

Приближенное решение задачи плоского движения твердых тел по шероховатой горизонтальной поверхности

О. Б. Федичев¹, П. О. Федичев²

¹Московский физико-технический институт (Гос. университет)
141700, Россия, Долгопрудный, Институтский пер., 9
obfedichev@gmail.com

²Quantum Pharmaceuticals
125171, Россия, Москва, ул. космонавта Волкова, д. 6А-606
peter.fedichev@gmail.com

Получено 15 декабря 2009 г.

Разработан универсальный метод построения приближенного решения задачи плоского движения твердых тел с осесимметричными распределениями масс и нормальных напряжений в пятне контакта по шероховатой горизонтальной поверхности. Для диска с распределением контактных напряжений Галина получены явные зависимости угловой и линейной скорости тела от времени. Относительная погрешность метода, примененного к диску Галина, не превышает 1,5–2%. Простота и высокая точность метода дают основание рекомендовать полученные результаты в практику инженерных расчетов.

Ключевые слова: сухое трение, диск Галина, плоское движение

O. B. Fedichev, P. O. Fedichev

An approximate solution of a 2D rigid body motion problem on a rough surface

We report a novel general method for constructing an approximate solution of the planar motion of solids with an axially symmetric mass distribution and normal stresses over the contact area on a rough horizontal surface. For a disk characterized by Galin distribution of contact stresses we obtain explicit dependence of the angular and sliding velocity of the body as a function of time. The relative errors of the method do not exceed 1,5–2%. The simplicity and high accuracy of the method let us recommend its applications in the practice of engineering calculations.

Keywords: dry friction, Galin disk, flat motion

Mathematical Subject Classification 2000: 70E18, 70G60

1. Введение

Сухое трение — широко распространенное в природе и технике явление. Движение твердого тела по шероховатой поверхности играет важную практическую роль в инженерных и транспортных задачах. Несмотря на то, что исследования динамики твердых тел под действием сил сухого трения продолжаются более 500 лет, остается ряд нерешенных проблем. Общее решение задачи получено только в случае параболических распределений контактных напряжений — точечного контакта Герца и контакта Галина. Цель настоящей работы — разработать метод построения приближенного решения задачи для других, известных в литературе, распределений контактных напряжений.

Одно из первых исследований движения кольца и диска по шероховатой горизонтальной плоскости, включая остановку, проведено в работе [1]. Точное вычисление главного вектора \mathbf{F} и главного момента \mathbf{M} сил трения в элементарных функциях осуществлено для распределения контактных напряжений Герца [2] и диска Галина [3]. В общем случае точных и простых выражений \mathbf{F} и \mathbf{M} не существует, и в ряде работ изучены их приближения с использованием разложений Паде [4]. Задача о трогании диска с места решена в [5]. Задача о движении диска Галина полностью решена в [6]. Диск с однородным распределением контактных напряжений рассмотрен приближенно в [7]. Особого внимания заслуживает экспериментальная работа [8], подтвердившая гипотезу о применимости закона Кулона сухого трения к подобным задачам в дифференциальной форме. Сформулированные ранее условия остановки твердого тела [8, 9] под действием сил комбинированного сухого трения позволили определить положение мгновенного центра скоростей в момент остановки и найти простые аналитические выражения для приближенного решения задачи с произвольными начальными условиями.

2. Обоснование метода

Рассмотрим плоское движение твердого тела по шероховатой горизонтальной поверхности со скоростью центра масс $v(t)$ и угловой скоростью $\omega(t)$; тогда уравнения его движения легко могут быть получены из основных теорем динамики об изменении импульса и кинетического момента. Воспользуемся обозначениями [4]

$$m\dot{v}(t) = -F_0 F(k), \quad (2.1)$$

$$R^{-1} J \dot{\omega}(t) = -M_0 M(k), \quad (2.2)$$

где m — масса тела, R — радиус тела, J — момент инерции тела относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, $F(k)$ и $M(k)$ — безразмерные главный вектор и главный момент сил трения в пятне контакта, F_0 и M_0 — главный вектор и главный момент сил трения чистого скольжения и чистого вращения, соответственно, использованы обозначения $u = R\omega$ и $k = v/u$. Будем предполагать, что элементарная сила трения и ее момент подчиняется закону Кулона сухого трения, тогда в результате получим выражения для главного вектора

$$F_0 F(k) = f R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \frac{\sigma(\rho)(k - \rho \sin \phi) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2k\rho \sin \phi + k^2}} \quad (2.3)$$



и главного момента

$$M_0 M(k) = fR^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \frac{\sigma(\rho)(\rho - k \sin \phi)\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2k\rho \sin \phi + k^2}} \quad (2.4)$$

сил комбинированного сухого трения, где f — коэффициент трения, $\sigma(\rho)$ — функция распределения нормальных напряжений в пятне контакта, ρ и ϕ — полярные координаты в пятне контакта [2].

Общее решение системы уравнений (2.1) и (2.2) с произвольными правыми частями формально существует [1], однако в элементарных функциях представимо крайне редко (контакты Герца [2] и Галина [3, 6]). Поэтому попытаемся искать решение приближенно в следующем параметрическом виде

$$v_-(k) = c_-(k_*^2 - k^2)^n k^y, \quad u_-(k) = c_-(k_*^2 - k^2)^n k^{y-1} \quad (2.5)$$

для $k \leq k_*$ и

$$v_+(k) = c_+(k^2 - k_*^2)^n k^z, \quad u_+(k) = c_+(k^2 - k_*^2)^n k^{z-1} \quad (2.6)$$

для $k > k_*$, где c_- и c_+ — константы, определяемые из начальных условий, k_* — значение параметра k в момент остановки. Подставим выражения (2.5) и (2.6) в систему (2.1) и (2.2), поделим второе уравнение на первое, тогда

$$\frac{\dot{u}_-}{\dot{v}_-} = \frac{1}{k} \frac{(y-1)k_*^2 - (y-1+2n)k^2}{yk_*^2 - (y+2n)k^2} = \frac{M_0 R m M_-(k)}{F_0 J F_-(k)} \quad (2.7)$$

для $k \leq k_*$ и

$$\frac{\dot{u}_+}{\dot{v}_+} = \frac{1}{k} \frac{(z-1)k_*^2 - (z-1+2n)k^2}{zk_*^2 - (z+2n)k^2} = \frac{M_0 R m M_+(k)}{F_0 J F_+(k)} \quad (2.8)$$

для $k > k_*$.

В правых частях полученных выражений кроме констант содержатся отношения $M(k)/F(k)$ в разных областях значений параметра k . Второй способ получения этих отношений заключается в делении интеграла (2.4) на интеграл (2.3). В случаях точечного контакта Герца и диска Галина это возможно, так как авторам [2, 3] удалось взять их в элементарных функциях. В случаях, когда интегралы (2.3) и (2.4) не берутся, предлагается проинтегрировать их численно и определить асимптотики их отношений в трех предельных случаях: $k \rightarrow 0$, $k \rightarrow k_*$ и $k \rightarrow \infty$. Такой подход реализован с использованием программного пакета «Математика» [10]. Практика применения предлагаемого метода к конкретным телам и типам распределений контактных напряжений показала необходимость сшивки первых производных отношения M/F при $k \rightarrow k_*$. В итоге получим четыре уравнения относительно трех показателей степеней n , y и z :

$$\frac{M_-}{F_-} \sim \frac{1}{k}, \quad k \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{M_-}{F_-} = \frac{M_+}{F_+}, \quad \left(\frac{M_-}{F_-}\right)'_k = \left(\frac{M_+}{F_+}\right)'_k, \quad k = k_*, \quad (2.10)$$

$$\frac{M_+}{F_+} \sim \frac{1}{k}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Из последней системы алгебраических уравнений однозначно определяются показатели степеней n , y и z , одно из уравнений системы удовлетворяется тождественно.



3. Пример реализации метода

Рассмотрим подробно диск Галина: $k_* = 1$, $\sigma(\rho) = N/(2\pi R^2 \sqrt{1 - \rho^2})$, N — нормальная нагрузка. Численное интегрирование (2.3) и (2.4) приводит к следующим значениям асимптотик (2.9)–(2.11):

$$\frac{M_-}{F_-} \rightarrow \frac{2}{k}, \quad k \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{M_-}{F_-} = \frac{M_+}{F_+} = 1, \quad \left(\frac{M_-}{F_-}\right)'_k = \left(\frac{M_+}{F_+}\right)'_k = -3, \quad k = 1, \quad (3.2)$$

$$\frac{M_+}{F_+} \rightarrow \frac{2}{3k}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Заметим, что при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ точные асимптотики (3.1)–(3.3) совпадают с аналогичными асимптотиками аппроксимаций Паде главного вектора и главного момента сил трения, а при $k \rightarrow 1$ — существенно отличаются.

Приравняв выражения (2.7) и (2.8) и их предельные значения (3.1)–(3.3), получим

$$\frac{y-1}{y} = 2, \quad \frac{z-1+2n}{z+2n} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1+n}{n} = 3.$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, получим численные значения показателей степеней (2.5) и (2.6) $n = 1/2$, $y = -1$, $z = 2$.

Окончательно

$$v_-(k) = c_-(1 - k^2)^{1/2} k^{-1}, \quad (3.4)$$

$$u_-(k) = c_-(1 - k^2)^{1/2} k^{-2} \quad (3.5)$$

для $k \leq 1$ и

$$v_+(k) = c_+(k^2 - 1)^{1/2} k^2, \quad (3.6)$$

$$u_+(k) = c_+(k^2 - 1)^{1/2} k \quad (3.7)$$

для $k > 1$. Константы c_- и c_+ определяются из начальных условий $v(t=0) = v_0$, $u(t=0) = u_0$.

Аналогичным способом можно получить общие решения задач для других конфигураций твердых тел и распределений контактных напряжений.

4. Верификация метода

Задача движения диска Галина по шероховатой плоскости решена точно [6] и может служить первичным эталоном оценки точности предлагаемого метода.

При $k \leq 1$ наблюдается полное совпадение с точным решением. При $k > 1$ сравнение затруднено, так как сопоставлению подлежат степенные и тригонометрические функции. Проведем сравнение графически. На рисунке 1 приведены зависимости от времени $v(t)$, $u(t)$, и $k^2(t)$ для диска Галина, полученные двумя способами: численным интегрированием уравнений движения (2.1)–(2.2) с известными правыми частями [3] (тонкие сплошные линии) и общее решение (3.6)–(4.1) (жирные штриховые линии). Визуально обнаружить

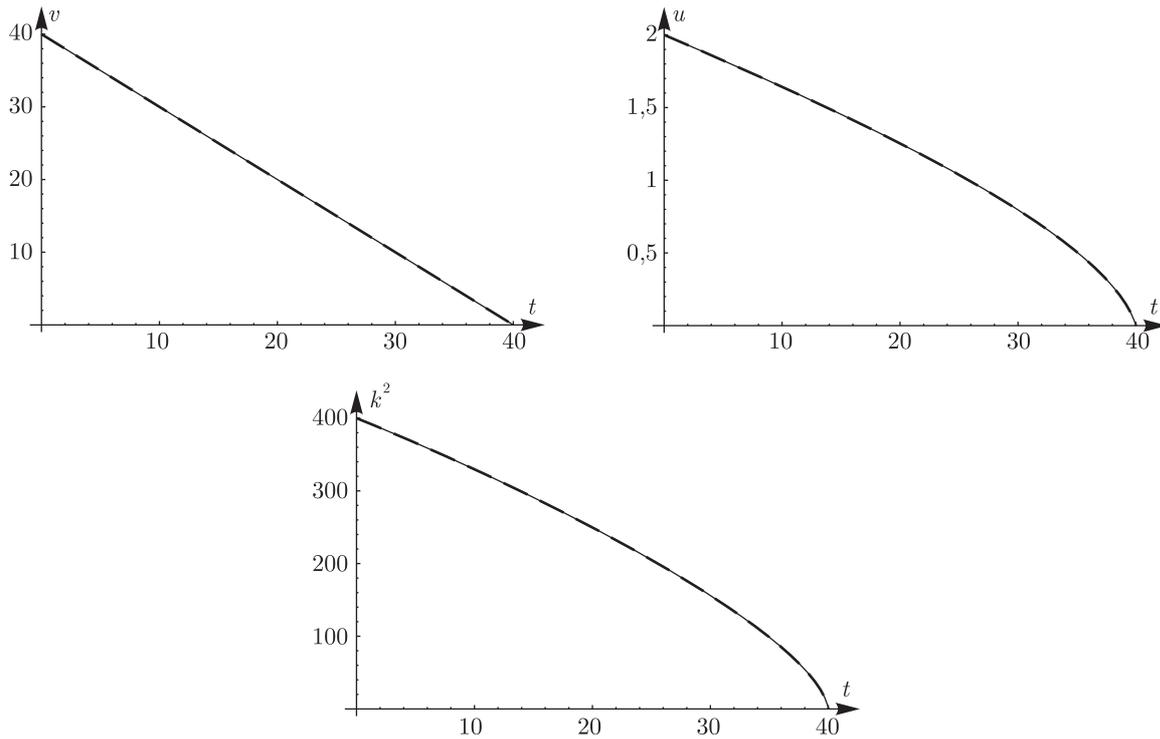


Рис. 1. Сравнение модельных и точных значений функций $u(t)$, $v(t)$, $k^2(t)$ для диска Галина с $u(t = 0) = 40$, $v(t = 0) = 2$.

расхождения не удалось даже при сильном увеличении масштаба рисунков. Только сравнение численных значений указанных параметров в отдельных точках позволило обнаружить расхождения в 3–4 знаке после запятой. Закладывая 3-кратный запас прочности, можно гарантировать точность предложенного метода построения общего решения задачи на уровне 1,5–2 %.

Примечательно, что явная зависимость параметра k от времени, полученная численным интегрированием системы (2.1)–(2.2) для диска Галина, аппроксимируется при $k > k_*$ выражением

$$k^2(t) = 1 + (k_0^2 - 1) \left(\frac{t_* - t}{t_*} \right)^{2/3}, \tag{4.1}$$

где t_* — время движения тела до полной остановки.

5. Заключение

Разработан метод построения общего решения задачи движения плоских тел с осесимметричными распределениями масс и нормальных напряжений в пятне контакта по шероховатой горизонтальной поверхности. На основании исследования уравнений движения в условиях комбинированного сухого трения скольжения и вращающегося в окрестности трех характерных точек $k \rightarrow 0$, $k \rightarrow k_*$ и $k \rightarrow \infty$ найдена универсальная параметрическая форма общего решения, пригодная для других известных распределений контактных напряжений, кроме точечного контакта Герца, который нуждается в дополнительном исследовании. Остальные параметры — время движения тела до остановки, пройденный путь и угол

поворота — определяются с помощью квадратур [9]. Метод верифицирован на примере диска с распределением контактных напряжений Галина. Точность предложенного метода построения общего решения задачи оценивается на уровне 1,5–2%. Результаты хорошо согласуются с полученными ранее другими авторами.

Опыт построения приближенного решения задачи показал, что аппроксимировать главный вектор и главный момент сил трения необходимо в двух областях параметра, $k > k_*$ и $k \leq k_*$. Причем более точно аппроксимируются не главный вектор и главный момент в отдельности, а их отношение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 08-01-00718) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/3604).

Список литературы

- [1] Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР, МТТ, 1981, т. 4, с. 17–28.
- [2] Журавлев В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, № 5, с. 762–767.
- [3] Киреев А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. РАН, МТТ, 2002, т. 41, с. 60–67.
- [4] Журавлёв В. Ф., Киреев А. А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН, МТТ, 2005, т. 2, с. 3–14.
- [5] Иванов А. П. О движении плоских тел при наличии трения покоя // Изв. РАН, МТТ, 2003, т. 4, с. 89–94.
- [6] Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения диска по шероховатой плоскости // Изв. РАН, МТТ, 2007, т. 4, с. 65–71.
- [7] Leine R. I., Glocker C. A set-valued force law for spatial Coulomb-Contensou friction // Europ. J. Mech. A. Solids, 2003, т. 22, с. 193–216.
- [8] Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Letters, 2003, т. 90, № 24, с. 248302.
- [9] Fedichev P., Fedichev O. Stopping dynamics of sliding and spinning bodies on a flat surface with dry friction (in press).
- [10] Wolfram S. The mathematica book. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.