

Качественный анализ относительного движения трех вихрей

А. И. Гудименко, А. Д. Захаренко

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН
690041, Россия, Владивосток, ул. Балтийская, 43.

algud@poi.dvo.ru, zakharenko@poi.dvo.ru

Получено 23 февраля 2010 г.

Исследуется качественная структура и предложена классификация фазовых портретов относительного движения трех точечных вихрей в идеальной жидкости.

Ключевые слова: точечные вихри, относительное равновесие, устойчивость, алгебраическая редукция

A. I. Gudimenko, A. D. Zakharenko

Qualitative analysis of relative motion of three vortices

Qualitative structure of relative motion of three point vortices on the unbounded plain is studied. A classification of phase portraits is proposed.

Keywords: point vortices, relative equilibria, stability, algebraic reduction
Mathematical Subject Classification 2000: 37N10, 76B47

1. Введение

Считается, что наиболее полный качественный анализ относительного движения трех точечных вихрей содержится в [1]. Однако результаты этой работы не очень наглядны (см. соответствующие комментарии в [2, 3]), что вызвано реальной сложностью задачи и неадекватным, по нашему мнению, способом редукции абсолютного движения вихрей к относительному. Недавняя работа [3] частично исправила ситуацию в контексте исследования устойчивости относительного равновесия трех вихрей. Однако и в этой работе используется «наивная» редукция.

Ставя задачу исследования устойчивости относительного движения вихрей, авторы работ [1, 3] реально исследуют возмущения абсолютного движения вихрей, что обусловлено тем, что обычные уравнения относительного движения (уравнения на m_i в формуле (2.5)) не допускают прямой линеаризации в окрестности коллинеарной конфигурации вихрей. В результате анализ устойчивости усложняется; в частности, он вынужденно ограничен линейным приближением.

Метод алгебраической редукции [2, 4, 5, 6] предлагает специальную форму записи уравнений относительного движения (см. раздел 2), при которой не возникает проблем с линеаризацией. Особенностью метода является представление уравнений движения в виде двумерной гамильтоновой (канонической) системы. Нелинейный анализ устойчивости таких систем хорошо развит [10] и может быть использован в нашем случае. Отметим, что данный метод уже показал свою эффективность при построении асимптотик абсолютного движения вихрей [7, 8, 9].

В настоящей работе на основе метода алгебраической редукции предложен вариант качественного анализа относительного движения трех вихрей. Мы ставим задачу по заданным значениям интенсивностей и интегралов движения восстановить с точностью до топологической эквивалентности фазовый портрет относительного движения вихрей. Эта задача включает две подзадачи. Первая — восстановление локальной структуры фазового портрета, т. е. информации о числе, типе и устойчивости стационарных конфигураций вихрей. Вторая — восстановление глобальной структуры фазового портрета, что предполагает изучение фазовых траекторий на предмет их ограниченности, а также исследование возможных типов соединения особых точек сепаратрисами.

Решение задачи о числе и типе особых точек приведено в разделе 3. При рассмотрении стационарных коллинеарных конфигураций вихрей мы не апеллируем, как в работах [1, 3], к алгебраическим методам решения кубического уравнения, а сводим задачу к элементарному анализу на экстремумы подходящей функции (см. формулу (3.1) и предложения 1, 2). При этом мы расширяем стандартную классификацию стационарных коллинеарных конфигураций вихрей [2], что далее существенно используется в вопросах устойчивости. Предложение 3 содержит решение задачи для коллинеарных конфигураций. Полное решение задачи для всех типов стационарных конфигураций вихрей суммировано в диаграммах (см. рис. 2, 3, а также таблицы рис. 4).

Устойчивость стационарных конфигураций вихрей исследуется в разделе 4. В отличие от работ [1, 3] мы даем полное решение задачи об устойчивости этих конфигураций относительно возмущений, сохраняющих интегралы движения (теорема (1)). При нашем подходе нелинейный анализ устойчивости требуется провести только для так называемой критической коллинеарной конфигурации; результаты анализа приведены в предложении 7. Полное описание локальной структуры фазового портрета относительного движения трех вихрей содержится в таблицах (рис. 4) и комментариях к ним. В отношении коллинеарных кон-

фигураций эти таблицы согласуются с соответствующей таблицей работы [3] и дополняют ее в точках бифуркаций. Отметим, что, несмотря на то, что мы познакомились с работой [3] уже на завершающем этапе нашего исследования, мы успели позаимствовать из нее удачные обозначения для элементов таблиц.

Рассмотрению глобальной структуры фазового портрета посвящен заключительный раздел 5. Здесь мы устанавливаем области изменения значений интенсивностей вихрей и интегралов движения, где глобальная структура фазового портрета однозначно восстанавливается по локальной. Мы также напоминаем известные результаты об условиях компактности фазовых траекторий (предложение 8), но предлагаем для них оригинальное доказательство. Наконец, в соответствии с классификацией фазовых портретов по локальному поведению (см. таблицы рис. 4) мы приводим все, за небольшим исключением, топологически различные фазовые портреты относительного движения трех вихрей.

Обозначения и соглашения. Для удобства читателя приведем список используемых в работе обозначений:

- x_i, y_i — декартовы координаты i -го вихря;
- γ_i и $a_i = \gamma_i^{-1}$ — интенсивность и обратная интенсивность i -го вихря;
- $m_i = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2$ — квадрат расстояния между вихрями, отличными от i -го;
- $m_0 = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$ — удвоенная ориентированная площадь вихревого треугольника;
- $\gamma = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1$, $a = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$;
- $\operatorname{sgn} z$ — сигнатура $z \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn} z = 1$ при $z > 0$, $\operatorname{sgn} z = -1$ при $z < 0$ и $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

В формулах набор индексов (i, j, k) , если их диапазон изменения не задан, принимает все циклические перестановки тройки чисел $(1, 2, 3)$.

2. Уравнения движения и редукция

Уравнения абсолютного движения и интегралы. Движение трех точечных вихрей описывается гамильтоновой динамической системой

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad \dot{y}_i = \{y_i, H\} \tag{2.1}$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi}(\gamma_1\gamma_2 \ln m_3 + \gamma_2\gamma_3 \ln m_1 + \gamma_3\gamma_1 \ln m_2) \tag{2.2}$$

и скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\gamma_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} \right). \tag{2.3}$$

Помимо гамильтониана эта система обладает тремя независимыми первыми интегралами

$$P = \sum_{i=1}^3 \gamma_i x_i, \quad Q = \sum_{i=1}^3 \gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^3 \gamma_i (x_i^2 + y_i^2),$$



связанными с инвариантностью уравнений движения относительно сдвигов и поворотов системы координат. Эти интегралы не находятся в инволюции, однако из них можно сконструировать пару инволютивных интегралов, например,

$$P^2 + Q^2, \quad D = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)I - P^2 - Q^2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} = \frac{m_1}{\gamma_1} + \frac{m_2}{\gamma_2} + \frac{m_3}{\gamma_3},$$

что позволяет понизить порядок системы на четыре единицы.

Про систему (2.1)–(2.3) говорят, что она описывают *абсолютное* движение вихрей. С относительным движением ассоциируют *редуцированную* динамическую систему.

Редуцированная система. Справедливы соотношения

$$\{m_i, m_j\} = -4a_k m_0, \quad \{m_0, m_i\} = (a_k - a_j)m_i + (a_j + a_k)(m_k - m_j). \quad (2.4)$$

В пространстве переменных m_i , $i = 0, 1, 2, 3$, они определяют структуру ли-пуассонова многообразия с центральными функциями D и

$$F = 4m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1).$$

Последняя возникает из соотношения Герона, связывающего площадь треугольника с длинами его сторон.

Редуцированная система определяется как ограничение на симплектический лист $D = \text{const}$, $F = 0$ гамильтоновой системы с гамильтонианом (2.2) и скобкой (2.4) [2].

Систему (2.2), (2.4) будем называть *приведенной*. В явном виде ее уравнения —

$$\dot{m}_0 = \sum \frac{(a_i + a_j)(m_i - m_j)}{4\pi a_i a_j m_k}, \quad \dot{m}_i = -\frac{m_0(m_j - m_k)}{\pi a_i m_j m_k}. \quad (2.5)$$

Скобка (2.4) — линейная; соответствующая алгебра Ли называется *вихревой* алгеброй.

Структура симплектического листа. Симплектический лист в зависимости от знака a гомеоморфен эллипсоиду ($a > 0$), параболоиду ($a = 0$) или гиперболоиду ($a < 0$) [2]. При $a \neq 0$, полагая

$$e_0 = \sum \frac{a_i m_i}{4a}, \quad e_1 = \frac{m_0}{2\sqrt{|a|}}, \quad e_2 = e_0 - \frac{m_3}{2(a_1 + a_2)}, \quad (2.6)$$

$$e_3 = \frac{a_1(m_1 - m_2 + m_3) + a_2(m_1 - m_2 - m_3)}{4\sqrt{|a|}(a_1 + a_2)},$$

находим

$$\{e_0, e_i\} = 0, \quad \{e_1, e_2\} = e_3, \quad \{e_2, e_3\} = e_1, \quad \{e_3, e_1\} = \text{sgn}(a)e_2 \quad (2.7)$$

и, коль скоро $F = 0$,

$$e_1^2 + \text{sgn}(a)e_2^2 + e_3^2 - \text{sgn}(a)e_0^2 = 0. \quad (2.8)$$

Мы видим, что в новых координатах симплектический лист — сфера при $a > 0$ и двуполостный гиперболоид при $a < 0$. При $e_0 = 0$ мы имеем, соответственно, точку и конус. Симплектическая структура на этих поверхностях задается соотношениями (2.7).



ЗАМЕЧАНИЕ. Образующие (2.6) не определены при $a_1 + a_2 = 0$. Перенумеровывая в случае необходимости вихри, всегда можно считать $a_1 + a_2 \neq 0$.

При $a = 0$ мы полагаем

$$\begin{aligned} e_0 &= \sum a_i m_i, & e_1 &= m_0, & e_2 &= \frac{m_3}{2(a_1 + a_2)}, \\ e_3 &= -\frac{a_1(m_1 - m_2 + m_3) + a_2(m_1 - m_2 - m_3)}{2(a_1 + a_2)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

и находим

$$\{e_0, e_i\} = 0, \quad \{e_1, e_2\} = e_3, \quad \{e_2, e_3\} = e_1, \quad \{e_3, e_1\} = -e_0, \quad (2.10)$$

$$e_1^2 + e_3^2 - 2e_0e_2 = 0. \quad (2.11)$$

Здесь симплектический лист — параболоид с симплектической структурой (2.10). При $e_0 = 0$ он вырождается в луч.

Преобразования вихревой алгебры. Коснемся вопроса о линейных преобразованиях вихревой алгебры, сохраняющих расслоенную структуру пуассонова многообразия (2.7), (2.8) или (2.10), (2.11). При $a > 0$ эти преобразования суть вращения в пространстве $e_0 = \text{const}$, при $a < 0$ — композиция подходящих обычных и гиперболических вращений, при $a = 0$ — это преобразования вида

$$\begin{aligned} e_{0'} &= e_0, \\ e_{1'} &= Ae_0 \cos \theta + e_1 \cos \phi + e_3 \sin \phi, \\ e_{2'} &= 1/2A^2 e_0 + Ae_1 \cos(\theta + \phi) + e_2 + Ae_3 \sin(\theta + \phi), \\ e_{3'} &= Ae_0 \sin \theta - e_1 \sin \phi + e_3 \cos \phi, \end{aligned}$$

где A , θ и ϕ — произвольные постоянные.

Этот вопрос нам интересен с точки зрения выбора образующих вихревой алгебры. При $e_0 \neq 0$ указанными преобразованиями любую точку симплектического листа можно переместить в его «основание» — точку с координатами $e_1 = e_3 = 0$. Так, при $a \neq 0$ можно получить, например, образующие

$$\begin{aligned} e_0 &= \sum \frac{a_i}{4a} m_i, & e_1 &= \frac{m_0}{2\sqrt{|a|}}, & e_2 &= \frac{E_0}{E_2} e_0 + \sum \frac{M_i - M_j - M_k}{16aE_2} m_i, \\ e_3 &= \sum \frac{(a_i + a_j)M_j - (a_k + a_i)M_k}{16a\sqrt{|a|}E_2} m_i, \end{aligned} \quad (2.12)$$

переводящие в основание $E_1 = E_3 = 0$ поверхности (2.8) точку, отвечающую конфигурации вихрей с нулевой площадью и квадратами длин сторон M_1 , M_2 и M_3 .

Обратное к (2.12) преобразование дается соотношениями

$$\begin{aligned} m_0 &= 2\sqrt{|a|}e_1, & m_i &= 2(a_j + a_k) \left(e_0 - \frac{E_0}{E_2} e_2 \right) + \\ &+ \frac{2aM_i e_2 - \sqrt{|a|}(a_j(M_k - M_i - M_j) - a_k(M_j - M_k - M_i))e_3}{2aE_2}. \end{aligned}$$



Канонические координаты. При фиксированном e_0 на поверхности (2.8) можно ввести (многими способами [2]) канонические координаты. Мы используем следующие:

$$x = -\frac{\sqrt{2}e_1}{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}, \quad y = \frac{\sqrt{2}e_3}{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}. \quad (2.13)$$

Непосредственно проверяется, что $\{x, y\} = 1$. Обращение (2.13) дается выражениями

$$e_2 = \operatorname{sgn}(a)|e_0| - \frac{x^2 + y^2}{2},$$

$$e_1 = -\frac{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}{\sqrt{2}}x, \quad e_3 = \frac{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}{\sqrt{2}}y.$$

При $a = 0$ в качестве канонических координат мы берем

$$x = \frac{e_1}{\sqrt{|e_0|}}, \quad y = \frac{e_3}{\sqrt{|e_0|}}. \quad (2.14)$$

3. Особые точки редуцированной системы

У редуцированной системы имеется три вида особых точек. Это точки, отвечающие сингулярной ($m_i = m_j, m_k = 0$), равносторонней ($m_1 = m_2 = m_3$) и коллинеарной ($m_0 = 0, \dot{m}_0 = 0$) конфигурациям вихрей. Рассмотрим вопрос о числе и типе особых точек на фазовом портрете системы. Будем считать $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$.

Сингулярные и равносторонние конфигурации. Положим

$$D_i = a_j + a_k, \quad D_e = a_1 + a_2 + a_3.$$

Наличие или отсутствие на фазовом портрете, отвечающем значению D , сингулярной конфигурации $m_i = 0$ (соответственно, равносторонней конфигурации) определяется соотношением $\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} D_i$ (соответственно, $\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} D_e$). Если соотношение выполняется — конфигурация реализуется, в противном случае — нет.

Коллинеарные конфигурации. Коллинеарные конфигурации принято параметризовать величиной $z \in \mathbb{R}$, полагая

$$m_1 = z^2 m_3, \quad m_2 = (1 - z)^2 m_3.$$

При $z > 1$ первый вихрь лежит между вторым и третьим, при $z < 0$ — второй между третьим и первым, и при $0 < z < 1$ — третий между первым и вторым. Эти конфигурации мы называем, соответственно, *конфигурациями первого, второго и третьего типа* и обозначаем I, II и III.

Необходимое условие реализации коллинеарной конфигурации ($\dot{m}_0 = 0$) можно записать в виде

$$\gamma_3 = \frac{z^2(z - 2)\gamma_1 + (z + 1)(z - 1)^2\gamma_2}{2z - 1}. \quad (3.1)$$



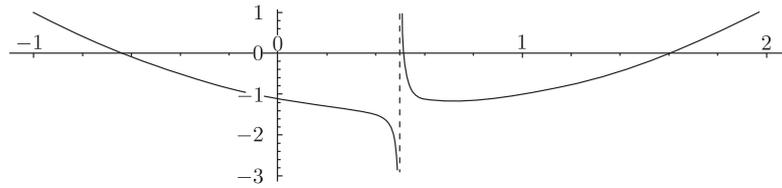


Рис. 1. График функции (3.1) при $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1,1$.

Предложение 1. Функция (3.1) имеет единственный конечный минимум z_c . Если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то $1/2 < z_c < 1$, иначе $z_c = 1/2$. На интервалах $z < 1/2$ и $1/2 < z < z_c$ функция монотонно убывает, на интервале $z > z_c$ — монотонно возрастает.

Доказательство.

Пусть $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Рассмотрим производную (3.1) по z :

$$\dot{\gamma}_3 = \frac{z(4z^2 - 7z + 4)\gamma_1 + (z - 1)(4z^2 - z + 1)\gamma_2}{(2z - 1)^2}. \tag{3.2}$$

Так как $4z^2 - 7z + 4 > 0$ и $4z^2 - z + 1 > 0$ при любом z , то $\dot{\gamma}_3 < 0$ при $z \leq 0$. На интервале $0 < z < 1/2$ справедлива оценка $\dot{\gamma}_3 < \dot{\gamma}_3|_{\gamma_1=\gamma_2} < 0$. На интервале $z > 1/2$ производная имеет в точности один нуль z_c , ибо числитель (3.2) на этом интервале возрастает и принимает значения разных знаков.

Случай $\gamma_1 = \gamma_2$ рассматривается аналогично. □

Положим $\gamma_c = \gamma_3(z_c)$. Вопрос о соотношении γ_c и γ_1, γ_2 решает

Предложение 2. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} -\gamma_2 \leq \gamma_c < -\gamma_1, & \text{ если } \gamma_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2, \\ -\gamma_1 - \gamma_2 < \gamma_c < -\gamma_2, & \text{ если } \gamma_1 > \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

причем равенства в (3.3) достигаются одновременно. При $\gamma_1 = \gamma_2$ $\gamma_c = -\frac{5}{4}\gamma_1$.

Доказательство.

Ясно, что $\gamma_c < \gamma_3(1) = -\gamma_1$. Неравенство $\gamma_c > -\gamma_1 - \gamma_2$ следует из соотношений

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{(z^2 - z + 1)(\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_1)}{2z - 1} > 0 \quad (z > 1/2).$$

Из соотношений

$$\frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{z(z - z_1)(z - z_2)}{2z - 1}, \quad z_{1,2} = \frac{2\gamma_1 + \gamma_2 \pm \sqrt{4\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2}}{2(\gamma_1 + \gamma_2)} \geq \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

рассматриваемых при $z > 1/2$, следует, что $\gamma_2 + \gamma_c \equiv \inf_{\gamma_3}(\gamma_2 + \gamma_3) > 0$, если подкоренное выражение в (3.4) отрицательно; $\gamma_2 + \gamma_c = 0$, если оно равно нулю; и $\gamma_2 + \gamma_c < 0$, если оно положительно.

То, что $\gamma_c = -\frac{5}{4}\gamma_1$ при $\gamma_1 = \gamma_2$, проверяется непосредственно. □



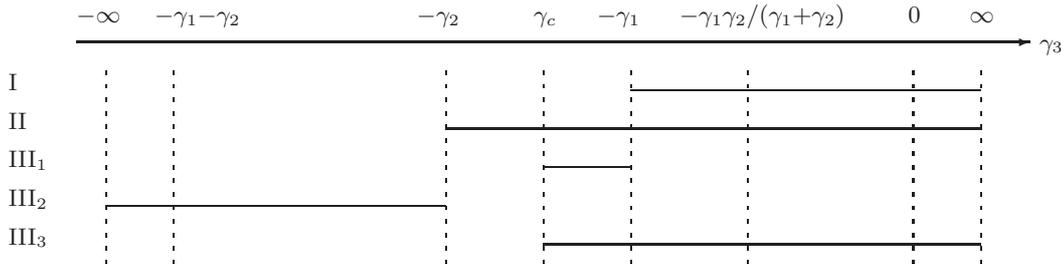


Рис. 2. Области определения введенных типов коллинеарной конфигурации при $\gamma_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2$ (отмечены сплошной линией).

Обозначим коллинеарные конфигурации из интервалов $(0, 1/2)$, $(1/2, z_c)$ и $(z_c, 1)$ через III_2 , III_3 и III_1 . На этих интервалах (как и на интервалах $z < 0$ и $z > 1$) коллинеарные конфигурации при фиксированных γ_1 и γ_2 однозначно параметризуются γ_3 (см. рис. 2).

Положим

$$D_c = a_1 z^2 + a_2 (1 - z)^2 + a_3.$$

При заданном D коллинеарная конфигурация z реализуется тогда и только тогда, когда $\text{sgn } D = \text{sgn } D_c$. Определим D_I, D_{II}, D_{III} и D_{III_i} как ограничения D_c на соответствующие области изменения z . Справедливо

Предложение 3.

$$\text{sgn } D_I = \text{sgn } D_{II} = \text{sgn } D_e, \quad \text{sgn } D_{III} = \text{sgn } a.$$

Доказательство.

Непосредственно проверяется, что

$$D_c = \frac{z(z-1)(\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_1) D_e}{\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_2} = \frac{z(z-1)(\gamma_1 z^2 + \gamma_2 z^2 - 2\gamma_1 z - \gamma_2) a}{z^2 - z + 1}.$$

Коэффициент при D_e положителен при $z < 0$ и $z > 1$, коэффициент при a положителен при $0 < z < 1$. □

Распределение особых точек по числу и типу. О реализации при данных значениях интенсивностей и D той или иной стационарной конфигурации удобно судить по диаграммам, подобным приведенным на рис. 2, 3 для случая $\gamma_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2$ (в случае $\gamma_1 > \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2$ в соответствии с предложением 2 точку γ_c следует переместить в промежуток $(-\gamma_1 - \gamma_2, -\gamma_2)$).



Рис. 3. Области постоянного знака интеграла D в особых точках при $\gamma_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2$. Интервалы $D > 0$ отмечены сплошными линиями, интервалы $D < 0$ оставлены пустыми.

Так, например, произвольному γ_3 из области $-\gamma_1 - \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_2$ при $D > 0$ отвечают три сингулярные и две (по числу ориентаций) равносторонние конфигурации. Коллинеарные конфигурации не реализуются. При $D < 0$ имеется только коллинеарная конфигурация типа III₂. При $D = 0$ стационарные конфигурации отсутствуют.

4. Устойчивость особых точек редуцированной системы

Сингулярные конфигурации при $D \neq 0$. Рассмотрим для определенности сингулярную точку $m_1 = 0$ при $a \neq 0$; прочие варианты анализируются аналогично.

Выберем образующие (2.12) так, чтобы точка оказалась в основании нижней ветви параболоида (2.8), т.е. положим в (2.12) $M_1 = 0$, $M_2 = M_3$ и $E_2 = -|E_0|$. В канонических координатах (2.13) этой точке отвечают значения $x = y = 0$. В полярных (относительно x, y) координатах r, ϕ для редуцированной системы при $r \rightarrow 0$ имеем

$$\dot{r} = O(r), \quad \dot{\phi} = \frac{\gamma_2 \gamma_3}{2\pi r^2} + O(r).$$

Учитывая гамильтоновость системы, делаем вывод, что рассматриваемая особая точка — центр.

Равносторонние конфигурации при $D \neq 0$. Линеаризуем систему (2.5) в точке $m_1 = m_2 = m_3$. Для соответствующих приращений имеем

$$\dot{\mu}_0 = - \sum \frac{a_j - a_k}{4\pi a_j a_k m_i} \mu_i, \quad \dot{\mu}_i = - \frac{m_0}{\pi a_i m_i} (\mu_j - \mu_k).$$

Корни характеристического уравнения —

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{m_0}{\pi m_1^2} \sqrt{-\gamma}.$$

Нулевые собственные значения связаны с интегралами $F = 0$ и $D = \text{const}$ и исчезают при ограничении на симплектический лист системы. Вид оставшихся корней позволяет сделать

Предложение 4. Устойчивость особой точки, отвечающей равносторонней конфигурации, определяется знаком величины γ : при $\gamma > 0$ точка устойчива, при $\gamma < 0$ — неустойчива.

При $\gamma = 0$ равносторонняя конфигурация реализуется, очевидно, лишь при $D = 0$.

Коллинеарные конфигурации при $D \neq 0$. Достаточно рассмотреть случай $a \neq 0$: при $a = 0$ реализуется лишь конфигурация $z = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$, а тогда $D = 0$. Перейдем к координатам (2.12) при

$$M_1 = z^2 M_3, \quad M_2 = (1 - z)^2 M_3,$$

где z представляет выбранную точку. Имеем в этой точке $e_1 = e_3 = 0$.

Исключая с помощью (2.8) из уравнений движения e_2 и линеаризуя уравнения, находим для возмущений

$$\dot{\epsilon}_1 = - \frac{AE_0}{2\pi E_2 M_1 M_2 M_3} \epsilon_3, \quad \dot{\epsilon}_3 = - \frac{BE_0}{2\pi E_2 M_1 M_2 M_3} \epsilon_1,$$

где

$$A = \sum (\gamma_i + \gamma_j) M_i M_j, \quad B = \sum \frac{\gamma_i}{3} (M_j - M_k)^2.$$

Отсюда получаем

Предложение 5. При $A \neq 0$ и $B \neq 0$ устойчивость особой точки, отвечающей коллинеарной конфигурации, определяется знаком произведения AB : при $AB < 0$ точка устойчива, при $AB > 0$ — неустойчива.



Более конкретно, имеем

Предложение 6. Конфигурации типа I и II устойчивы при $\gamma < 0$ и неустойчивы при $\gamma > 0$. Конфигурации типа III₁ и III₂ всегда устойчивы, конфигурация типа III₃ всегда неустойчива.

Доказательство.

Положим $M_3 = 1$. Имеем

$$A = z(z-1)(2z-1)\dot{\gamma}_3, \quad (4.1)$$

$$B = z(z-1)(\gamma_1 z^2 + \gamma_2 z^2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{z(z-1)(2z-1)}{\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_2} \gamma. \quad (4.2)$$

Из (4.1), в свете предложения 1, следует, что $A > 0$ на интервалах $z < 0$, $1/2 < z < z_c$ и $z > 1$ и $A < 0$ на интервалах $0 < z < 1/2$ и $z_c < z < 1$. С другой стороны, из (4.2) следует, что $B > 0$ на интервале $0 < z < 1$, а вне его знаки B и γ совпадают. \square

При $\gamma = 0$, согласно диаграммам рис. 2 и 3, реализуются либо конфигурация типа III₃, либо те, у которых $D = 0$. Конфигурация $z = 1/2$ реализуется только при $\gamma_1 = \gamma_2$, а в этом случае $z_c = 1/2$.

При $z = z_c$ линейного анализа не достаточно для суждения об устойчивости конфигурации. Учет первых нелинейных членов приводит при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и $\gamma_1 = \gamma_2$ к системам уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= -\frac{\gamma_1 \sqrt{-a}(z-2)(2z-1)(z+1)}{\pi z(4z^2-z+1)(z-1)^2} (\epsilon_1^2 - \epsilon_3^2), \\ \dot{\epsilon}_3 &= -\frac{3\gamma_1(z^2-z+1)}{\pi(4z^2-z+1)(z-1)} \epsilon_1 \end{aligned}$$

и

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{48}{5\pi\gamma_1} (3\epsilon_1^2 - \epsilon_3^2)\epsilon_3, \quad \dot{\epsilon}_3 = \frac{3\gamma_1}{\pi} \epsilon_1.$$

В правых частях этих уравнений коэффициенты при множителях, содержащих возмущения, положительны. Отсюда делаем вывод [10]:

Предложение 7. Критическая конфигурация неустойчива при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и устойчива при $\gamma_1 = \gamma_2$.

Стационарные конфигурации при $D = 0$. При таком D особые точки реализуются только в трех случаях (см. диаграмму рис. 3):

- 1) $\gamma_1 + \gamma_3 = 0$ или $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$ (сингулярная конфигурация);
- 2) $\gamma = 0$ (равносторонняя и коллинеарная конфигурация);
- 3) $a = 0$ (коллинеарная конфигурация).

Рассмотрим случай $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$ (случай $\gamma_1 + \gamma_3 = 0$ рассматривается аналогично). В качестве образующих вихревой алгебры примем образующие (2.6), перейдем к каноническим координатам (2.13), а от них — к полярным r, ϕ . Из интеграла энергии и уравнений движения находим

$$r^2 = \frac{h}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 \sin \phi)^{\gamma_1/\gamma_2} (\sin \phi + 1)}, \quad \dot{\phi} = -\frac{\gamma_2}{2\pi r^2},$$

где $h > 0$ — произвольная постоянная. Мы видим, что особые точки редуцированной системы составляют сингулярный луч $\phi = -\frac{1}{2}\pi$ и все фазовые кривые системы неограниченны. Движение вблизи сингулярного луча, а также при больших отрицательных y и при $\gamma_1 = \gamma_2$ происходит по закону

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\frac{\gamma_2^2}{2\pi x}.$$

При $\gamma = 0$ интегральные кривые редуцированной системы имеют вид

$$m_i = m_{i1}t + m_{i0}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

с подходящими коэффициентами m_{i0} и m_{i1} . В канонических координатах фазовый портрет представляется совокупностью лучей, исходящих из начала координат. Особые точки, отвечающие коллинеарным конфигурациям, образуют лучи $\phi = \pm\frac{1}{2}\pi$, а особые точки, отвечающие равносторонним конфигурациям, — пару лучей в верхней полуплоскости:

$$\sin \phi = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2}}.$$

При $a = 0$ фазовое пространство системы целиком состоит из особых точек, отвечающих коллинеарной конфигурации

$$z = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Выводы. Соберем вместе результаты об устойчивости.

Теорема 1. *Сингулярная конфигурация неустойчива только при $D = 0$. Равносторонняя — устойчива при $\gamma > 0$ и неустойчива при $\gamma \leq 0$. Коллинеарные конфигурации типа I и II устойчивы при $\gamma < 0$ и неустойчивы при $\gamma \geq 0$. Конфигурации III₁ и III₂ всегда устойчивы, III₃ — всегда неустойчива. Конфигурация z_c устойчива при $\gamma_1 = \gamma_2$, иначе — неустойчива.*

Результаты по устойчивости, типу и числу особых точек на фазовом портрете редуцированной системы могут быть объединены в две таблицы: одна — для случая $\gamma_1 > \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2$, другая — для случая $\gamma_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2$. На рис. 4а приведена таблица для первого случая, на рис. 4б — фрагмент таблицы для второго случая.

	$-\infty$	$a=0$		γ_c	$-\gamma_2$	$-\gamma_1$	$\gamma=0$	0	∞	γ_3	$-\gamma_2$	γ_c		
1	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	u^0	s^-	s^-	s^-	s^-	s^+	u^0	s^-	s^-
2	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	u^0	s^-	s^-	s^-	s^+	s^+	s^+	s^+
3	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+	s^+
I	—	—	—	—	—	—	—	s^+	u^0	u^-	u^+	—	—	—
II	—	—	—	—	—	s^+	s^+	s^+	u^0	u^-	u^+	—	s^+	s^+
III ₁	—	—	—	—	s^-	s^-	s^-	—	—	—	—	—	—	—
III ₂	s^+	s^0	s^-	s^-	s^-	—	—	—	—	—	—	—	—	—
III ₃	—	—	—	—	u^-	u^-	u^-	u^-	u^-	u^-	u^-	u^+	—	—
E	u^+	u^+	u^+	u^+	u^+	u^+	u^+	u^+	u^+	u^0	s^-	s^+	u^+	u^+

(a)

(b)

Рис. 4. Устойчивость и сигнатура D стационарной конфигурации вихрей как функция γ_3 : (а) — таблица для случая $\gamma_1 > \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2$; (б) — фрагмент таблицы для случая $\gamma_c > -\gamma_2$ (таблица целиком получается из (а) заменой фрагмента $[\gamma_c, -\gamma_2]$ на (б)). Используемые обозначения: s — stable, u — unstable, верхний индекс представляет сигнатуру D .



С учетом следующих замечаний эти таблицы дают исчерпывающую информацию о локальной структуре фазового портрета.

- 1) Из таблиц исключена конфигурация z_c . Она реализуется при $\gamma_3 = \gamma_c$ и относится к типу u^- , если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, и типу s^- , если $\gamma_1 = \gamma_2$.
- 2) Столбцы, соответствующие бифуркационным значениям γ_3 ($a = 0, \gamma_c, -\gamma_2, \gamma_1, \gamma = 0$), восстанавливаются по непосредственно (слева и справа) примыкающим к ним столбцам и информации об устойчивости особых точек при $D = 0$. Действительно, для каждой конфигурации сигнатура D в точке бифуркации определяется знаком D непосредственно слева и справа от этой точки. Если этот знак одинаков, то он сохраняется и в точке бифуркации, если разный, то $\text{sgn } D = 0$. Тип устойчивости при прохождении бифуркационного значения в первом случае сохраняется, во втором — определяется типом устойчивости особой точки при $D = 0$. Конфигурация не реализуется в точке бифуркации, если она не реализуется непосредственно слева или справа от нее.
- 3) Мы не привели таблицы при $\gamma_1 = \gamma_2$ и $\gamma_c = -\gamma_2$. Они совпадают с таблицей (а), за исключением, соответственно, фрагментов $[-\gamma_2, -\gamma_1]$ и $[\gamma_c, -\gamma_2]$. Последние следует заменить на должным образом модифицированные столбцы $-\gamma_1$ и γ_c .

Отметим еще

Следствие 1. Пусть при заданных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и D реализуется как равносторонняя, так и коллинеарная конфигурации вихрей. Тогда если одна из них устойчива, то другая неустойчива, и наоборот.

5. Структура и классификация фазовых портретов относительного движения

Вследствие инвариантности приведенной системы (2.5) относительно растяжений $m_i \rightarrow \lambda m_i, t \rightarrow \lambda t$ фазовые портреты на ее слоях $D = \text{const}$ относительно топологической эквивалентности разбиваются на три класса в соответствии с сигнатурой D .

Локальная структура фазового портрета определяется числом особых точек и их типом устойчивости. Эти сведения содержатся в таблицах рис. 4 и замечаниях к ним. Глобальная структура (при фиксированной локальной) отчасти определяется отношением связанности особых точек — мы говорим, что две точки фазового портрета *связаны*, если они соединены фазовой кривой. Иначе говоря, в связанных точках значение интеграла энергии фиксировано.

Запишем этот интеграл в виде

$$h \equiv m_1^{a_1} m_2^{a_2} m_3^{a_3}.$$

Зависимость h от $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и D в особых точках, отвечающих равносторонней и коллинеарной конфигурациям, при $D \neq 0$ имеет вид [2]

$$h_e = \left(\frac{D}{a_1 + a_2 + a_3} \right)^{a_1 + a_2 + a_3}, \quad (5.1)$$

$$h_c = z^{2a_1} (1 - z)^{2a_2} \left(\frac{D}{a_1 z^2 + a_2 (1 - z)^2 + a_3} \right)^{a_1 + a_2 + a_3}. \quad (5.2)$$

Связанность особых точек означает совпадение в них значений соответствующих функций (5.1), (5.2).



Согласно таблицам рис. 4 точки, отвечающие равносторонней и коллинеарной конфигурациям, не могут быть связаны (см. также следствие 1). То же справедливо и в отношении особых точек, отвечающих коллинеарным конфигурациям при $\gamma \leq 0$. При $\gamma > 0$ имеется три неустойчивых коллинеарных конфигурации z_1, z_2 и z_3 . Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то из уравнения (3.1) находим

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{\gamma_3}{\gamma_1}}.$$

И мы видим, что $h_c(z_2) = h_c(z_3)$, т. е. особые точки z_2 и z_3 связаны. При $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ связаны все три особые точки. Графическое исследование $h_c(\gamma_3)$ показывает, что при попарно различных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ особые точки не связаны. Однако такое исследование не является доказательством.

Другой фактор, определяющий глобальную структуру фазового портрета, — наличие неограниченных (некомпактных) траекторий. Справедливо [2]

Предложение 8. При фиксированных $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ фазовые траектории компактны при всех γ_3 , исключая $\gamma_3 = -\gamma_2, \gamma_3 = -\gamma_1$ и $\gamma_3 = -\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$. При указанных γ_3 имеются некомпактные траектории.

Доказательство.

Исследуем асимптотику h при $m_3 \rightarrow \infty$. При $a < 0$ примем за образующие вихревой алгебры (2.6), перейдем к каноническим координатам (2.13), а от них — к полярным r, ϕ . Имеем при $r \rightarrow \infty$

$$m_1 = \frac{a_2^2 + 2\sqrt{|a|}a_2 \sin \phi + |a|}{a_1 + a_2} r^2 + O(1),$$

$$m_2 = \frac{a_1^2 - 2\sqrt{|a|}a_1 \sin \phi + |a|}{a_1 + a_2} r^2 + O(1), \quad m_3 = (a_1 + a_2)r^2.$$

Коэффициенты в этих разложениях обращаются в нуль на отрезке $0 \leq \phi < 2\pi$, только если $a_2 + a_3 = 0$ и $a_3 + a_1 = 0$ соответственно. Следовательно, если эти случаи исключить, то

$$h = O(r^{2(a_1+a_2+a_3)}), \quad r \rightarrow \infty. \tag{5.3}$$

При $a = 0$ в координатах (2.9), (2.14) снова получаем (5.3), но без дополнительных ограничений на интенсивности.

Таким образом, при конечном $h \neq 0$, коль скоро исключены случаи $a_2 + a_3 = 0, a_3 + a_1 = 0$ и $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, траектории не могут уйти на бесконечность.

Покажем, что в указанных случаях имеются некомпактные траектории. Пусть, например, $a_2 + a_3 = 0$. Имеем

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} h^{1/a_1} = \frac{a_2^2 x^2}{a_1 + a_2},$$

т. е. при фиксированном h бесконечно удаленной точке $y = -\infty$ соответствует конечное x . Аналогично устанавливается существование неограниченных траекторий и в остальных случаях. Впрочем, при $a_2 + a_3 = 0$ (соответственно, при $a_3 + a_1 = 0$) таковой является, например, траектория $m_1 = \text{const}, m_2 = m_3$ (соответственно, $m_2 = \text{const}, m_3 = m_1$). \square

На рис. 5–10 приведены топологически различные фазовые портреты редуцированной системы в канонических координатах. Полностью представлен компактный ($a > 0$) и параболический ($a = 0$) случаи (рис. 5), а также гиперболический ($a < 0$) при $D < 0$ (рис. 6–8). Частично (однако в достаточном для адекватного представления о портретах объеме) представлен гиперболический случай при $D = 0$ (рис. 9) и $D > 0$ (рис. 10).



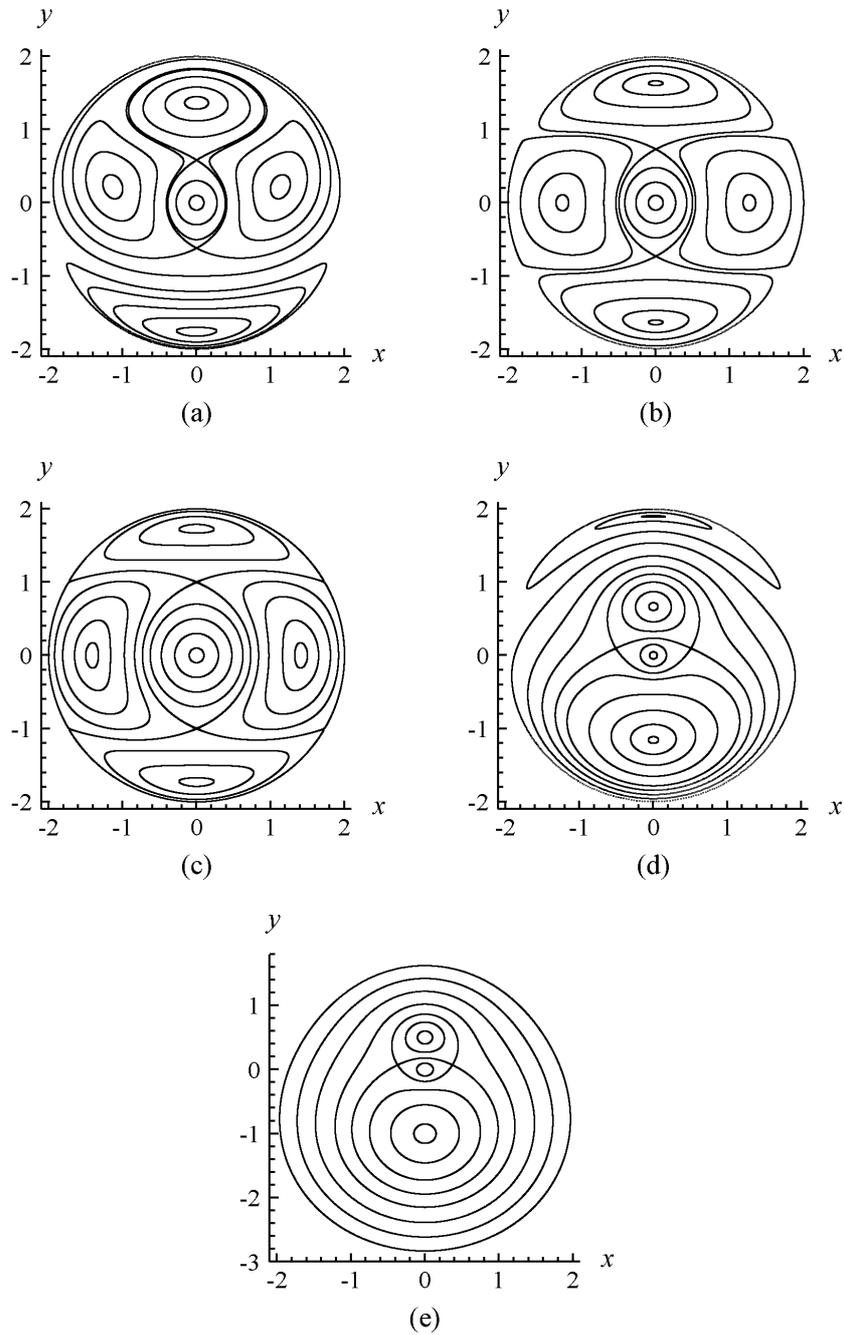


Рис. 5. Фазовые портреты редуцированной системы в канонических координатах при $a \geq 0$ ($e_0 = 1$): (a) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 4$; (b) $\gamma_1 = \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 4$; (c) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2$; (d) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -4$; (e) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -3$. Компактному случаю ($a > 0$) отвечают рисунки (a)–(d), параболическому ($a = 0$) — рисунок (e).

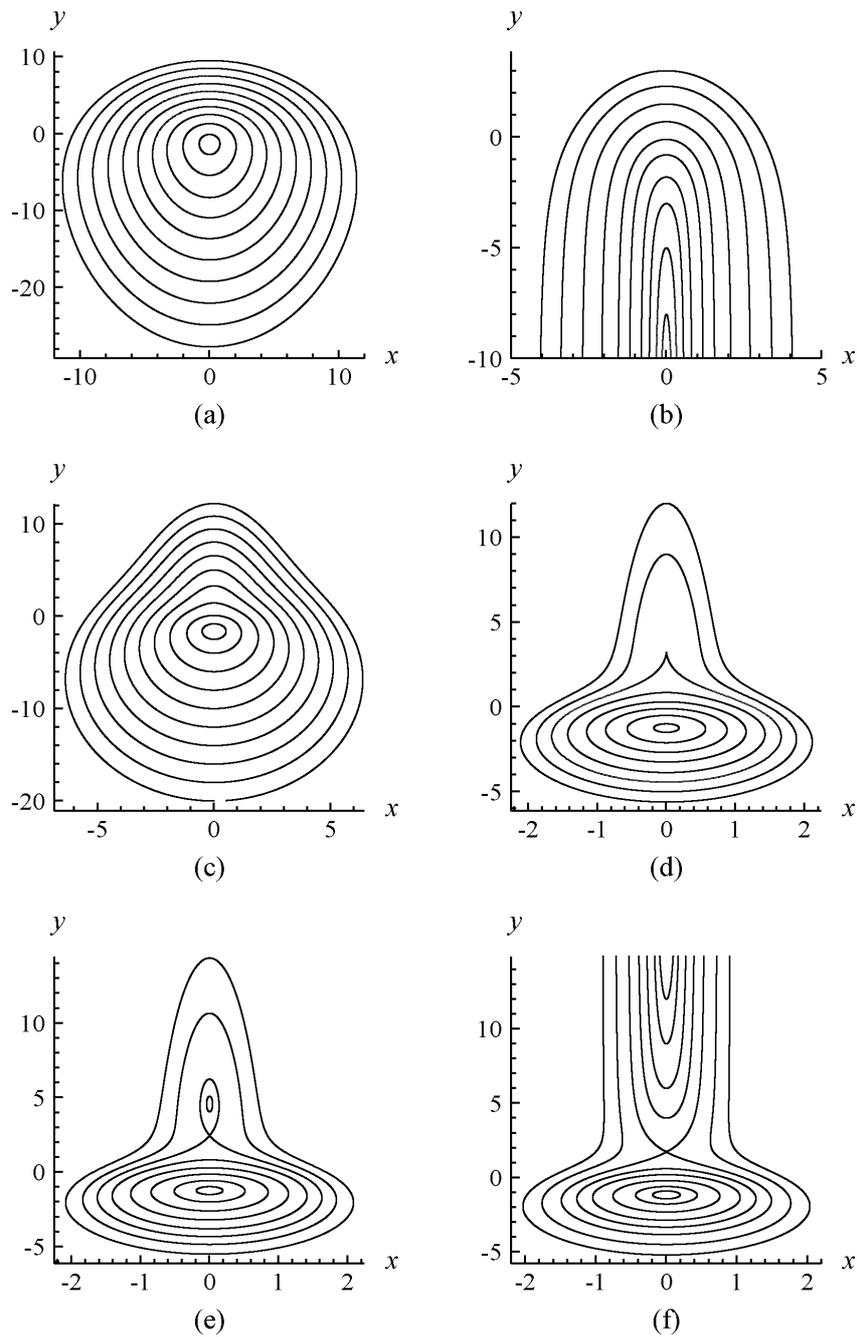


Рис. 6. Фазовые портреты редуцированной системы в канонических координатах при $a < 0$, $e_0 = 1$, $\gamma_c > -\gamma_2$ ($\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$) и $\gamma_3 \in (-\gamma_1 - \gamma_2, -\gamma_1]$: (a) $\gamma_3 = -2.5$; (b) $\gamma_3 = -2$; (c) $\gamma_3 = -1.3$; (d) $\gamma_3 = \gamma_c = -1.0703$; (e) $\gamma_3 = -1.06$; (f) $\gamma_3 = -1$.

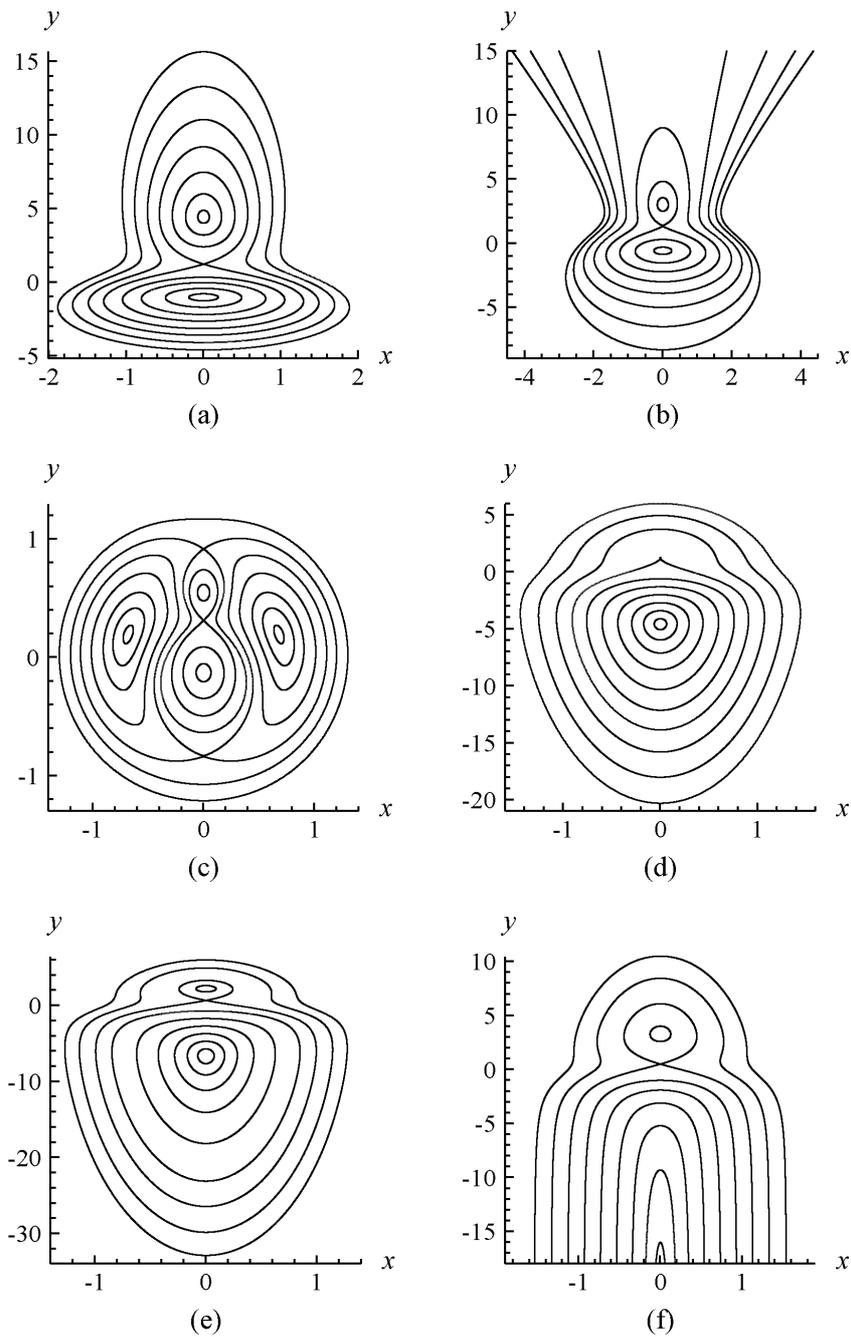


Рис. 7. Фазовые портреты редуцированной системы в канонических координатах при $a < 0$, $e_0 = 1$ и $\gamma_1 = 1$: (a) $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = -0.88$; (b) $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = -0.75$ ($\gamma = 0$); (c) $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = -0.1$; (d) $\gamma_2 = 1.1$, $\gamma_3 = \gamma_c = -1.1717$; (e) $\gamma_2 = 1.1$, $\gamma_3 = -1.14$; (f) $\gamma_2 = 1.1$, $\gamma_3 = -1.1$. Портреты (a)–(c) представляют случай $\gamma_c > -\gamma_2$ при $\gamma_3 \in (-\gamma_1, 0)$ и продолжают серию портретов рис. 6; портреты (d)–(f) представляют случай $\gamma_c < -\gamma_2$ при $\gamma_3 \in [-\gamma_c, -\gamma_2]$.

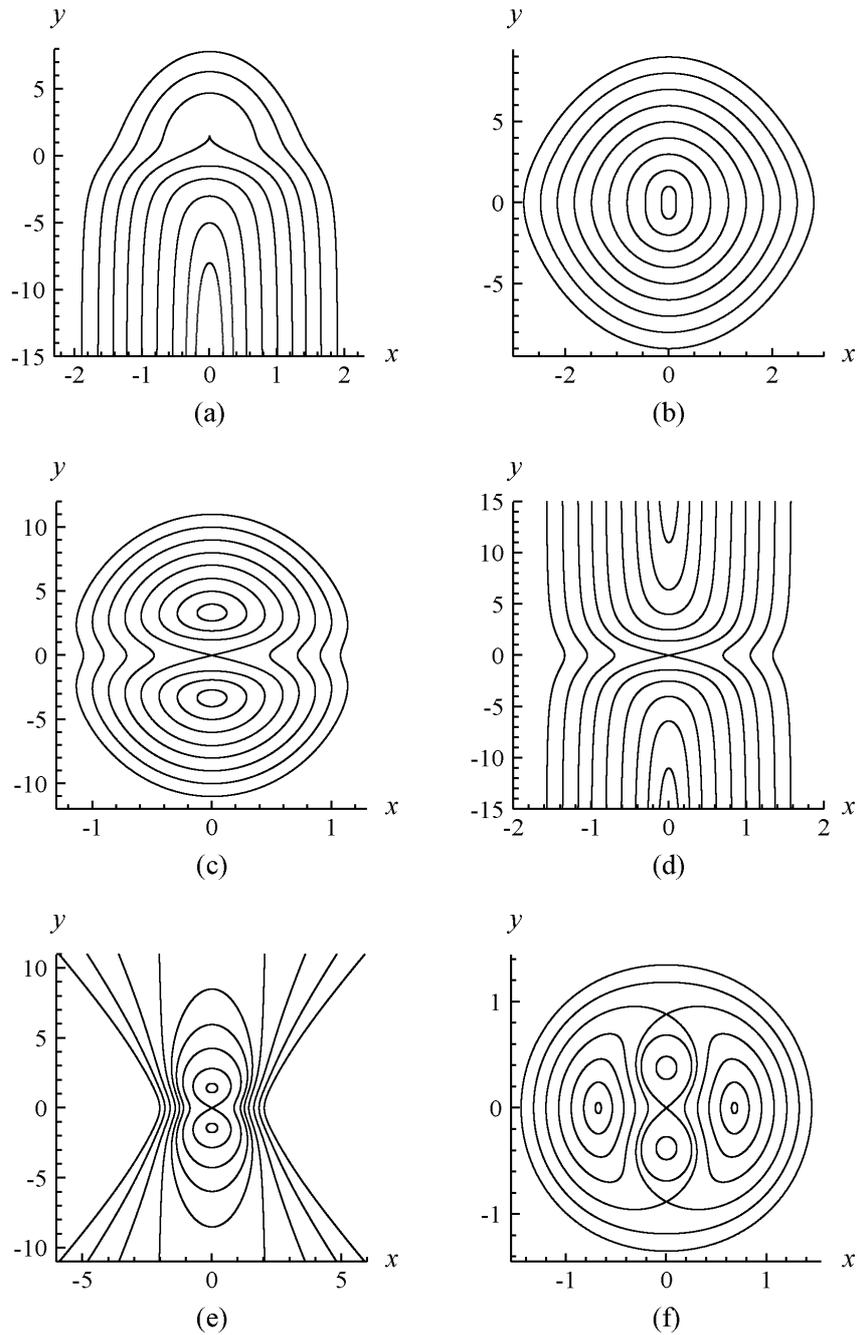


Рис. 8. Фазовые портреты редуцированной системы в канонических координатах при $a < 0$ и $e_0 = 1$:
 (a) $\gamma_1 = \sqrt{3}$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = -2$; (b) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = -1.25$ ($\gamma_3 = \gamma_c$); (c) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = -1.1$ ($\gamma_3 > \gamma_c$); (d) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = -1$; (e) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = -0.5$ ($\gamma = 0$); (f) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$, $\gamma_3 = -0.1$.
 Портрет (a) представляет случай $\gamma_3 = \gamma_c = -\gamma_2$; остальные портреты — случай $\gamma_1 = \gamma_2$.

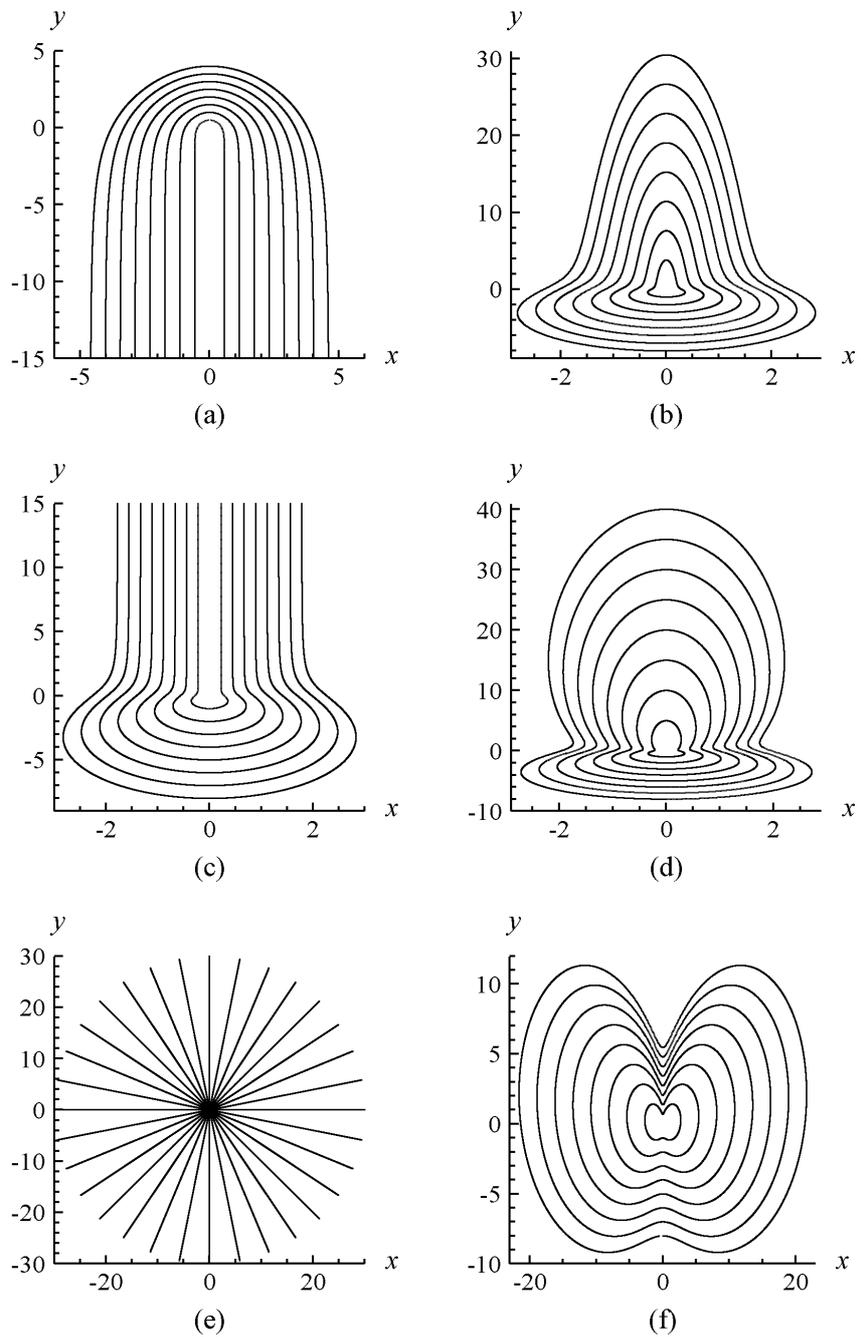


Рис. 9. Фазовые портреты редуцированной системы в канонических координатах при $a < 0$, $\gamma_c > -\gamma_2$ ($\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$) и $e_0 = 0$: (a) $\gamma_3 = -2$; (b) $\gamma_3 = -1.06$; (c) $\gamma_3 = -1$; (d) $\gamma_3 = -0.9$; (e) $\gamma_3 = -0.666$ ($\gamma = 0$); (f) $\gamma_3 = -0.554$.

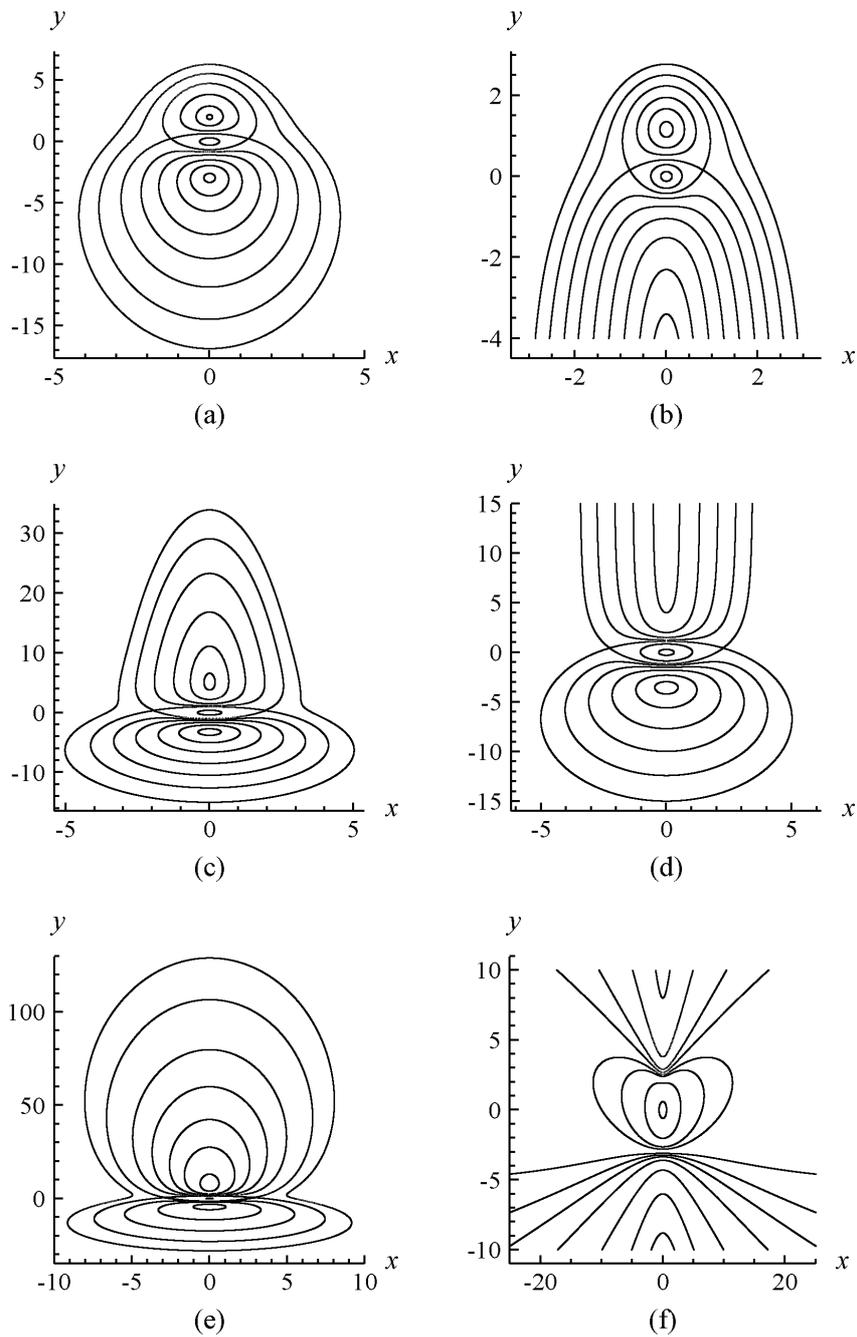


Рис. 10. Фазовые портреты редуцированной системы в канонических координатах при $a < 0$, $\gamma_c > -\gamma_2$ ($\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$) и $e_0 = -1$: (a) $\gamma_3 = -1.5$; (b) $\gamma_3 = -2$; (c) $\gamma_3 = -1.1$ ($\gamma_3 = \gamma_c$); (d) $\gamma_3 = -1$; (e) $\gamma_3 = -0.88$; (f) $\gamma_3 = -0.66$ ($\gamma = 0$).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08-05-00061-а, 10-05-00646-а) и ДВО РАН (гранты 09-И-П17-07, 09-И-П4-04, 09-И-СОП4-04).

Список литературы

- [1] Tavantzis J., Ting L. The dynamics of three vortices revisited // *Phys. Fluids*, 1988, vol. 31, no. 6, pp. 1392–1409.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2005. 368 с.
- [3] Aref H. Stability of relative equilibria of three vortices // *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, no. 9, 094101, 22 p.
- [4] Борисов А. В., Павлов А. Е. Динамика и статика вихрей на плоскости и сфере: I // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 1, pp. 28–38.
- [5] Борисов А. В., Лебедев В. Г. Динамика трех вихрей на плоскости и на сфере: II. Общий компактный случай // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 99–114.
- [6] Борисов А. В., Лебедев В. Г. Динамика трех вихрей на плоскости и на сфере: III. Некомпактный случай: Проблема коллапса и рассеяния // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 74–86.
- [7] Гудименко А. И. Динамика трех вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, вып. 2, с. 429–441.
- [8] Gudimenko A. I. Dynamics of perturbed equilateral and collinear configurations of three point vortices // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 2, pp. 85–95.
- [9] Гудименко А. И., Купцов К. Г. Движение трех точечных вихрей в случае, если один из них проходит через центр завихренности // *Вестн. Удмуртск. гос. ун-та*, 2009, вып. 2, с. 38–52.
- [10] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.