T^1$  (рис. 8 а). Увеличение амплитуды воздействия при движении по параметру вдоль стрелки на рис. 7 ведет к постепенному сближению устойчивого тора и седловых циклов  $2C_{s21}$  и  $2C_{s22}$  (рис. 8 б). Наконец, при приближении к границе существования устойчивого тора  $2T^1$  (линия  $l_{t1}$  на рис. 7) наблюдается практически полное сближение седловых циклов с тором (рис. 8 с), что свидетельствует о том, что вблизи этой точки происходит касание торов  $2T^1$  и  $2T_{s2}$ , после которого устойчивые квазипериодические колебания  $2T^1$  более не наблюдаются.

Рассмотрим теперь, что происходит с рассматриваемыми выше предельными множествами внутри пересечения областей синхронизации на торах  $2T^1$  и  $2T_{s2}$ , т.е. там, где оба тора становятся резонансными. Будем следить за предельными циклами  $2C_N^1$  и  $2C_S^1$ , расположенными на резонансном торе  $2T^1$  и предельными циклами  $2C_{s21}$  и  $2C_{s22}$ , расположенными на резонансном торе  $2T_{s2}$ . Выберем сначала небольшое значение силы воздействия  $A = 0.017$ , которое соответствует «обычному» случаю синхронизации, т.е. ниже точек  $a$  и  $b$ . Будем менять частоту воздействия  $\omega$  и следить за максимальными значениями переменной  $x_1$  на каждом из указанных циклов. Соответствующая бифуркационная диаграмма построена на рис. 9 а. Из рисунка видно, что при  $\omega \simeq 1.0005$  и при  $\omega \simeq 1.0075$  происходит слияние и исчезновение циклов  $2C_N^1$  и  $2C_S^1$ , то есть наблюдается отмеченная ранее седло-узловая бифуркация циклов на торе  $2T^1$ . Независимо от этих бифуркаций, при  $\omega \simeq 1.0027$  и  $\omega \simeq 1.0085$  наблюдаются слияния и исчезновения седловых циклов  $2C_{s21}$  и  $2C_{s22}$ , то есть указанные выше седло-седловые бифуркации циклов на торе  $2T_{s2}$ . Увеличим  $A$  до значения  $A = 0,018$ , что немного превышает значение амплитуды воздействия в точке  $b$  на рис. 7.



Характер бифуркаций, происходящих при выходе из областей синхронизации в сторону уменьшения частоты воздействия, не изменился. Здесь наблюдаются те же самые седло-узловые бифуркации циклов  $2C_N^1$ ,  $2C_S^1$  и  $2C_{s11}$ ,  $2C_{s12}$  соответственно. Но картина бифуркаций, происходящих при увеличении частоты воздействия, поменялась (рис. 9б). Теперь при  $\omega \simeq 1,007$  происходит седло-узловая бифуркация уже между циклами  $2C_N^1$  и  $2C_{s11}$ , которые принадлежали разным торам:  $2T^1$  и  $2T_{s1}$ . При  $\omega \simeq 1.0085$  происходит слияние и исчезновение циклов  $2C_S^1$  и  $2C_{s12}$ , также принадлежавших разным торам.

## 5. Заключение

Мы рассмотрели синхронизацию двух сосуществующих двухоборотных периодических колебаний в бистабильной системе под действием внешней периодической силы. При малой амплитуде воздействия синхронизация на базе обоих предельных циклов происходит идентичным образом: в результате седло-узловой бифуркации на торе. При больших амплитудах воздействия эта симметрия нарушается: в то время как выход из области синхронизации для синфазных колебаний ведет к переходу с периодических колебаний к квазипериодическим, выход за границу зоны синхронизации для несинфазных колебаний сопровождается разрушением бистабильности и уходом на единственный оставшийся синфазный аттрактор. Исследование устройства фазового пространства показали, что изменения в поведении бистабильной системы происходят вследствие влияния воздействия на неустойчивые предельные множества, многообразия которых разграничивают бассейны притяжения сосуществующих режимов.

Работа выполнена при поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» и РФФИ, грант №08-02-00081.

## Список литературы

- [1] Appleton E. V. The automatic synchronization of triode oscillator // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1922, vol. 21, pp. 231–248.
- [2] Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance // Phil. Mag., 1927, vol. 3, pp. 64–80.
- [3] Андронов А. А., Витт А. А. К математической теории захватывания // Журн. прикл. физики, 1930, т. 7, вып. 4, с. 3–20.
- [4] Андронов А. А., Витт А. А. Собрание трудов. М.: АН СССР, 1930. С. 70–84.
- [5] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
- [6] Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 896 с.
- [7] Демьянченко А. Г. Синхронизация генераторов гармонических колебаний. М.: Энергия, 1976. 240 с.
- [8] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
- [9] Blekhnman I. I., Landa P. S., Rosenblum M. G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // Appl. Mech. Rev., 1995, vol. 11, p. 1, pp. 733–752.
- [10] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // Радиотехника и электроника, 2002, т. 47, с. 133–165.

- [11] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [12] Pisarchik A. N., Jaimes-Reátegui R., Villalobos-Salazar J. R., García-López J. H., and Boccaletti S. Synchronization of chaotic systems with coexisting attractors // Phys. Rev. Lett., 2006, vol. 96, 244102, 4 p.
- [13] Астахов В. В., Безручко Б. П., Ерастова Е. Н., Селезнев Е. П. Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ, 1990, т. 60, № 10, с. 19–26.
- [14] Астахов В. В., Безручко Б. П., Гуляев Ю. П., Селезнев Е. П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, № 3, с. 60–65.
- [15] Астахов В. В., Безручко Б. П., Пономаренко В. И. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // Известия ВУЗов. Радиофизика, 1991, т. 34, № 1, с. 35–38.
- [16] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [17] Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E, 2001, vol. 63, 056212, 9 p.
- [18] AUTO: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differentiation equations, <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/>.