УДК 514.8+517.958+517.984.5

# Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах

**А. А. Толченников[1], В. Л. Чернышев[2], А. И. Шафаревич[3]**

[1,3] Механико-математический факультет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы
[2] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
107005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5

[1] tolchennikovaa@gmail.com, [2] vchern@mech.math.msu.su, [3] shafar@mech.math.msu.su

*Получено 29 ноября 2009 г.*

В первой части статьи рассматривается квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для оператора Шрёдингера на геометрическом графе. Приведены статистические свойства соответствующей классической динамической системы: поведение «числа частиц» при больших временах, их распределение по графу. Описывается распределение энергии на однородном бесконечном регулярном дереве. Во второй части статьи описывается асимптотика спектра операторов Лапласа и Шрёдингера на тонком торе и на простейших поверхностях с дельта-потенциалами.

Ключевые слова: динамические системы, геометрические графы, квазиклассическое приближение, спектральная теория, оператор Шрёдингера

**A. A. Tolchennikov, V. L. Chernyshev, A. I. Shafarevich**

**Asymptotic properties and classical dynamical systems in quantum problems on singular spaces**

In the first part of the article we consider a semiclassical asymptotics for a Cauchy problem for the Schrödinger operator on a metric graph. We discuss the statistical properties of the corresponding classical dynamical system: the behavior of “number of particles” at large times and distribution of “particles” on the graph. We describe the distribution of energy on infinite regular trees. In the second part we describe the asymptotics of the spectrum of the Laplace and Schrödinger operators on a thin torus and on the simplest surfaces with delta-potentials.

Keywords: dynamical systems, quantum, metric graphs, semiclassical theory, spectral properties, Schrödinger operator
MSC 2010: 34B45, 35R02, 58J50, 81Q10, 81Q20

## 1. Введение

Квантовые задачи на сингулярных пространствах (геометрических графах, гибридных пространствах переменной размерности), а также родственные им задачи с сингулярными потенциалами активно исследовались в последние десятилетия (см., например, [4, 6, 8, 11] и цитированную там литературу). В частности, в работах [6, 9] подробно изучен вопрос о сингулярном пределе, т. е. о резольвентной сходимости или сходимости спектра семейства операторов к спектру оператора на графе или оператора с $\delta$-потенциалом (в последнем случае исследованы операторы в $\mathbb{R}^n, n \le 3$). В работах [7, 10, 13] изучались квазиклассические асимптотики в спектральной задаче и в задаче Коши на геометрическом графе; в частности, описана конструкция спектральных серий оператора Шрёдингера и построена квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для нестационарного уравнения с начальным условием, локализованным в малой окрестности точки. В настоящей работе обсуждаются свойства классической динамической системы, соответствующей такой задаче Коши; эта система, будучи очевидным образом интегрируемой при ограничении на ребро графа, в целом обнаруживает любопытные статистические свойства. В частности, мы обсуждаем асимптотику при больших временах «числа частиц» в такой системе на компактном графе, а также свойства распространения энергии на бесконечном дереве. Вторая часть работы посвящена поведению спектра операторов на простейших компактных поверхностях в сингулярных пределах (потенциал слабо сходится к $\delta$-функции или сама поверхность стягивается к кривой). Поверхности и операторы на них выбраны таким образом, чтобы предел собственных чисел можно было явно вычислить.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 07-07-00223-а, 07-01-00648-а, 08-01-00726-а, 09-07-00327-а), Министерства образования РФ (гранты РНП 2.1.1/ /227, РНП.2.1.1./3704, МОН 2.1.1/4540 ) и Совета по грантам Президента Российской Федерации: НШ-3224.2010.1, МК-943.2010.1.

Авторы благодарят О. М. Касим-Заде, Н. Г. Мощевитина, С. А. Степина, О. В. Соболева, В. Л. Прядиева, А. В. Боровских, П. Б. Курасова, М. М. Скриганова за полезные обсуждения.

## 2. Распространение квантовых пакетов на графе

Напомним (см., например, [4]), что геометрическим графом называется одномерный клеточный комплекс, ребра которого — параметризованные кривые. Пусть $\Gamma$ — геометрический граф, $\gamma_j$ — его ребра, $a_j$ — вершины. Через $\Gamma(a)$ обозначается совокупность ребер, примыкающих к вершине $a$.

Пусть $V$ произвольная, непрерывная на $\Gamma$ и гладкая на ребрах действительная функция. *Оператор Шрёдингера*

$$\widehat{H}\psi = -h^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) \tag{2.1}$$

определен на множестве функций из пространства Соболева $\psi \in \oplus \sum\limits_j H^2(\gamma_j)$, удовлетворяющих следующим граничным условиям в вершинах:

1. функция $\psi$ непрерывна на $\Gamma$;

2.
$$\sum_{\gamma_j\in\Gamma(a_m)} \alpha_j \frac{d\psi_j}{dx}(a_m) = 0, \tag{2.2}$$
во всех внутренних вершинах (т. е. в вершинах степени большей, чем единица);

3. $\psi(a_m) = 0$ во всех внешних вершинах, т. е. в вершинах степени один.

Здесь $\alpha_j = 1$ для каждого ребра, выходящего из вершины, и $\alpha_j = -1$ для каждого входящего ребра.

Замечание 1. Приведенные условия принято называть натуральными. Они, в частности, обеспечивают самосопряженность оператора $\widehat{H}$.

*Нестационарное уравнение Шрёдингера* на графе Γ — это уравнение вида
$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi, \tag{2.3}$$
где $h \to 0$ — квазиклассический параметр. Начальные условия выберем в виде узкого пакета, локализованного вблизи точки $x_0$, лежащей на ребре графа:
$$\psi(x,0) = h^{-1/4}K\exp\left(\frac{iS_0(x)}{h}\right), \tag{2.4}$$
$$S_0(x) = a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c,$$
где $b$ и $c$ — вещественные константы, $a$ и $K$ — комплексные, мнимая часть $a$ положительна. Нормировочный множитель $h^{-1/4}$ введен для того, чтобы начальная функция $\psi(x,0)$ была порядка единицы в норме пространства $L^2(\Gamma)$. За счет положительности мнимой части $a$ начальная функция локализована в малой окрестности точки $x_0$: $\psi(x,0) = O(h^\infty)$ при $|x-x_0| \geq \delta > 0$ ($\delta$ не зависит от $h$). В дальнейшем для простоты предполагается, что на графе Γ отсутствуют точки поворота (см., например, [2, 3]); их наличие можно учесть стандартным образом [3]. Для того чтобы точки поворота отсутствовали, достаточно потребовать «надбарьерности» $b^2 > \max V$. Асимптотика решения задачи Коши (2.3)–(2.4) описана в [10]; приведем соответствующие формулы. Рассмотрим в «фазовом пространстве» $\Gamma\times\mathbb{R}$ классическую функцию Гамильтона $H(x,p) = p^2 + V(x)$; на каждом множестве вида $\gamma_j\times\mathbb{R}$ эта функция задает гамильтонову систему
$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p,\\ \dot{p} &= -H_x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Траектория, выпущенная при $t = 0$ из точки $(x_0, b)$, в некоторый момент времени $t_1$ достигает вершины графа; в этот момент она порождает $m$ траекторий ($m$ — степень вершины), выпущенных из вершины с импульсом $p$, равным по абсолютной величине импульсу исходной траектории в вершине. Каждый раз при достижении одной из траекторий вершины этот процесс повторяется; таким образом, в каждый момент времени $t$ получаем набор из конечного числа $N(t)$ траекторий $(X_j(t), P_j(t))$.

**Теорема 2.1.** (См. [10, 13].) *Решение задачи Коши* (2.3)–(2.4) *при* $t\in[0,T]$ *(*$T$ *не зависит от* $h$*), имеет вид*
$$\psi(x,t,h) = \sum_{j=1}^{N(t)} h^{-1/4}\varphi_j(t)e^{iS_j(x,t)/h} + O(\sqrt{h}), \tag{2.6}$$

*где функции $\varphi_j(t), S_j(t)$ выражаются через траектории $X_j(t), P_j(t)$, а также через решения системы* (2.5)*, линеаризованной на этих траекториях.*

Явные формулы для $S_j, \varphi_j$ приведены в [10, 13]; каждое слагаемое в сумме (2.6) локализовано в малой окрестности точки $X_j(t)$.

Замечание 2. В [10, 13] показано, что в моменты достижения траекториями вершин графа квантовый пакет разделяется на $m$ пакетов ($m$ — степень вершины): один — отраженный и $m-1$ «рассеянный». При этом амплитуда пакета делится в отношении $(m-2):2$ (2 для рассеянных и $(m-2)$ для отраженного пакетов). Таким образом, чем больше степень вершины, тем сильнее отражение: при больших $m$ практически вся энергия отражается (несмотря на большое количество рассеянных волн).

Замечание 3. Как и в классическом случае задачи Коши для уравнения Шрёдингера в евклидовом пространстве, распространение квантовых пакетов в квазиклассическом приближении происходит по траекториям классической гамильтоновой системы. Однако в нашей ситуации эта система ветвится: наличие рассеяния в вершинах приводит к увеличению числа траекторий со временем.

## 3. Статистика числа пакетов

С ростом времени число $N(t)$ пакетов растет. Поведение этой функции при $t \to \infty$ определяется следующим утверждением. Обозначим через $t_k$ время, за которое классическая траектория, выпущенная из точки $(x_0, b)$, проходит $k$-е ребро графа, если это ребро не инцидентно вершине степени 1, и удвоенное время, если ребро инцидентно вершине степени 1 (поскольку классический гамильтониан не зависит от $t$, время $t_k$ определено однозначно).

**Теорема 3.1.** (См. [13].) *Пусть граф $\Gamma$ компактен и не содержит вершин степени* 2 *(такие вершины не дают отражения). Пусть, кроме того, числа $t_1, \ldots t_M$ несоизмеримы (т. е. линейно независимы над $\mathbb{Q}$). Функция $N(t)$ при $t \to \infty$ представляется в виде*

$$N(t) = Ct^{M-1} + o(t^{M-1}), \tag{3.1}$$

*где $C$ — положительная константа, $M$ — число ребер в графе.*

*Доказательство.* Изменение числа пакетов (или траекторий) возможно только в вершинах графа. Рассмотрим какую-либо фиксированную вершину. Пусть ее валентность равна $v$. Если в вершину одновременно приходит $k$ пакетов, то в этот момент появляется $v-k$ новых пакетов. Количество таких событий описывается числом целых неотрицательных чисел $n_j$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$n_1 t_{l_1} + \ldots + n_m t_{l_m} \leq t, \tag{3.2}$$

где $t_j$ — время прохождения траекторией $j$-го ребра. Действительно, пакеты не могут появляться в нашей вершине в моменты времени, не являющиеся линейной комбинацией (с целыми неотрицательными коэффициентами) времен прохождения ребер графа. Таким образом, мы каждый раз учитываем, по каким именно ребрам проходили те траектории, которые порождают пакеты, приходящие в фиксированную вершину. При этом числа $n_j$ показывают, сколько раз было так, что пакет оказывался на ребре с временем прохождения $t_{l_j}$. Так как все $t_j$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, старший коэффициент асимптотики числа пакетов при росте $t$ определяется объемом симплекса, задаваемого неравенством (3.2). Таким образом, чаще всего, с увеличением $t$, будут происходить те события, для которых число слагаемых в левой части неравенства вида (3.2) максимально (это следует из того, что число целых точек в расширяющемся симплексе размерности $k$ растет как $t^k$). Другими словами, число различных ребер, по которым уже прошли гауссовы пакеты, приходящие в нашу вершину, должно быть максимальным. Чтобы $v-k$ не было равным нулю, нам нужно исключить хотя бы одно ребро. Таким образом, если в графе найдется вершина, которая, после вычеркивания одного ребра, остается в подграфе, содержащем все оставшиеся ребра, то число слагаемых в левой части неравенства вида (3.2) будет максимально и равно $M-1$. Если таких вершин несколько, то получаем, что число возможных появлений некоторого числа новых пакетов задается аналогичными неравенствами (т. е. число целых точек в $(M-1)$-мерном симплексе может умножаться на число, зависящее только от графа). В связном графе, содержащем более одного ребра, вершина нужного нам типа всегда есть. Отбрасывание пакетов, рождение которых определяется неравенствами с меньшим числом слагаемых в левой части, не влияет на асимптотику. Действительно, вклад каждого слагаемого вида (3.2) в этом случае растет быстрее, чем $C_1 t^{M-2}$ ($C_1$ — константа); число таких слагаемых оценивается некоторой константой, зависящей от графа (в каждой вершине валентности $v$ таких слагаемых не более, чем $2^v$, а так как самих вершин конечное число, то в итоге получаем конечное число слагаемых порядка не выше, чем $t^{M-2}$). Это дает искомую асимптотику для числа $N(t)$.

В частном случае (для звездного графа и графа с двумя вершинами одинаковой степени) эта теорема была получена в [10]. В этих случаях можно получить более детальную информацию о функции $N(t)$. Именно, справедливы следующие утверждения (см. [10, 13]).

**Утверждение 3.1.** (См. [10, 13].) *Для звездного графа (состоящего из одной вершины валентности $v$ и $v$ вершин степени 1, которые соединены с первой), а также для графа, состоящего из двух вершин, соединенных $v$ ребрами, справедлива формула*

$$N(t)=\sum_{k=1}^{v-1}(v-k)\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant v} W\left(\Delta_k\left(\frac{t}{t_{i_1}},\ldots,\frac{t}{t_{i_k}}\right)\right), \tag{3.3}$$

*здесь $W\left(\Delta_k\left(\frac{t}{t_{i_1}},\ldots,\frac{t}{t_{i_k}}\right)\right)$ — это число точек целочисленной решетки, принадлежащих $k$-мерному симплексу $\Delta_k\left(\frac{t}{t_{i_1}},\ldots,\frac{t}{t_{i_k}}\right)$ с вершинами $t/t_{i_1},\ldots,t/t_{i_k}$ на координатных осях. При этом не учитываются точки, принадлежащие симлексам такого же вида (граням $\triangle_k$), но меньшей размерности. При $t\to\infty$*

$$N(T)=\frac{1}{(v-1)!}\frac{\sum_k t_k}{\prod_k t_k}t^{v-1}+o(t^{v-1}). \tag{3.4}$$

Замечание 4. Для случая трех ребер в [10] выписан и второй член асимптотики, а именно:

$$N(t)=\frac{1}{8}\frac{t_1+t_2+t_3}{t_1t_2t_3}t^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\Big)t+o(t). \tag{3.5}$$

Кроме того, для этого случая можно доказать [10], что пакеты при больших временах распределяются по графу равномерно; именно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.2.** (См. [10].) *Рассмотрим на одном из ребер отрезок $\lambda$, время прохождения которого равно $\tau$. Тогда, для почти всех $t_1$, $t_2$, $t_3$, отношение числа $N_\lambda$ квантовых* *пакетов на этом отрезке к числу пакетов на всем графе стремится при* $t \to \infty$ *к выражению*

$$\frac{N_\lambda(t)}{N(t)} \to \frac{\tau}{t_0}, \tag{3.6}$$

*где* $t_0 = t_1 + t_2 + t_3$ *— время прохождения всего графа.*

Замечание 5. Таким образом, квантовые пакеты распределяются равномерно по времени прохождения ребра. Очевидно, что это не означает, что пакеты распределяются равномерно по пространственной координате.

Замечание 6. Условие общего положения, содержащееся в теореме,— сильная несоизмеримость набора $t_1$, $t_2$, $t_3$.

## 4. Распространение пакетов на однородном дереве

Рассмотрим бесконечное дерево, у которого валентность всех вершин, кроме корневой, одинакова и равна $v$. Число, на единицу меньшее валентности, будем называть *числом ветвления* $b$. Предположим, кроме того, что длины всех ребер одинаковы и равны $l$. Потенциал также будем считать одинаковым для всех ребер (для простоты можно считать его нулевым). Дифференциальные операторы на подобных деревьях изучались, например, в [12].

**Определение 1.** Энергией на ребре будем называть следующую величину:

$$E_{\gamma_j} = \int\limits_{\gamma_j} |\psi|^2\, dx.$$

Очевидно, что она определяется суммой квадратов амплитуд для пакетов, носители которых попали на ребро.

Легко описать изменение энергии при прохождении вершины графа. Например, для бинарного дерева (т. е. для случая $b = 2$) получаем, что $8/9$ энергии проходит, а отражается $1/9$. Суммарная энергия, конечно, не меняется.

Пусть начальные данные имеют вид (2.4) и сконцентрированы на ребре, инцидентном корневой вершине. Возникает вопрос: вся ли энергия с ростом времени уйдет на бесконечность или будут ребра, на которых энергия при больших временах не будет стремиться к нулю?

Регулярность дерева делает квазиклассическую задачу дискретной, так как все взаимодействия происходят только в фиксированные моменты времени вида $t_0 + nL$, где $L$ — время прохождения ребра, а $t_0$ — время, за которое пакет достигнет первой вершины. Рассмотрим пространство амплитуд; на каждом ребре выделим два направления движения и будем отдельно учитывать пакеты, движущиеся в разные стороны. Амплитуды $\varphi_j$ всех пакетов на графе в данный момент времени описываются одним бесконечномерным вектором (состоянием). Каждому ребру соответствуют две компоненты: движение от корня (перечисляется первой) и движение к корню (перечисляется второй). Порядок, в котором ребра указываются в векторе, не имеет значения, так как переход от одного варианта к другому осуществляется с помощью линейной замены. Например, можно выбрать вариант, в котором ребра считаются по уровням, начиная от корня, а внутри каждого уровня — от правого ребра к левому. Рассмотрим линейный оператор $A$, который описывает переход от текущего состояния (в момент $t$) к следующему ($t + L$). Такой оператор можно описать с помощью бесконечной матрицы. Рассмотрим оператор $B$, равный квадрату $A$. Получаем, что эволюция начального состояния во времени описывается с помощью применения к исходному состоянию степеней оператора $B$. Отметим, что, согласно результатам предыдущего раздела, если начальные данные были сконцентрированы в одной точке, в любой конечный момент времени в векторе состояний будет только конечное число ненулевых компонент.

Опишем состояние $\rho$, которое переходит в себя под действием оператора $B$. Возьмем в начальный момент времени такой вектор амплитуд: на первом ребре единицу (пакет движется к корню), на втором и третьем (т. е. на ребрах второго уровня) по $-1/2$ (пакеты движутся от корня), на ребрах третьего уровня по $1/4$ (движение к корню), на ребрах четвертого уровня по $-1/8$ (движение от корня) и т. д., так чтобы для амплитуд разных уровней было выполнено соотношение $a_{k+1} = -a_k/2$ и всякий раз направление движения менялось. Такое состояние, после двукратного применения оператора $A$, перейдет само в себя (это собственный вектор оператора $B$). Таким образом, получаем, что если в качестве начальных условий выбрать $\rho$, то энергия не уходит на бесконечность (такое начальное условие представляет собой бесконечную сумму функций вида (2.4), каждая из которых сосредоточена на своем ребре, причем начальные положения $x_0$, фазы $S_0$ и амплитуды $K$ должны быть согласованы).

Эволюция начального пакета, сосредоточенного на первом ребре, исследовалось нами на компьютере. Численное моделирование показывает, что, для бинарного дерева, доля энергии, которая осталась на первом ребре, стремится при $t \to \infty$ к $1/4$, а доля энергии, не уходящей на бесконечность (т. е. сумма энергий, остающихся на всех ребрах), стремится к $1/2$. Отметим, что это значение соответствует энергии проекции начальных данных на вектор $\rho$. С увеличением числа ветвления доля энергии, которая не уходит на бесконечность, возрастает. При $b = 3$ оказывается, что остается $2/3$, а $b = 4$ дает $3/4$. Можно предположить, что для произвольного числа ветвления доля энергии составляет $(b-1)/b$. В приведенной ниже таблице 1 показана доля энергии $E$, остающейся на $l$-м уровне дерева после 1 000 шагов, для случаев $b = 2$, $b = 3$ и $b = 4$.

Таблица 1.

| $l$ | $E, b = 2$ | $E, b = 3$ | $E, b = 4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,250000 | 0,444444 | 0,562499 |
| 2 | 0,125000 | 0,148148 | 0,140625 |
| 3 | 0,062500 | 0,049383 | 0,035156 |
| 4 | 0,031250 | 0,016461 | 0,008789 |
| 5 | 0,015625 | 0,005487 | 0,002197 |
| 6 | 0,007813 | 0,001829 | 0,000549 |
| 7 | 0,003906 | 0,000610 | 0,000137 |
| 8 | 0,001953 | 0,000203 | 0,000034 |
| 9 | 0,000976 | 0,000068 | 0,000009 |
| 10 | 0,000488 | 0,000023 | 0,000002 |
| 11 | 0,000244 | 0,000008 | 0,000001 |
| 12 | 0,000122 | 0,000003 | 0,000000 |
| 13 | 0,000061 | 0,000001 | 0,000000 |
| 14 | 0,000031 | 0,000000 | 0,000000 |
| 15 | 0,000015 | 0,000000 | 0,000000 |
| 16 | 0,000008 | 0,000000 | 0,000000 |
| 17 | 0,000004 | 0,000000 | 0,000000 |
| 16 | 0,000002 | 0,000000 | 0,000000 |
| 19 | 0,000001 | 0,000000 | 0,000000 |

## 5. Спектр оператора Лапласа на тонком торе

Одна из причин, стимулировавших изучение операторов Шрёдингера на графах, состоит в том, что граф можно представлять себе как «предел» двумерной поверхности, если один из размеров уменьшается до нуля. В связи с этим интересен вопрос об асимптотическом поведении спектра оператора Шрёдингера в таком пределе. В общем случае этот вопрос достаточно сложен (см., например, [9]); ниже приводится пример, в котором асимптотика аналитических собственных значений (при условии, что они существуют) вычисляется явно.

**Теорема 5.1.** *Рассмотрим оператор Лапласа (отрицательный) на поверхности, полученной вращением окружности* $(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$ *вокруг оси* $Oy$. *Если* $\lambda(\varepsilon)$ *— аналитически зависящее от* $\varepsilon$ *собственное значение, то*

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}(\lambda_0+\varepsilon^2\lambda_2+\varepsilon^4\lambda_4+\ldots),$$

$\lambda_0 = -n^2, \lambda_2 = -\frac{1}{2}\frac{n^2}{4n^2-1}-m^2$ *при* $n\neq 1$ *и* $\lambda_2\in\{-\frac{5}{12}-m^2, \frac{1}{12}-m^2\}$ *(при* $n=1$*), где* $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

*Доказательство.* Разделяя переменные в уравнении на собственные значения оператора Лапласа, получаем для $u(\psi)$:

$$u''-(\varepsilon\sin\psi-\varepsilon^2\cos\psi\sin\psi+\varepsilon^3\cos^2\psi\sin\psi+o(\varepsilon^3))u'-(m^2\varepsilon^2-2m^2\varepsilon^3\cos\psi+o(\varepsilon^3))u = \\ =(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+o(\varepsilon^2))u.$$

Разложим $u(\psi)$ в ряд $u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\ldots$. Получим уравнение на $u_0$: $u_0''=\lambda_0 u_0$. То есть

$$\lambda_0=-n^2,\ u_0=C_1e^{in\psi}+C_2e^{-in\psi}.$$

Уравнение на $u_1$:

$$u_1''-\sin\psi u_0'=\lambda_1u_0+\lambda_0u_1,$$
$$u_1''+n^2u_1=\lambda_1\left(C_1e^{in\psi}+C_2e^{-in\psi}\right)+\frac{n}{2}\left(C_1e^{i(n+1)\psi}-C_1e^{i(n-1)\psi}-C_2e^{-i(n-1)\psi}+C_2e^{-i(n+1)\psi}\right).$$

Из условия разрешимости этого уравнения получаем, что $\lambda_1=0$. $u_1=C_3e^{in\psi}+C_4e^{-in\psi}+$ + (частное решение).
Уравнение на $u_2$:

$$u_2''+u_0'\sin\psi\cos\psi-u_1'\sin\psi-m^2u_0=\lambda_0u_2+\lambda_2u_0,$$

$$2(u_2''+n^2u_2)=nC_3e^{i(n+1)\psi}-nC_4e^{-i(n-1)\psi}+C_1\frac{n(n+1)}{-2(2n+1)}e^{i(n+2)\psi}-C_1\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}e^{in\psi}+$$

$$+C_2\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}e^{-i(n-2)\psi}+C_2\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}e^{-in\psi}-$$

$$-nC_3e^{i(n-1)\psi}+nC_4e^{-i(n+1)\psi}-C_1\frac{n(n+1)}{-2(2n+1)}e^{in\psi}+C_1\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}e^{i(n-2)\psi}-$$

$$-C_2\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}e^{-in\psi}-C_2\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}e^{-i(n+2)\psi}-$$

$$-\frac{n}{2}\left(C_1e^{i(n+2)\psi}-C_1e^{i(n-2)\psi}-C_2e^{-i(n-2)\psi}+C_2e^{i(n+2)\psi}\right)+$$
$$+\lambda_2(C_1e^{in\psi}+C_2e^{-in\psi}).$$

При $n \neq 1$ условие разрешимости будет иметь вид

$$\lambda_2=-\frac{1}{2}\frac{n^2}{4n^2-1}-m^2.$$

При $n=1$ получаем систему:

$$\left(\frac{1}{6}+\lambda_2+m^2\right)C_1+\frac{1}{4}C_2=0,$$
$$\frac{1}{4}C_1+\left(\frac{1}{6}+\lambda_2+m^2\right)C_2=0,$$

откуда $\lambda_2 \in \{-\frac{5}{12}-m^2, \frac{1}{12}-m^2\}$. Уравнение для $u_3$:

$$u_3''+n^2u_3=\sin\psi u_2'-\cos\psi\sin\psi u_1'-\cos^2\psi\sin\psi u_0'-2m^2\cos\psi u_0+$$
$$+m^2+\lambda_1u_2+\lambda_2u_1+\lambda_3u_0,$$

в правой части этого уравнения коэффициенты при $e^{in\psi}$ и $e^{-in\psi}$ равны $C_1\lambda_3$ и $C_2\lambda_3$. Откуда $\lambda_3=0$. ■

## 6. Спектр оператора Шрёдингера на окружности, сфере и диске с дельта-образным потенциалом

Спектральные задачи на графах и декорированных графах тесно связаны с задачами с дельта-потенциалами (см., например, [6, 8]), которые представляют самостоятельный интерес. Предельное поведение оператора Шредингера с дельта-образным потенциалом в евклидовом пространстве размерности не выше трех (в частности, поведение спектра) подробно изучено в [6]. В частности, там доказана резольвентная сходимость оператора с семейством потенциалов, сходящимся к дельта-функции, к оператору с дельта-потенциалом. Отметим, что к операторам на компактных многообразиях результаты [6], вообще говоря, неприменимы; ниже приводятся примеры аналогичных операторов на окружности, сфере и диске, для которых предельное поведение спектра вычисляется явно. Оказывается, в одномерном случае (т.е. для оператора на окружности) спектр сходится к спектру оператора с дельта-потенциалом, в то время как в двумерном (на сфере и диске) — влияние дельта-образного семейства в пределе исчезает.

**Теорема 6.1.** *Рассмотрим задачу на окружности, параметризованной $x \in [0,1)$:*

$$-y''+\frac{1}{\varepsilon}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)y=\lambda y,$$

*где $V(x)$ — интегрируемая функция с носителем $[0,1]$. Для каждой точки $\lambda_0$ вида $(2\pi k)^2$ ($k \in \mathbb{N}$) или решения уравнения $\frac{1}{M}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}}\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}$ (где $M=\int_0^1 V(x)\,dx$) существует* *единственное собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, так что $\lambda(\varepsilon)\to\lambda_0$. Других собственных значений нет.*

*Доказательство.* Сначала рассмотрим это уравнение на $[0,\varepsilon]$ и напишем фундаментальную систему решений. Делаем замену переменных $x\to x\varepsilon$. Тогда получаем задачу $-y''+\varepsilon V(x)y=\varepsilon^2\lambda y$ на $[0,1]$. Раскладываем $y(x)$ в ряд по $\varepsilon$: $y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\ldots$. Тогда получаем уравнения:

$$-y_0''=0,$$
$$-y_1''+Vy_0=0,$$
$$-y_2''+Vy_1=\lambda y_0.$$

Построим такие разложения для фундаментальной системы решений $y^1(x), y^2(x)$. Причем потребуем, чтобы $y^1(0)=1$, $(y^1)'(0)=0$ и $y^2(0)=0$, $(y^2)'(0)=1$. Для $y^1(x)$ получаем:

$$y_0^1(x)=1,$$
$$y_1^1(x)=x\int_0^x V(\xi)\,d\xi-\int_0^x V(\xi)\xi\,d\xi,$$
$$y_2^1(x)=x\int_0^x (V(\xi)y_1^1(\xi)-\lambda)\,d\xi-\int_0^x (V(\xi)y_1^1(\xi)-\lambda)\xi\,d\xi.$$

А поскольку $\max|y_{n+1}|\leqslant 2\|V\|_1\max|y_n|+2\lambda$, то построенный ряд для $y^1$ сходится равномерно при ограниченном $\lambda$.

Формулы для $y^2(x)$:

$$y_0^2(x)=x,$$
$$y_1^2(x)=x\int_0^x V(\xi)\xi\,d\xi-\int_0^x V(\xi)\xi^2\,d\xi.$$

Тогда

$$y^1(1)=1+\varepsilon\int_0^1 V(\xi)(1-\xi)\,d\xi+o(\varepsilon),\quad (y^1)'(1)=\varepsilon\int_0^1 V(\xi)\,d\xi+o(\varepsilon),$$
$$y^2(1)=1+\varepsilon\int_0^1 V(\xi)\xi(1-\xi)\,d\xi+o(\varepsilon),\quad (y^2)'(1)=1+\varepsilon\int_0^1 V(\xi)\xi\,d\xi+o(\varepsilon).$$

Рассматривая уравнения на остальной части окружности $x\in[\varepsilon,1)$, получаем фундаментальную систему:

$$\cos\sqrt{\lambda}(1-x),\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(1-x).$$

Требуя гладкости от глобального решения, получаем два условия в точке $x=\varepsilon$:

$$Ay^1(1)+\varepsilon By^2(1)=A\cos\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon)-\frac{B}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon),$$
$$A(y^1)'(1)+\varepsilon B(y^2)'(1)=\varepsilon(\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon))+B\cos(\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon))).$$

Пользуясь найденными выше разложениями, легко показать, что равенство определителя этой системы нулю имеет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon}\det(\varepsilon,\sqrt{\lambda})=(1-\cos\sqrt{\lambda})^2-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\ (M-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda})+f(\varepsilon,\sqrt{\lambda})=0,$$

где $f(\varepsilon, t)$ — гладкая на $(0, \varepsilon_0) \times (0, \infty)$ функция, и $f(\varepsilon, t) = o(\varepsilon)$ при условии ограниченности $t$. Для всех непрерывных решений $\lambda(\varepsilon)$ этого уравнения выполнено $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_0$, где $\lambda_0$ — решение уравнения

$$\sin \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} \left( 2 \sin \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \cos \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} M \right) = 0.$$

А поскольку $\left( \frac{1}{\varepsilon} \det(\varepsilon, \sqrt{\lambda}) \right)'_{\lambda} (0, \lambda_0) \neq 0$, то по теореме о неявных функциях для каждого $\lambda_0$ существует единственное решение $\lambda(\varepsilon)$, так что $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_0$. ■

Замечание 7. Таким образом, спектр сходится к спектру оператора с дельта-потенциалом.

**Теорема 6.2.** *Рассмотрим задачу на нахождение собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на стандартной двумерной сфере радиуса* 1*:*

$$(-\Delta + V_\varepsilon(\cos\psi))u = \lambda u,$$

*где $\psi$ — широта, $V_\varepsilon(\cos\psi) = \dfrac{C}{\varepsilon^2}$ при $0 < \psi < \varepsilon$, и $V_\varepsilon(\cos\psi) = 0$ при $\psi > \varepsilon$.*

*Тогда каждая непрерывная и ограниченная функция $\lambda(\varepsilon)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к числу вида $n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

*Доказательство.* После разделения переменных и замены $z = \cos\psi$ получим собственную функцию $u = \sum e^{im\varphi} u_m(z)$, где

$$(1 - z^2)u''_m - 2zu'_m + \left( \lambda - V(z) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) u_m = 0.$$

1) Пусть $m > 0$. Решения этого уравнения $P_n^m(z)$ и $Q_n^m(z)$ ($n(n+1) = \lambda$ в окрестности $z = -1$, $n(n+1) = \lambda - \dfrac{C}{\varepsilon^2}$ в окрестности $z = 1$) имеют следующие асимптотики:

$$P_n^m(z) \sim \frac{(-1)^m 2^{-\frac{m}{2}} \Gamma(n + m + 1)(1 - z)^{\frac{m}{2}}}{m!\Gamma(n - m + 1)}, \; Q_n^m(z) \sim (-1)^m 2^{\frac{m}{2} - 1} \Gamma(m)(1 - z)^{-\frac{m}{2}}, \; z \to 1,$$

$$P_n^m(z) \sim -\frac{1}{\pi} 2^{\frac{m}{2}} \sin(\pi n)\Gamma(m)(1 + z)^{-\frac{m}{2}}, \; Q_n^m(z) \sim -2^{\frac{m}{2} - 1} \Gamma(m) \cos(\pi n)(1 + z)^{-\frac{m}{2}}, \; z \to -1.$$

Можно выбрать базис в пространстве решений $\{w_1, w_2\}$ таким образом, чтобы в окрестности особой точки $z_0 = -1$ решения имели вид $w_1 = (1 + z)^{\frac{m}{2}} a_1(z)$, $\quad w_2 = C w_1 \ln(1 + z) + (1 + z)^{-\frac{m}{2}} a_2(z)$, где $a_1$, $a_2$ — аналитические функции. Поэтому чтобы решение в окрестности точки $-1$ не имело особенностей, оно должно быть пропорционально

$$\cos(\pi n_-) P_{n_-}^m(z) - \frac{2}{\pi} \sin(\pi n_-) Q_{n_-}^m(z).$$

Потребовав гладкости решения, получаем уравнение на спектр:

$$\frac{\cos(\pi n_-)(P_{n_-}^m)'(\cos\varepsilon) - \frac{2}{\pi} \sin(\pi n_-)(Q_{n_-}^m)'(\cos\varepsilon)}{\cos(\pi n_-) P_{n_-}^m(\cos\varepsilon) - \frac{2}{\pi} \sin(\pi n_-) Q_{n_-}^m(\cos\varepsilon)} = \frac{(P_{n_+}^m)'(\cos\varepsilon)}{P_{n_+}^m(\cos\varepsilon)},$$

где $n_+(n_+ + 1) = \lambda - \dfrac{C}{\varepsilon^2}$, $n_-(n_- + 1) = \lambda$.

Или

$$\frac{2}{\pi}\,\mathrm{tg}(\pi n_-) = \frac{(P^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)P^m_{n_+}(\cos\varepsilon) - P^m_{n_-}(\cos\varepsilon)(P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon)}{(Q^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)P^m_{n_+}(\cos\varepsilon) - Q^m_{n_-}(\cos\varepsilon)(P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon)}. \tag{6.1}$$

Для нахождения ограниченных решений найдем асимптотику правой части уравнения по $\varepsilon$ в предположении, что $\lambda$ принадлежит конечному промежутку.

Поскольку (см. [1], с. 144)

$$P^m_n(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}} \mathbf{F}\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1-x}{2}\right),$$

то

$$P^m_{n_-}(\cos\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon^m}{2^m}\frac{(-n_-)_m(n_-+1)_m}{m!},$$

$$(P^m_{n_-})'(\cos\varepsilon) \sim -\frac{\varepsilon^{m-2}}{2^m}\frac{(-n_-)_m(n_-+1)_m}{(m-1)!}.$$

Легко показать, что ряд для $\mathbf{F}\left(-n_+, n_++1, 1-m; \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)$ сходится равномерно по $\varepsilon$, и

$$\mathbf{F}\left(-n_+, n_++1, 1-m; \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right) \to \sum_{s=m}\frac{\left(\frac{C}{4}\right)^s}{(s-m)!s!} = J_{-m}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^m,$$

где $J_{-m}$ — функция Бесселя. Поэтому

$$P^m_{n_+}(\cos\varepsilon) \sim \varepsilon^{-m}\ 2^m J_{-m}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^m,$$

$$(P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon) \sim \varepsilon^{-m-2}m2^m\ J_{-m}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^m - \varepsilon^{-m-2}2^{m-1}CJ_{-m+1}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^{m-1}.$$

Числитель правой части уравнения (6.1) эквивалентен

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{(-n_-)_m(n_-+1)_m}{(m-1)!}\left(-2J_{-m}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^m + \frac{1}{2m}CJ_{-m+1}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^{m-1}\right).$$

Знаменатель же необходимо вычислить с дополнительной поправкой по $\varepsilon$. Явный вид функции $Q^m_n(x)$ (см. [1], с. 150):

$$2Q^m_n(x) = P^m_n(x)\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 2\Gamma'(1) - \gamma(n+m+1) - \gamma(n-m+1)\right) -$$

$$+(-1)^m\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-n)_r(n+1)_r(m-r-1)!}{r!}(-1)^r\left(\frac{1-x}{2}\right)^r -$$

$$+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-n)_{r+m}(n+1)_{r+m}}{r!(r+m)!}\ \sigma(r)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{m+r} -$$

$$+(-1)^m(n-m+1)_{2m}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{m}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)_r(n+1)_r}{r!(r+m)!}\ \sigma(m+r)\left(\frac{1-x}{2}\right)^r,$$

где $\sigma(r) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}$ и $(a)_r = a(a+1)\cdots(a+r-1)$.

А) Рассмотрим случай $m>1$. Тогда первые два главных члена в разложении для $Q^m_{n_-}(\cos\varepsilon)$ и $(Q^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)$ появляются из второго слагаемого:

$$2Q^m_{n_-}(\cos\varepsilon) = (-1)^m \frac{2^m}{\varepsilon^m}\left(1-\frac{m}{12}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right)\Bigg((m-1)!+$$

$$+\frac{n_-(n_-+1)}{2}(m-2)!\frac{\varepsilon^2}{4}(1-\frac{\varepsilon^2}{12}+o(\varepsilon^2))\Bigg) =$$

$$= (-1)^m\ (m-1)!\ \frac{2^m}{\varepsilon^m}\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\lambda}{8(m-1)}-\frac{m}{12}\right)+o(\varepsilon^2)\right),$$

$$2(Q^m_{n_-})'(\cos\varepsilon) = (-1)^m\ m!\ \frac{2^m}{\varepsilon^{m+2}}\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\lambda}{8(m-1)}-\frac{m}{12}+\frac{1}{3}\right)+o(\varepsilon^2)\right).$$

Теперь найдем уточненные разложения для $P^m_{n_+}(\cos\varepsilon)$ и $(P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon)$. Обозначим $A=\sqrt{-C}$, тогда

$$-n_+ = -\frac{A}{\varepsilon}\left(1-\varepsilon\frac{1}{2A}+\varepsilon^2\frac{\lambda+\frac{1}{4}}{2A^2}+o(\varepsilon^2)\right),$$

$$(-n_+)_s = (-1)^s\frac{A^s}{\varepsilon^s}\left(1-\varepsilon\frac{s^2}{2A}+\varepsilon^2\frac{1}{A^2}\left(\frac{s}{2}\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)+q_s\right)+o(\varepsilon^2)\right),$$

$$(n_++1)_s = \frac{A^s}{\varepsilon^s}\left(1+\varepsilon\frac{s^2}{2A}+\varepsilon^2\frac{1}{A^2}\left(\frac{s}{2}\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)+q_s\right)+o(\varepsilon^2)\right),$$

где

$$q_s = q_{s-1}+\frac{2s-1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{2s-3}{2}\right) = \frac{1}{8}s^4-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{24}s,$$

$$\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\right)^s = \frac{\varepsilon^{2s}}{2^{2s}}\left(1-\varepsilon\frac{s}{12}+o(\varepsilon)\right).$$

Получаем

$$\mathbf{F}\left(-n,n+1;1-m;\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\right) = \sum_{s=m}\frac{(-1)^s\left(\frac{A}{2}\right)^{2s}}{s!(s-m)!}+$$

$$+\varepsilon^2\sum_{s=m}\frac{(-1)^s\left(\frac{A}{2}\right)^{2s}}{s!(s-m)!}\left(\frac{1}{A^2}\left[s\lambda+\frac{1}{4}s^4-\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{3}s\right]-\frac{s}{12}\right)+o(\varepsilon^2) =$$

$$= K^m_0+\varepsilon^2K^m_1+o(\varepsilon^2),$$

в этих обозначениях:

$$P^m_{n_+}(\cos\varepsilon) = \frac{2^m}{\varepsilon^m}\left(K^m_0+\varepsilon^2\left(K^m_1-\frac{m}{12}K^m_0\right)+o(\varepsilon^2)\right),$$

$$(P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon) = \frac{2^{m-1}}{\varepsilon^{m+2}}\Bigg(2mK^m_0+A^2K^{m-1}_0+$$

$$+\varepsilon^2\left(2mK^m_1+2mK^m_0\left(\frac{1}{3}-\frac{m}{12}\right)+K^{m-1}_0\left(\lambda-A^2\frac{m}{12}\right)+A^2K^{m-1}_1\right)+o(\varepsilon^2)\Bigg).$$

Таким образом, знаменатель дроби (6.1) имеет асимптотическое разложение

$$\frac{1}{\varepsilon^{2m+2}}(-1)^m(m-1)!\ 2^{2m-2}CK_0^{m-1}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^{2m}}(-1)^m(m-1)!\ 2^{2m-2}\left(-A^2K_1^{m-1}-K_0^{m-1}\left(\lambda-A^2\frac{m}{6}+A^2\frac{\lambda}{8(m-1)}\right)\right)+o(\varepsilon^{-2m}).$$

Заметим, что $K_0^m(A)=J_{-m}(A)\left(\frac{A}{2}\right)^m$. Таким образом, если $J_{-m+1}(A)\neq 0$, то правая часть уравнения (6.1) равномерно по ограниченному $\lambda$ эквивалентна

$$\varepsilon^{2m}\frac{(-n)_m(n+1)_m(-1)^m}{((m-1)!)^2\ 2^{2m-1}}\left(2\frac{J_{-m}(A)}{A\ J_{-m+1}(A)}+\frac{1}{m}\right).$$

Если же $J_{-m+1}(A)=0$, то знаменатель дроби (6.1) принимает вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2m}}(-1)^m(m-1)!\ 2^{2m-2}CK_1^{m-1}(A)$$

и вся дробь есть $O(\varepsilon^{2m-2})$.

Б) Рассмотрим случай $m=1$, тогда

$$P^1_{n_-}(\cos\varepsilon)=-\frac{\lambda}{2}\varepsilon+O(\varepsilon^2),\quad (P^1_{n_-})'(\cos\varepsilon)=\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\varepsilon}+O(1),$$
$$Q^1_{n_-}(\cos\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\lambda}{2}\varepsilon\ln\varepsilon+O(\varepsilon),\quad (Q^1_{n_-})'(\cos\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon^3}-\frac{\lambda}{2}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon}+O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big).$$

Таким образом, если $P^1_{n_+}(\cos\varepsilon)=\frac{\alpha}{\varepsilon}+O(\varepsilon)$, $(P^1_{n_+})'(\cos\varepsilon)=\frac{\beta}{\varepsilon^3}+O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)$, то знаменатель (6.1) имеет вид

$$\frac{1}{\varepsilon^4}(\alpha-\beta)+\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{\lambda}{2}(\alpha+\beta)+O\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\Big).$$

Если $A$ таково, что $\alpha-\beta=-A^2J_0(A)\neq 0$, то правая часть (6.1) есть $O(\varepsilon^2)$. Если же $J_0(A)=0$, то $\alpha+\beta=2J_{-1}(A)A\neq 0$, так как у $J_0$ и $J_{-1}$ нет общих нулей. И правая часть (6.1) есть $O\Big(\frac{1}{\ln\varepsilon}\Big)$.

2) Пусть $m=0$. Тогда $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имеют асимптотики:

$$P_n(x)\sim 1,\quad Q_n(x)\sim -\frac{1}{2}\ln(1-x),\quad x\to 1,$$
$$P_n(x)\sim\frac{\sin\pi n}{\pi}\ln(1+x),\quad Q_n(x)\sim\frac{\cos\pi n}{2}\ln(1+x),\quad x\to -1,$$

Уравнение на спектр остается тем же самым, однако

$$P^m_{n_-}(\cos\varepsilon)\sim 1,\quad (P^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)\sim\frac{\lambda}{2},$$
$$Q^m_{n_-}(\cos\varepsilon)\sim -\ln\varepsilon,\quad (Q^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)\sim\varepsilon^{-2},$$
$$P^m_{n_+}(\cos\varepsilon)\sim J_0(A),\quad (P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon)\sim -\frac{A}{\varepsilon^2}J_1(A).$$

Значит, если $J_1(A)\neq 0$, то правая часть (6.1) есть $-\frac{1}{\ln\varepsilon}$. В противном случае $J_0(A)\neq 0$, и правая часть есть $O(\varepsilon^2)$.

Замечание 8. Таким образом, спектр оператора с дельта-образным потенциалом в пределе сходится к спектру лапласиана, т.е. влияние потенциала в пределе исчезает. Тот же эффект проявляется в задаче на диске.

**Теорема 6.3.** *Рассмотрим задачу*

$$-\Delta f + V_\varepsilon(r) f = \lambda f$$

*в круге радиуса* 1. *Здесь* $\Delta$ *— оператор Лапласа (положительный) с условием Дирихле на границе круга,* $V_\varepsilon(r) = 0$ *при* $r > \varepsilon$, $V_\varepsilon(r) = \dfrac{C}{\varepsilon^2}$ *при* $r < \varepsilon$.

*Тогда каждая непрерывная и ограниченная функция* $\lambda(\varepsilon)$ *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к собственному значению* $\Delta$, *т. е. к нулю функции Бесселя* $J_m(z)$.

*Доказательство.* Разделяем переменные $f = R(r)e^{im\phi}$ и получаем уравнение на $R(r)$:

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R + \left(\lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}\right) R = 0.$$

При $r < \varepsilon$ решение, не имеющее особенности в нуле,— $J_m\left(\sqrt{\lambda - \dfrac{C}{\varepsilon^2}}\, r\right)$. При $r > \varepsilon$ решение есть линейная комбинация $J_m(\sqrt{\lambda}\, r) Y_m(\sqrt{\lambda}) - J_m(\sqrt{\lambda}) Y_m(\sqrt{\lambda}\, r)$ (где $Y_m(z)$ — функция Ханкеля). Требуя гладкости решения при $r = \varepsilon$, получаем:

$$\sqrt{\lambda}\, \frac{Y_m(\sqrt{\lambda}\,)\, J'_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) - J_m(\sqrt{\lambda}\,)\, Y'_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon)}{Y_m(\sqrt{\lambda}\,)\, J_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) - J_m(\sqrt{\lambda}\,)\, Y_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon)} = \sqrt{\lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}}\; \frac{J'_m\left(\sqrt{\lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}}\; \varepsilon\right)}{J_m\left(\sqrt{\lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}}\; \varepsilon\right)},$$

или

$$\frac{J_m(\Lambda)}{Y_m(\Lambda)} = \frac{\varepsilon\Lambda J'_m(\Lambda\varepsilon) J_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}) - J'_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C})\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}\; J_m(\Lambda\varepsilon)}{\varepsilon\Lambda Y'_m(\Lambda\varepsilon) J_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}) - J'_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C})\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}\; Y_m(\Lambda\varepsilon)}. \tag{6.2}$$

Покажем, что правая часть (6.2) равномерно по ограниченному $\lambda$ сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Поскольку при $m > 0$

$$J_m(z) = (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} + o(z^m),$$
$$J'_m(z) = (-1)^m \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} + o(z^{m-1}),$$

то числитель (6.2) есть $O(\varepsilon^m)$.

1) Разберем случай $m = 1$:

$$Y_1(z) = -\frac{2}{z} + \frac{z}{2}\left(2\ln\frac{z}{2} + 2\gamma - 1\right) + O(z^3 \ln z),$$
$$Y'_1(z) = -\frac{2}{z^2} + \ln\frac{z}{2} + \gamma + \frac{1}{2} + O(z^2 \ln z)$$

(см. [5], 17.61, с. 211). Обозначим $A = \sqrt{-C}$. Знаменатель дроби (6.2) имеет вид

$$\frac{2}{\Lambda\varepsilon}\Big(J_1(A) + J'_1(A)A\Big) + \Lambda\varepsilon \ln\varepsilon\, \big(J_1(A) - J'_1(A)A\big) + O(\varepsilon).$$

Если $J_1(A) + J_1'(A)A \neq 0$, то правая часть (6.2) есть $O(\varepsilon^2)$. Если же $J_1(A) + J_1'(A)A = 0$, то $J_1(A) - J_1'(A)A \neq 0$, так как нули функции Бесселя простые. Тогда правая часть (6.2) есть $O\left(\frac{1}{\ln\varepsilon}\right)$.

2) В случае $m > 1$ дробь есть $O(\varepsilon^{2m})$, если $J_1(A) - J_1'(A)A \neq 0$, и $O(\varepsilon^{2m-2})$ в противном случае.

3) Если $m = 0$, то $J_0(z) = 1 + O(z^2)$, $J_0'(z) = -\frac{z}{2} + O(z^3)$ и числитель (6.2) равен $-J_0'(A)A + O(\varepsilon)$. Поскольку

$$Y_0(z) = 2\ln\frac{z}{2} + 2\gamma + O(z^2\ln z), \quad Y_0'(z) = \frac{2}{z} + O(z\ln z),$$

то знаменатель (6.2) принимает вид

$$-2J_0'(A)A\ln\varepsilon + 2J_0(A) - 2J_0'(A)A\gamma + O(\varepsilon^2\ln\varepsilon).$$

Отсюда следует, что дробь (6.2) есть либо $O\left(\frac{1}{\ln\varepsilon}\right)$, либо $O(\varepsilon)$.

## Список литературы

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 294 с.

[2] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.

[3] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.

[4] Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004. 272 с.

[5] Уиттекер Э., Ватсон Дж. Курс современного анализа: Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: Физматлит, 1963. 515 с.

[6] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. 2nd ed. Providence, RI: AMS, 2005. 488 p.

[7] Чернышев В. Л., Шафаревич А. И. Квазиклассический спектр оператора Шрёдингера на геометрическом графе // Матем. заметки, 2007, т. 82, № 4, с. 606—620.

[8] Brüning J., Geyler V. Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns // J. Math. Phys., 2003, vol. 44, no. 2, pp. 371–405.

[9] Exner P., Post O. Convergence of spectra of graph-like thin manifolds // J. Geom. Phys., 2005, vol. 54, pp. 77–115.

[10] Chernyshev V. L., Shafarevich A. I. Semiclassical asymptotics and statistical properties of Gaussian packets for the nonstationary Schrödinger equation on a geometric graph // Russ. J. Math. Phys., 2008, vol. 15, no. 1, pp. 25–34.

[11] Kuchment P. Quantum graphs: an introduction and a brief survey. arXiv 0802.3442v1 (2008).

[12] Sobolev A. V., Solomyak M. Z. Schroedinger operators on homogeneous metric trees: Spectrum in gaps // Rev. Math. Phys., 2002, vol. 14, no. 5, pp. 421–468.

[13] Чернышев В. Л. Нестационарное уравнение Шрёдингера: Статистика распространения гауссовых пакетов на геометрическом графе // Тр. МИАН, 2010, т. 270, с. 249–265.