

Проблемы устойчивости и асимптотическое поведение вихревых пятен на плоскости

В. В. Васькин¹, А. В. Васькина², И. С. Мамаев³

^{1,2}Удмуртский государственный университет,
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

³Институт компьютерных исследований,
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

vaskin@udsu.ru¹, anvas@yandex.ru², mamaev@ics.org.ru³

Получено 29 марта 2010 г.

Данная работа посвящена исследованию динамики следующих систем большого числа точечных вихрей на плоскости:

- вихревые кольца с внешним радиусом $r = 1$ и переменным внутренним радиусом r_0 ,
- вихревые эллипсы с полуосями a, b .

Основное внимание уделено изучению асимптотического поведения ($t \rightarrow \infty$) систем и проверке критериев устойчивости для непрерывных распределений завихренности с помощью компьютерного эксперимента.

Ключевые слова: вихревая динамика, точечный вихрь, гидродинамика, асимптотическое поведение

V. V. Vaskin A. V. Vaskina, I. S. Mamaev

Problems of stability and asymptotic behavior of vortex patches on the plane

With the help of mathematical modelling, we study the dynamics of many point vortices system on the plane. For this system, we consider the following cases:

- vortex rings with outer radius $r = 1$ and variable inner radius r_0 ,
- vortex ellipses with semiaxes a, b .

The emphasis is on the analysis of the asymptotic ($t \rightarrow \infty$) behavior of the system and on the verification of the stability criteria for vorticity continuous distributions.

Keywords: vortex dynamics, point vortex, hydrodynamics, asymptotic behavior

Mathematical Subject Classification 2000: 76E07, 76E09, 76B47, 68U20

1. Введение

В работе исследуется динамика большого числа точечных вихрей на плоскости с точки зрения возможности достижения этой системой некоторого равновесного состояния. Подобная точка зрения восходит к заметке Л. Онзагера [1], в которой предполагается, что система N вихрей при $N \rightarrow \infty$ достигает некоторого равновесия, при котором отдельные вихри, «фактически подверженные случайным блужданиям, будут оказывать на поток достаточно случайное и неорганизованное влияние». Это, по мнению автора, позволяет применять к описанию системы стандартные методы статистической физики.

Впоследствии эти идеи были развиты в работе Джойса и Монтгомери [2], где на основании статистических методов и ряда традиционных предположений анализируется равновесное состояние системы точечных вихрей. Этой тематике было посвящено большое количество работ, направленных как на уточнение свойств равновесных состояний, так и на изучение возможной кинетики большого числа вихрей; большинство этих работ отличаются некоторыми неконтролируемыми физическими гипотезами и предположениями, положенными в их основу.

Отметим работу В. В. Козлова [3], где к описанию предельного состояния системы большого числа вихрей применена концепция слабого предела. В этой работе строго показано, что система точечных вихрей, интенсивности которых имеют одинаковый знак, достигает слабого предела.

В данной работе мы исследуем численными методами эволюцию плотности распределения $w_t(x, y)$ большого числа ($N \sim 10^4$) одинаковых точечных вихрей на плоскости и анализируем возможность прихода этой системы к статистическому равновесию. Как показывают результаты численных экспериментов, в этой системе нет универсального (т. е. термодинамического) равновесия, которое бы достигалось из почти всех начальных состояний. Можно высказать следующее предположение

Гипотеза. Система N одинаковых вихрей одного знака при $N \rightarrow \infty$ с конечной суммарной завихренностью, в то время как все $\Gamma_i \rightarrow 0$, в качестве равновесного статистического состояния может иметь любое распределение $w_t(x, y)$, соответствующее распределению завихренности $\Omega(x, y)$, которое является стационарным устойчивым решением уравнений Гельмгольца.

Кроме того, распад и эволюция конфигураций (вихревых пятен) достаточно точно описываются уравнениями Гельмгольца для эволюции непрерывных распределений завихренности.

2. Основные уравнения

Уравнения, описывающие эволюцию завихренности идеальной несжимаемой жидкости были получены Гельмгольцем [4]. В случае плоскопараллельных течений в неподвижной декартовой системе координат Oxy уравнения для завихренности $\Omega(x, y, t) = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}$ представляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \Omega &= 0, & \Delta \psi &= -\Omega, \\ v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, & v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.1)$$



Если к уравнениям добавить начальные условия для завихренности и граничные условия, которые в случае неограниченной плоскости сводятся к требованию

$$|\mathbf{v}| \xrightarrow{|r| \rightarrow \infty} 0, \tag{2.2}$$

то получится замкнутая система, определяющая эволюцию завихренности во времени.

Уравнения (2.1) являются существенно нелинейными, аналитические методы их решения отсутствуют. Поэтому особое значение для их исследования приобретают различные качественные и компьютерные методы.

Как известно, уравнения (2.1) допускают решение в виде суперпозиции точечных вихрей

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i \frac{\Gamma_i}{4\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)|^2, \quad \Gamma_i = \text{const}, \tag{2.3}$$

движение которых описывается гамильтоновой системой [5]

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{2.4}$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2).$$

3. Стационарные решения и их устойчивость

Все известные системы в пределе стремятся к некоторому стационарному равносному состоянию. Довольно легко найти некоторые стационарные ($\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$) решения уравнений (2.1).

Плоскопараллельное однородное течение. В декартовой системе координат уравнения (2.1) имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega(x, y). \tag{3.1}$$

Легко видеть, что этим уравнениям можно удовлетворить, полагая, что функции ψ и Ω зависят только от одной переменной, например от y , т. е. $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Они описывают однородное по x течение жидкости с неоднородной по y завихренностью (в частности, течение между двумя пластинами). Линейная устойчивость этих решений была исследована Рэлеем [6]. Им было показано, что любое монотонное распределение ($\frac{\partial \Omega}{\partial y} > 0$) завихренности будет устойчивым. Подробный обзор результатов по этой проблеме содержится, например, в [7].

Осесимметричное вихревое течение. В полярной системе координат уравнения (2.1) принимают вид

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\Omega(r, \varphi), \tag{3.2}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$



Легко видеть, что осесимметричное решение $\Omega = \Omega_0(r)$, $\psi = \psi_0(r)$ удовлетворяет уравнениям и описывает неоднородное по r вращение жидкости вокруг центра. При этом величины Ω_0 и ψ_0 связаны соотношением

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi_0(r)}{dr} \right) = -\Omega_0(r).$$

Для исследования устойчивости осесимметричных решений необходимо рассмотреть вариацию решения вблизи стационарного

$$\Omega(r, \varphi, t) = \Omega_0(r) + \tilde{\Omega}(r, \varphi, t), \quad \psi(r, \varphi, t) = \psi_0(r) + \tilde{\psi}(r, \varphi, t),$$

где $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\psi}$ малые добавки.

Подставляя Ω и ψ в уравнения (3.2) и линеаризуя по $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\psi}$, получаем

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + \chi(r) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} + \omega_0(r) \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \varphi} = 0, \quad \Delta \tilde{\psi} = -\tilde{\Omega}, \quad (3.3)$$

где $\chi(r) = \frac{1}{r} \frac{d\Omega_0}{dr}$, $\omega_0(r) = -\frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr}$.

В силу однородности уравнений по φ и t ищем решение в виде суперпозиции мод

$$\tilde{\psi}(r, \varphi, t) = \sum_m \tilde{\psi}_m(r) e^{im\varphi + i\varepsilon^{(m)}t}, \quad \tilde{\Omega}(r, \varphi, t) = \sum_m \tilde{\Omega}_m(r) e^{im\varphi + i\varepsilon^{(m)}t}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и исключая $\tilde{\Omega}_m$, получаем спектральную задачу для $\tilde{\psi}_m$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\tilde{\psi}_m}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \frac{m\chi(r)}{\varepsilon_n^{(m)} + m\omega_0(r)} \right) \tilde{\psi}_m = 0. \quad (3.5)$$

Для каждого m требуется найти возможные значения $\varepsilon_n^{(m)}$, при которых $\tilde{\psi}_m(r)$ удовлетворяет уравнению и условиям ограниченности при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$. При этом если все $\varepsilon_n^{(m)}$ действительны, то соответствующие моды ограничены по амплитуде и, следовательно, стационарное решение устойчиво. Возмущение представляет собой суперпозицию азимутальных волн с круговой частотой $\omega_n^{(m)} = \frac{\varepsilon_n^{(m)}}{m}$.

Если же спектр $\varepsilon_n^{(m)}$ содержит комплексные значения $\varepsilon_n^{(m)} = \varepsilon_{n1}^{(m)} \pm i\varepsilon_{n2}^{(m)}$ (они появляются парами и им соответствуют комплексно-сопряженные решения $\tilde{\psi}_m$ и $\tilde{\psi}_m^*$), то возмущение экспоненциально растет во времени, т. е. стационарное решение линейно-неустойчиво.

Справедливо следующее очевидное обобщение

Теорема 1. Если $\Omega_0(r)$ — монотонная функция, то $\Omega_0(r)$ и $\psi_0(r)$ являются устойчивыми решениями уравнений (3.2) в линейном приближении.

Доказательство.

Запишем уравнение (3.5) и комплексно-сопряженное к нему. Умножив первое уравнение на величину $r\tilde{\psi}_m^*$, второе — на $r\tilde{\psi}_m$, и вычитая второе из первого, получим

$$\frac{d}{dr} \left(\tilde{\psi}_m^* r \frac{d\tilde{\psi}_m}{dr} - \tilde{\psi}_m r \frac{d\tilde{\psi}_m^*}{dr} \right) + \left(\frac{m\chi(r)i\varepsilon_{n2}^{(m)}}{(\varepsilon_{n1}^{(m)} + m\omega_0(r))^2 + (\varepsilon_{n2}^{(m)})^2} \right) r\tilde{\psi}_m\tilde{\psi}_m^* = 0.$$



Проинтегрируем это уравнение $\int_0^\infty dr$. Первый член в получившемся выражении $\left(\tilde{\psi}_m^* r \frac{d\tilde{\psi}_m}{dr} - \tilde{\psi}_m r \frac{d\tilde{\psi}_m^*}{dr}\right)\Big|_0^\infty = 0$ в силу ограниченности функции ψ на бесконечности.

В результате получим тождество

$$\int_0^\infty \frac{m\chi(r)i\varepsilon_{n2}^{(m)}}{(\varepsilon_{n1}^{(m)} + m\omega_0(r))^2 + (\varepsilon_{n2}^{(m)})^2} \tilde{\psi}_m \tilde{\psi}_m^* r dr = 0. \tag{3.6}$$

Легко видеть, что если функция $\chi(r) = \frac{1}{r} \frac{d\Omega_0}{dr}$ не меняет знак, т. е. $\Omega_0(r)$ — монотонная функция, то этот интеграл обращается в нуль только при $\varepsilon_{n2}^{(m)} = 0$, и, следовательно, $\Omega_0(r)$ является устойчивым решением. \square

Этот результат обобщает известный критерий Рэлея, описывающий устойчивость плоскопараллельных течений между бесконечными пластинами [6]. Критерий монотонности функции $\Omega_0(r)$ является достаточным условием линейной устойчивости стационарных вихревых пятен. Необходимым условием является действительность всего спектра значений $\varepsilon_n^{(m)}$ спектральной задачи (3.5).

Следует также отметить, что устойчивость вихревых пятен исследуют, как правило, относительно вариации границы пятен [8]. Для осесимметричных распределений с кусочно-постоянной завихренностью можно показать, что общая вариация завихренности эквивалентна вариации границы.

Теорема 2. *Для осесимметричных кусочно-постоянных распределений завихренности $\Omega_0(r)$ в линейном приближении устойчивость по отношению к вариации границы пятен эквивалентна линейной устойчивости по отношению к произвольным вариациям завихренности $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) + \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$, $\Omega(\mathbf{r}, t) = \Omega_0(r) + \tilde{\Omega}(\mathbf{r}, t)$.*

Доказательство.

Докажем теорему для кусочно-постоянной функции распределения завихренности $\Omega_0(r) = \{W0, r \leq r_0; 0, r > r_0\}$, когда имеется одна граница. Это доказательство легко обобщается на случай нескольких границ. На границе области $r = r_0$ условие сшивания для $\tilde{\psi}_m$, полученное методом произвольной вариации завихренности, имеет вид

$$\frac{d}{dr} \tilde{\psi}_m \Big|_{r_0-\delta}^{r_0+\delta} = - \frac{m\tilde{\psi}_m(r_0)}{r_0(\varepsilon^{(m)} + m\omega_0(r_0))} \frac{d^2\psi_0(r)}{dr^2} \Big|_{r_0-\delta}^{r_0+\delta}. \tag{3.7}$$

При использовании подхода, основанного на вариации только границы, дающей уравнением $F(r, \varphi, t) = r - r_0 - \tilde{r}(\varphi, t)$, для возмущения $\tilde{\psi}_m$ на границе имеем условие сшивания

$$\frac{d}{dr} \tilde{\psi}_m \Big|_{r_0-\delta}^{r_0+\delta} = - \frac{d^2\psi_0(r)}{dr^2} \tilde{r}_m \Big|_{r_0-\delta}^{r_0+\delta}. \tag{3.8}$$

Из уравнения движения границы в дифференциальной форме $\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)F = 0$ следует уравнение для $\tilde{r}_m(t)$

$$\dot{\tilde{r}}_m(t) + \frac{im}{r_0} \left(\frac{d\psi_0}{dr} \tilde{r}_m + \tilde{\psi}_m \right) = 0,$$

откуда, с учетом $\tilde{r}_m(t) = \tilde{r}_m e^{-i\varepsilon^{(m)}t}$, находим $\tilde{r}_m = \frac{m\tilde{\psi}_m(r_0)}{r_0(\varepsilon^{(m)} + m\omega_0(r_0))}$.



Теперь легко видеть, что уравнение (3.8) совпадает с уравнением (3.7), следовательно, вариация границы кусочно-постоянных распределений эквивалентна произвольной вариации завихренности. \square

Устойчивость вихревых колец. Для вихревого кольца с внутренним радиусом $r = r_0$ и внешним $r = 1$ распределение завихренности является кусочно-постоянным и имеет вид

$$\Omega(r) = \begin{cases} \Omega_1, & 0 < r < r_0, \\ 1, & r_0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

В общем случае $\Omega(r)$ не является монотонной функцией ($\Omega_1 < 1$), поэтому обобщенный критерий Рэля (3.6) неприменим. В этом случае в формуле (3.5) функция $\chi(r) = \frac{1-\Omega_1}{r_0}\delta(r-r_0) - \delta(r-1)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, и

$$\omega_0(r) = \begin{cases} \frac{\Omega_1}{2}, & 0 < r < r_0, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega_1-1}{r^2}r_0^2\right), & r_0 \leq r \leq 1, \\ \frac{1}{2}\left(1 + (\Omega_1-1)r_0^2\right)\frac{1}{r^2}, & r > 1. \end{cases}$$

Будем искать $\tilde{\psi}_m$ в виде

$$\tilde{\psi}_m(r) = \begin{cases} \Psi_1 = c_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^m, & 0 < r < r_0, \\ \Psi_2 = c_2 r^m + c_3 r^{-m}, & r_0 \leq r \leq 1, \\ \Psi_3 = c_4 r^{-m}, & r > 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Проинтегрируем уравнение (3.5) вблизи точек $r = r_0$ и $r = 1$, в результате получим два уравнения

$$\begin{aligned} \Psi'_2(r_0) - \Psi'_1(r_0) - \frac{m}{r_0} \frac{1 - \Omega_1}{\varepsilon^{(m)} + m \frac{\Omega_1}{2}} \Psi_1(r_0) &= 0, \\ \Psi'_3(1) - \Psi'_2(1) + \frac{m}{\varepsilon^{(m)} + \frac{m}{2}(1 + (\Omega_1 - 1)r_0^2)} \Psi_2(1) &= 0. \end{aligned}$$

Добавив уравнения непрерывности

$$\Psi_2(r_0) - \Psi_1(r_0) = 0, \quad \Psi_3(1) - \Psi_2(1) = 0,$$

получим систему из четырех уравнений. Подставляя в систему $\tilde{\psi}_m$ из (3.10) и разрешая ее, получим $\varepsilon_n^{(m)}$ в виде $\varepsilon_{n1,2}^{(m)} = \varepsilon_0^{(m)} \pm \sqrt{D}$. От подкоренного выражения D зависит поведение функций $\tilde{\psi}(r, \varphi, t)$, $\tilde{\Omega}(r, \varphi, t)$. В случае обычного вихревого кольца $\Omega_1 = 0$ и выражение для D принимает вид

$$D(r_0, m) = m^2(r_0^2 - 1)^2 + 4m(r_0^2 - 1) - 4r_0^{2m} + 4.$$

Если $D < 0$, корни имеют мнимую часть, в результате чего в решении появляется множитель, растущий со временем, что приводит к потере устойчивости решения. На (рис. 1) серым цветом обозначена область неустойчивости вихревого кольца, где D принимает отрицательные значения.

Как видно из рис. 1, неустойчивость m -й моды решения наступает, когда внутренний радиус кольца r_0 становится больше определенного значения. При $m = 2$ величина D обращается в нуль при любых значениях r_0 , следовательно, эта мода всегда устойчива в линейном приближении. Заметим, что на границе области величины $\varepsilon_{n2}^{(m)} = 0$.



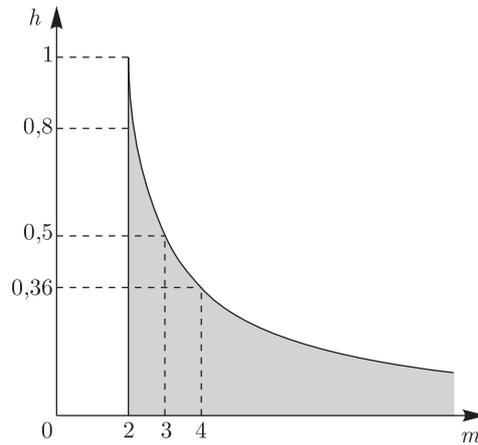


Рис. 1. Область линейной неустойчивости вихревого кольца (отмечена серым цветом), $h = 1 - r_0$ — толщина кольца.

Таким образом, если внутренний радиус кольца $r_0 \leq 0,5$, то устойчивыми являются все моды, включая $m = 2$, из этого следует

Теорема 3. *Однородное вихревое кольцо с внешним радиусом $r = 1$ и внутренним радиусом $r = r_0$ устойчиво в линейном приближении при значениях $r_0 \leq 0,5$.*

Вопрос об устойчивости в нелинейном приближении остается открытым. Приводимые ниже результаты численного моделирования свидетельствуют, что более правдоподобна

Гипотеза. *Однородное вихревое кольцо всегда неустойчиво (в нелинейном приближении).*

Эллиптический вихрь Кирхгофа [8]. Это еще одно хорошо известное решение уравнений (2.1), которое является стационарным во вращающейся системе координат.

А. Э. Лав [8] исследовал линейную устойчивость вихря Кирхгофа относительно вариации границы и показал, что движение устойчиво для соотношения полуосей эллипса $b/a \geq 1/3$. Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 2, можно показать, что анализ устойчивости движения относительно произвольной вариации завихренности сводится к анализу устойчивости относительно вариации границы.

Интересно отметить, что диаграмма устойчивости m -й гармоники от отношения b/a имеет вид, похожий на диаграмму устойчивости вихревого кольца.

Область неустойчивости есть и при $b/a < 1/3$ (рис. 2), но при нецелых m , равно как и для кольца при $r_0 < 0,5$.

Теорема 4. *Однородный эллиптический вихрь Кирхгофа с полуосями a и b устойчив в линейном приближении при соотношении полуосей $b/a \geq 1/3$.*

4. Статистическое описание и численные эксперименты в динамике точечных вихрей

4.1. Интегралы движения и безразмерные переменные

В связи с инвариантностью системы (2.4) относительно параллельных переносов и вращений системы координат (т. е. преобразований, образующих группу движений плоско-

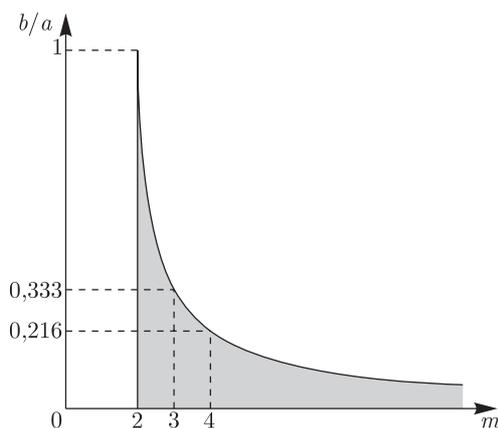


Рис. 2. Область линейной неустойчивости вихря Кирхгофа (отмечена серым цветом).

сти $E(2)$), помимо энергии имеется еще три дополнительных интеграла

$$Q = \sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (4.1)$$

Набор интегралов (4.1) неинволютивен

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P.$$

Обобщение полного момента импульса для вихрей удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i y_i - y_i x_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq k}^N \Gamma_i \Gamma_k = \frac{L}{\pi}.$$

Величина $L = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j$ называется *полным вихревым моментом*.

Можно ввести также определение суммарной интенсивности $\Gamma = \sum \Gamma_i$. Точка на плоскости с координатами $(\frac{Q}{\Gamma}, \frac{P}{\Gamma})$ называется *центром завихренности*. Если $\sum \Gamma_i \neq 0$, то выбором системы координат можно добиться, чтобы центр завихренности находился в начале координат, что мы и будем полагать в дальнейшем.

Таким образом, движение N точечных вихрей характеризуется сохраняющимися величинами H, Γ, Q, P, I, L .

Перейдем к безразмерным переменным и тем самым уменьшим число параметров, характеризующих движение.

Если $\Gamma \neq 0$, заменим интенсивности на безразмерные $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i \Gamma$, при этом $\sum \Gamma_i = 1$. Выберем начало координат системы в центре завихренности с координатами $(\frac{Q}{\Gamma}, \frac{P}{\Gamma})$. За масштаб длины примем величину l_0 , такую, что $l_0^2 = I/\Gamma$, за масштаб времени — величину $t_0 = I/\Gamma^2$. Энергия и полный момент измеряются в единицах Γ^2 . Заменяя переменные

$$x_i \rightarrow x_i l_0, \quad y_i \rightarrow y_i l_0, \quad t \rightarrow t t_0,$$

получим безразмерные уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad \dot{y}_i = \{y_i, H\}, \quad H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \quad (4.2)$$

с безразмерными интегралами движения $P = Q = 0$, $\Gamma = 1$, $I = 1$, $L = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j$. В дальнейшем под x_i, y_i, t будем понимать безразмерные переменные.

Таким образом, в любой момент времени состояние системы точечных вихрей описывается их координатами $x_i(t), y_i(t), i = 1, \dots, N$, которые рассчитываются на основании динамических уравнений (4.2) методом Рунге–Кутты 4-го порядка по заданному начальным данным. Во всех экспериментах число точечных вихрей $N \sim 10^4$, суммарная завихренность $\Gamma = 1$, интенсивности вихрей равны по величине.

В начальный момент времени генерируется исходное распределение точечных вихрей с желаемой плотностью распределения. Например, для получения равномерного распределения вихрей в кольцевой области, имея генератор случайных чисел, равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$, координаты r_i, φ_i i -го точечного вихря вычисляются по формулам

$$r_i = \sqrt{r_0 + (1 - r_0)q_j}, \quad \varphi_i = 2\pi q_k,$$

где q_j, q_k — независимые случайные величины в интервале $[0, 1]$. Аналогичным образом можно получить формулы для более сложных распределений.

Ясно, что такое чрезвычайно детальное описание не позволяет судить о поведении системы в целом, поэтому для описания системы большого числа вихрей необходимо использовать статистические методы.

4.2. Статистическое описание системы точечных вихрей

Определим функцию распределения плотности вихрей $w_t(x, y)$ на плоскости, интенсивности вихрей Γ_i равны по величине и имеют одинаковый знак. Для этого всю плоскость переменных (x, y) разобьем на ячейки, в данном случае прямоугольники со сторонами $\Delta x, \Delta y$, так что величина

$$\mathcal{N}_t(x, y) = N w_t(x, y) \Delta x \Delta y$$

определяет число вихрей в соответствующей ячейке в момент времени t . Таким образом, функция $w_t(x, y) = \frac{\mathcal{N}_t(x, y)}{N \Delta x \Delta y}$ является нормированной плотностью завихренности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во многих случаях, особенно если число точечных вихрей мало, в численных экспериментах удобнее визуально следить за перемещением точек, изображающих точечные вихри, а не строить формально график функции $w_t(x, y)$.

В дальнейшем при исследовании асимптотического поведения системы полезно также рассмотреть функции распределения $\hat{w}_t(r), \hat{w}_t(\varphi)$ (распределения вихрей по радиусу и углу), которые определяются следующим образом. Выберем начало отсчета системы координат в центре завихренности так, что $P = Q = 0$, и перейдем к полярным координатам на плоскости $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, тогда

$$\hat{w}_t(r) = \frac{\mathcal{N}(r)}{N \Delta r}, \quad \hat{w}_t(\varphi) = \frac{\mathcal{N}(\varphi)}{N \Delta \varphi},$$

где $\mathcal{N}(r)$ — число вихрей в кольцевом слое $(r, r + \Delta r)$, $\mathcal{N}(\varphi)$ — число вихрей в секторе $(\varphi, \varphi + \Delta \varphi)$.



4.3. Статистическое равновесие и слабый предел

Как показывают численные эксперименты, результаты которых приведены ниже, системы точечных вихрей с течением времени приходят к стационарному равновесному состоянию, при котором функции распределения $\widehat{w}_t(r)$, $\widehat{w}_t(\varphi)$ перестают меняться со временем.

Как и для обычных частиц, для точечных вихрей может быть введена многочастичная функция распределения $\rho_t(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N)$, удовлетворяющая уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \{H, \rho_t\} = 0$$

со скобкой Пуассона $\{f, g\} = \sum_i \frac{1}{\Gamma_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$. Особенностью этой системы «частиц» является дальнедействующий характер их взаимодействия.

Строгий математический подход к описанию асимптотического поведения предложен В. В. Козловым [3] (в рамках описания Гиббса). Показано, что система вихрей достигает предельного состояния равновесия, если распределение ρ_t слабо сходится к $\bar{\rho}$: $\Gamma \rightarrow R$ при $t \rightarrow \infty$ так, что

$$\int \rho_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^N \mathbf{x} d^N \mathbf{y} \rightarrow \int \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^N \mathbf{x} d^N \mathbf{y}$$

для любой пробной функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$.

Таким образом, в физическом смысле слабый предел $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляет плотность распределения вихрей в предельном стационарном состоянии.

К сожалению, в доказательстве ничего не сказано про конкретный вид слабого предела в зависимости от начального распределения.

При традиционном подходе для частиц с короткодействующими силами хорошо известно, что система приходит в статистическое равновесное состояние (вне зависимости от начального распределения), для которого любая подсистема описывается *функцией распределения Гиббса*, зависящей только от аддитивных интегралов движения.

С этой точки зрения можно рассмотреть эволюцию ансамбля большого числа точечных вихрей, выбирая в качестве подсистемы один вихрь, т. е. вычислять одночастичную функцию распределения, которая к тому же является средней завихренностью и совпадает с $w_t(x, y)$. Анализ асимптотической при $t \rightarrow \infty$ одночастичной функции распределения и зависимость ее от начального состояния и интегралов движения является одной из целей предпринятых экспериментов.

4.4. Численные эксперименты

В работе нас интересует эволюция вихревых пятен с равномерной завихренностью внутри. В непрерывной постановке численная реализация этой задачи сложна в силу нелинейности уравнений (2.1). Более простым методом моделирования эволюции вихревых пятен является метод дискретной аппроксимации, когда непрерывное распределение завихренности заменяется большим количеством одинаковых точечных вихрей. Моделирование движения сводится к расчету траекторий движения вихрей согласно уравнениям (4.2). Выполнение численных экспериментов дает нам возможность сравнить их результаты с известными аналитическими критериями устойчивости для некоторых вихревых конфигураций, а также исследовать асимптотическое поведение вихревых пятен на плоскости.

В данной работе был проведен ряд численных экспериментов, моделирующих эволюцию следующих систем большого числа точечных вихрей на плоскости:

- вихревые кольца с внешним радиусом $r = 1$ и переменным внутренним радиусом r_0 ,
- вихревые эллипсы с полуосями a, b .

Здесь мы приводим лишь некоторые из них, наиболее ярко характеризующие поведение рассматриваемых вихревых конфигураций.

Эволюция тонких колец ($r_0 > 0,5$). Тонкие кольца с $r_0 > 0,5$ являются неустойчивыми конфигурациями в линейном приближении. Численные эксперименты в точности подтверждают теорию, причем количество образующихся при распаде колец пятен зависит от r_0 и совпадает с номером наиболее неустойчивой гармоники. При больших временах асимптотические конфигурации обладают осесимметричным, монотонным по радиусу распределением завихренности (т.е. $\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial \Omega}{\partial r} > 0$), оно представляет собой крупное центральное пятно, окруженное облаком вихрей меньшей плотности. На рис. 3 приведена характерная эволюция тонких колец во времени.

Эволюция широких колец ($r_0 \leq 0,5$). Согласно теореме 3 в линейном приближении такие кольца должны быть устойчивыми. Численные эксперименты показывают, что широкие кольца обнаруживают неустойчивость уже на начальном этапе расчета. На рис. 4 приведен характерный вид эволюции широких колец. Во всех экспериментах наблюдается искажение границ колец, причем внешняя и внутренняя границы приобретают форму многогранников, что соответствует возбуждению мод с номерами, равными количеству граней. Неустойчивость в данном случае, по-видимому, связана с нелинейной неустойчивостью. Этот вопрос требует дополнительного изучения. При больших временах, как правило, асимптотические конфигурации обладают осесимметричным, монотонным по радиусу распределением завихренности, что находится в соответствии с теоремой 1.

Эволюция длинных вихревых эллипсов ($b/a < 1/3$). Согласно критерию устойчивости А. Э. Лава (теорема 4), эллиптические вихри с соотношением полуосей $b/a < 1/3$ неустойчивы в линейном приближении. На начальном этапе моделирования происходит распад эллипсов на несколько пятен с образованием вихревых нитей вокруг них, количество пятен зависит от конкретного соотношения полуосей a и b . С течением времени пятна сливаются друг с другом.

Численные эксперименты, проведенные для вихревых эллипсов с соотношениями полуосей $b/a = 0,1$ и $b/a = 0,05$ (результаты представлены на рис. 5 и рис. 6), показали, что асимптотические конфигурации для этих двух случаев существенно различаются.

Для эллипса с $b/a = 0,1$ асимптотическая конфигурация имеет вид крупного пятна в центре со «спутником» (небольшим плотным скоплением вихрей), окруженных облаком вихрей меньшей плотности. Распределение завихренности не осесимметричное и не монотонное по радиусу. Вопрос об устойчивости такой конфигурации пока не изучен.

В случае вихревого эллипса с $b/a = 0,05$ асимптотическая конфигурация принимает вид одного центрального пятна в облаке вихрей, причем вокруг пятна имеется тонкий кольцевой слой меньшей, чем у остального облака, плотности. Таким образом, распределение завихренности является осесимметричным, но не монотонным по радиусу.

Эволюция вихревых эллипсов с малым эксцентриситетом ($b/a \geq 1/3$). Вихревые эллипсы с соотношением полуосей $b/a \geq 1/3$ должны быть устойчивыми конфигурациями (теорема 4). Численный эксперимент подтверждает этот критерий: такие эллипсы

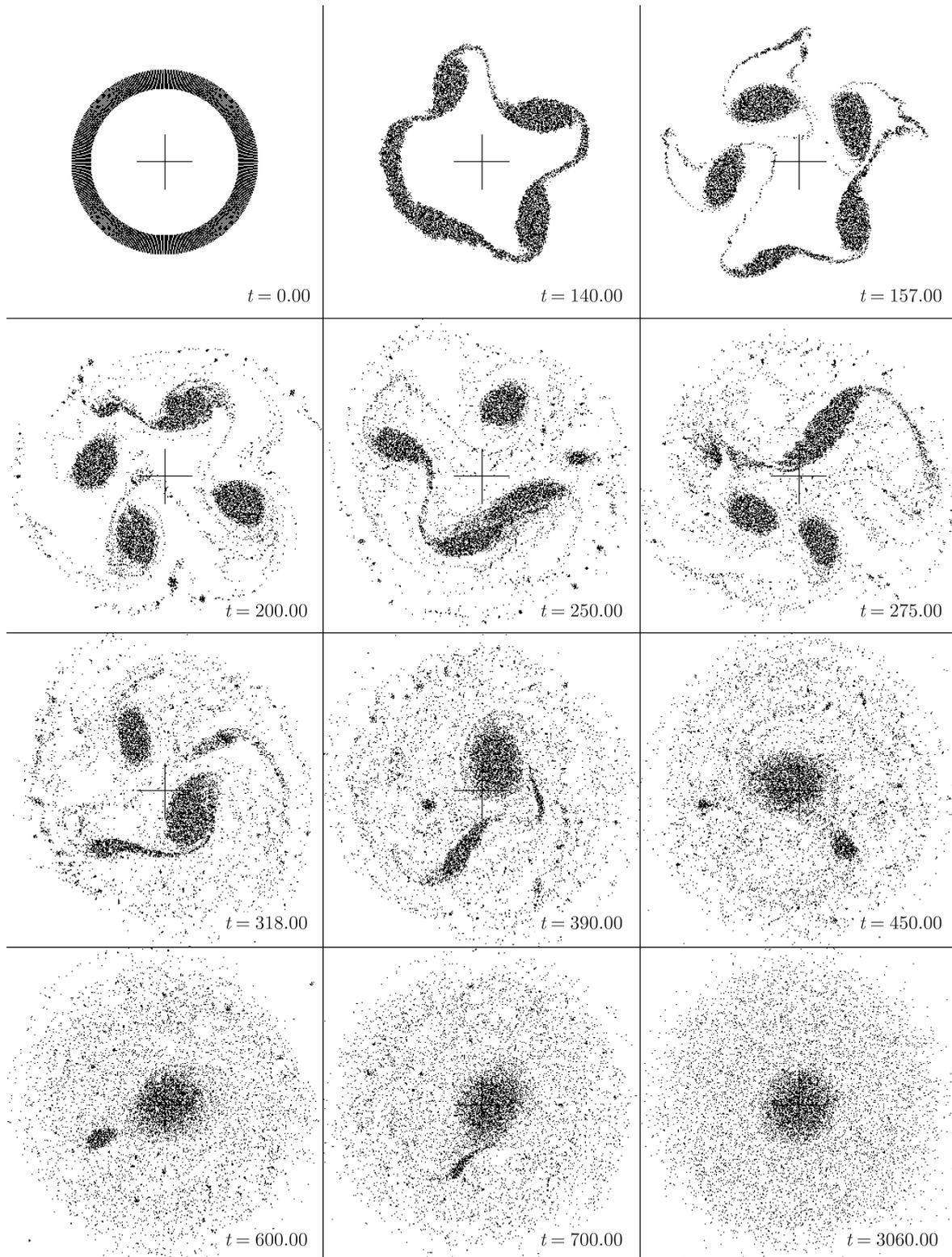


Рис. 3. Характерный вид эволюции тонких вихревых колец ($N = 10000$, $r_0 = 0,8$, $dt = 0,1$).

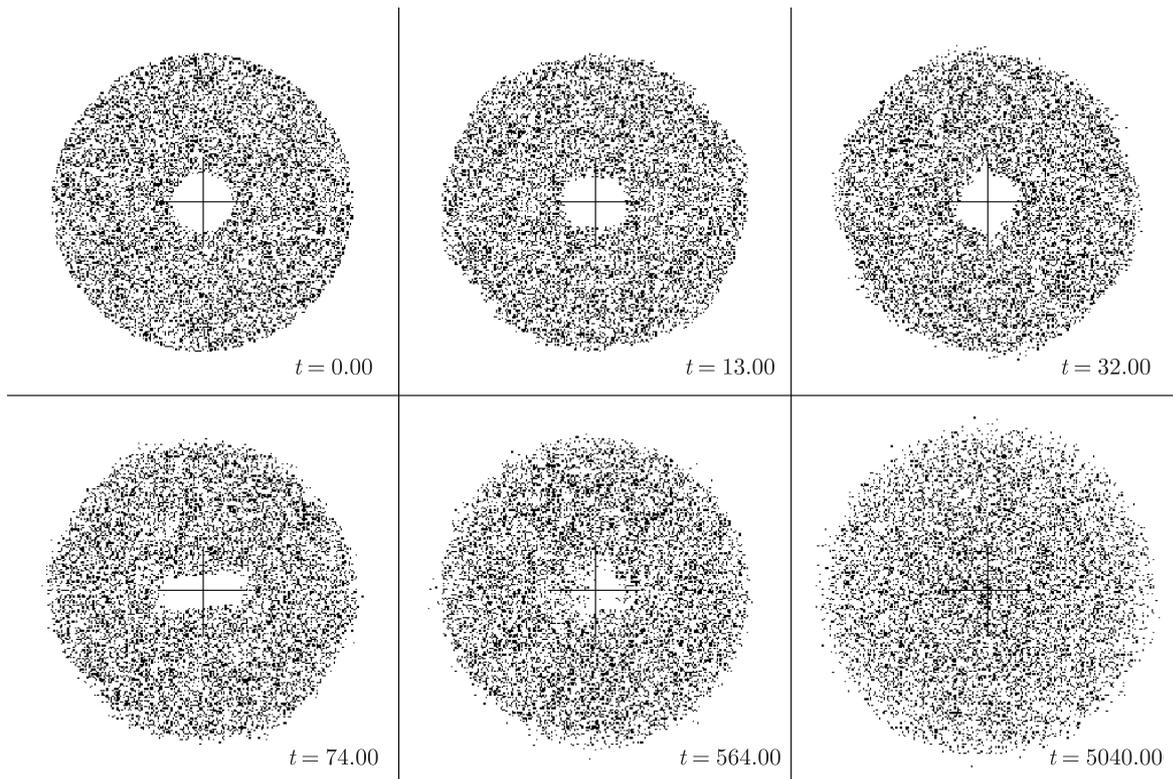


Рис. 4. Характерный вид эволюции широких вихревых колец ($N = 10000$, $r_0 = 0,2$, $dt = 0,1$).

хорошо сохраняют свою форму при больших временах моделирования. Однако асимптотические конфигурации несколько отличаются от исходных: границы эллипсов приобретают рыхлую структуру, отдельные вихри находятся на небольшом расстоянии от основного пятна. Причина наблюдаемого диффузионного эффекта может быть связана с дискретизацией непрерывного распределения точечными вихрями или с неустойчивостью эллипсов в нелинейном приближении. Характерный вид эволюции эллипсов с малым эксцентриситетом показан на рис. 7.

5. Обсуждение результатов

В заключение отметим ряд задач, которые было бы интересно исследовать как аналитическими, как и численными методами.

1. Исследование нелинейной устойчивости широких вихревых колец и эллипсов с малым эксцентриситетом.
2. Отыскание новых стационарных равномерно вращающихся конфигураций, в том числе с несвязным и с неоднородным распределением завихренности.
3. Исследование асимптотического поведения (т. е. на больших временах) большого числа вихрей с интенсивностями разного знака в ограниченной области (например, в круге, кольце). Имеющиеся в настоящее время результаты (см. работы [9, 10]) относятся

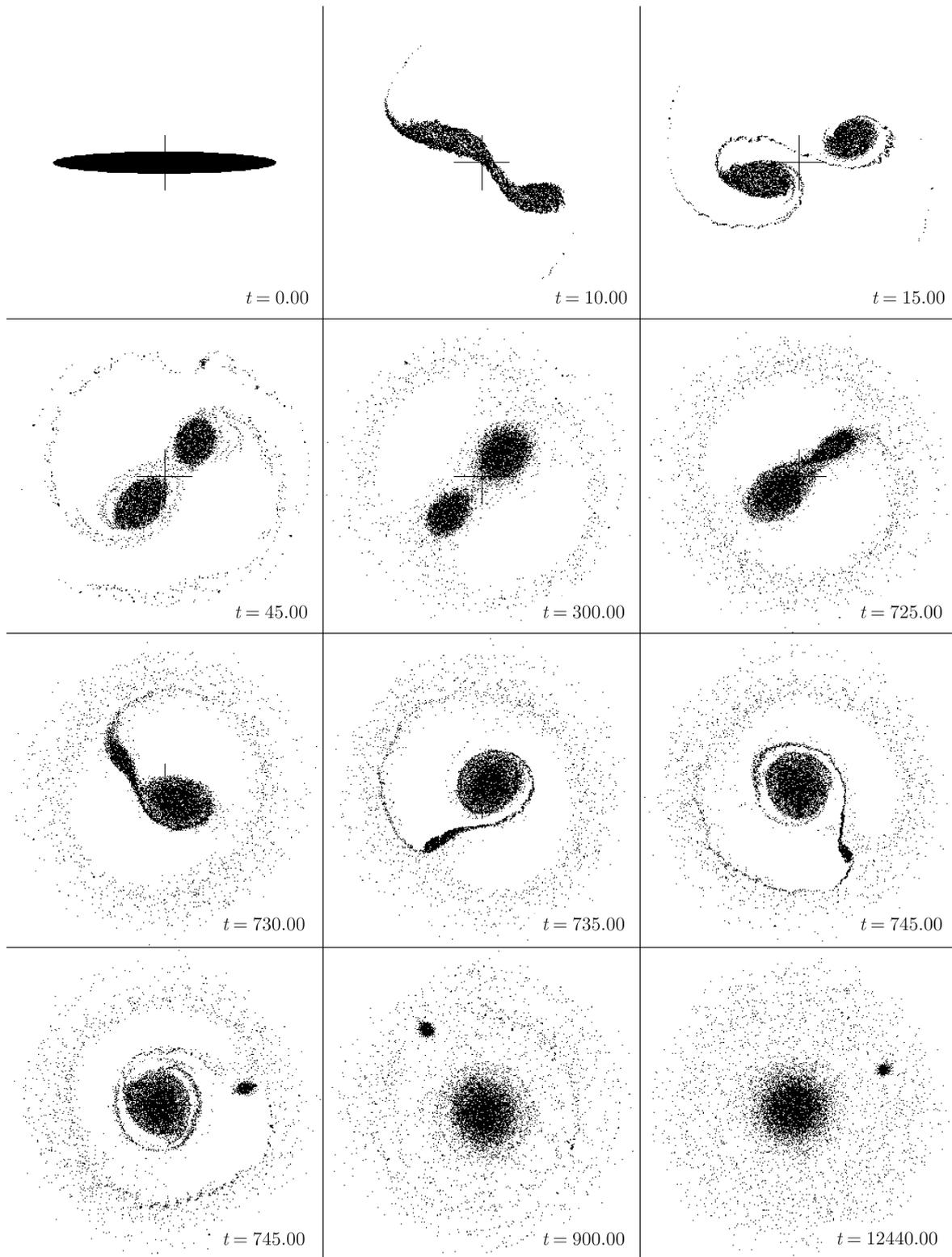


Рис. 5. Эволюция длинного вихревого эллипса ($N = 10000$, $b/a = 0,1$, $dt = 0,1$).

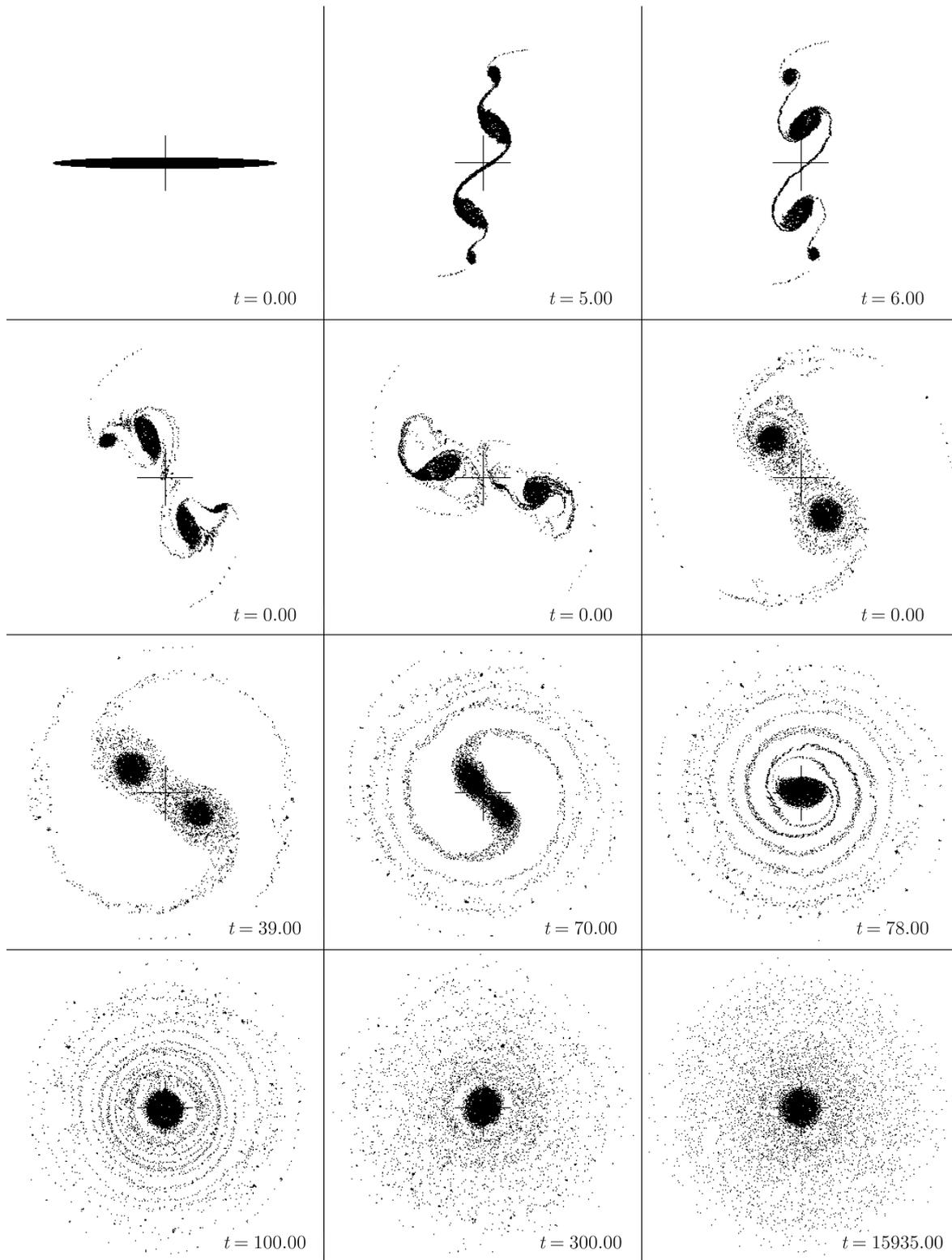


Рис. 6. Эволюция длинного вихревого эллипса ($N = 10000$, $b/a = 0,05$, $dt = 0,1$).

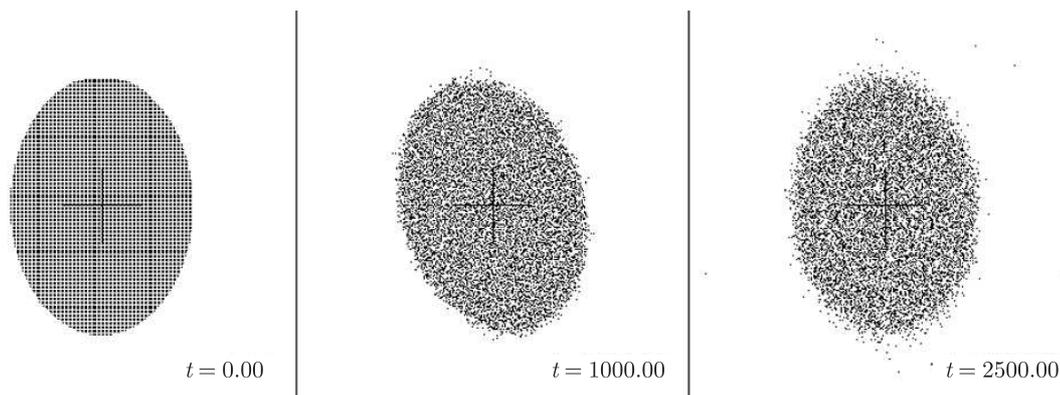


Рис. 7. Характерный вид эволюции вихревых эллипсов с малым эксцентриситетом ($N = 10000$, $b/a = 0,7$, $dt = 0,1$).

к сравнительно малому числу вихрей $N \sim 10^2$ и не позволяют с уверенностью судить о кластеризации и статистических свойствах.

Отметим также, что полученные результаты компьютерных экспериментов об асимптотическом поведении вихрей одного знака не подпадают под имеющиеся теоретические описания [1, 2, 13] и требуют дополнительного изучения.

Авторы выражают благодарность В. В. Козлову и А. В. Борису за полезные обсуждения и привлечение внимания к рассматриваемым в работе задачам.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09–01–00791–а. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-8784.2010.1).

Список литературы

- [1] Onsager L. Statistical hydrodynamics // Nuovo Cimento, 1949, suppl. to vol. 6, pp. 279–287.
- [2] Montgomery D., Joyce G. Statistical mechanics of negative temperature states // Phys. Fluids, 1974, vol. 17, no. 6, pp. 1139–1145.
- [3] Козлов В. В. Уравнение вихря $2D$ -гидродинамики, стационарное кинетическое уравнение Власова и развитая турбулентность // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 425–434.
- [4] Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew. Math., 1858, vol. 55, pp. 25–55.
- [5] Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962 [Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig: Mechanik, 1874].
- [6] Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей) Теория звука: Т. II. М.: ГИТТЛ, 1955. 476 с.
- [7] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
- [8] Love A. E. H. On the stability of certain vortex motions // Proc. London Math. Soc., 1894, vol. 25, pp. 18–42.
- [9] Bühler O. Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder // Phys. Fluids, 2002, vol. 14, no. 7, pp. 2139–2149.

- [10] Pavlov V., Buisine D., and Goncharov V. Formation of vortex clusters on a sphere // *Nonlinear Proc. Geophys.*, 2001, vol. 8, pp. 9–19.
- [11] Yatsuyanagi Yu., Kiwamoto Ya., Tomita H., Sano M. M., Yoshida T., and Ebisuzaki T. Dynamics of two-sign point vortices in positive and negative temperature state // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 94, 054502, 4 p.
- [12] Yoshida T., Sano M. M. Numerical simulation of vortex crystals and merging in N -point vortex systems with circular boundary // *J. Phys. Soc. Japan*, 2005, vol. 74, pp. 587–598.
- [13] Chavanis P. H., Lemou M. Kinetic theory of point vortices in two dimensions: Analytical results and numerical simulations // *Eur. Phys. J. B*, 2007, vol. 59, no. 2, pp. 217–247.
- [14] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2005. 368 с.
- [15] Weiss J. B., McWilliams J. C. Nonergodicity of point vortices // *Phys. Fluids*, 1991, vol. 3, no. 5, pp. 835–844.
- [16] Kizner Z., Khvoles R. The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions // *Phys. Rev. E*, 2004, vol. 70, 016307, 4 p.
- [17] Mitchell T. B., Rossi L. F. The evolution of Kirchhoff elliptic vortices // *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, no. 5, 054103, 12 p.
- [18] Guo Y., Hallstrom C., Spirn D. Dynamics near an unstable Kirchhoff ellipse // *Comm. Math. Phys.*, 2004, vol. 245, pp. 297–354.