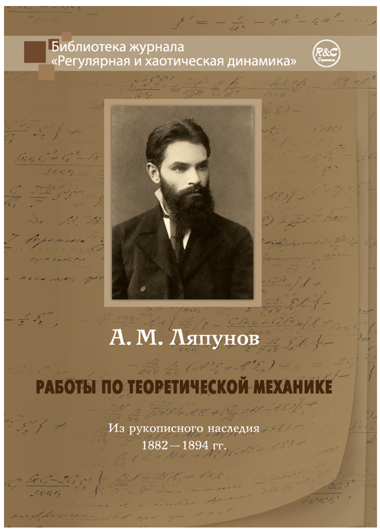
А. М. Ляпунов «Работы по теоретической механике: Из рукописного наследия 1882–1894 гг.»

М.–Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2010 г.
Серия *Библиотека журнала «РХД»*
(Редколлегия серии: А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев)

В сборнике представлены неопубликованные при жизни работы А. М. Ляпунова по некоторым задачам теоретической механики и гидродинамики. Они относятся, главным образом, к 1882–1894 годам — началу творческой деятельности А. М. Ляпунова и харьковскому периоду. Эти рукописи не были включены ни в «Собрание сочинений», ни в какое-либо другое посмертное издание трудов Ляпунова. В них исследуются, в частности, уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, уравнения Кирхгофа, описывающие движение твердого тела в жидкости, и уравнения движения тела с полостями, заполненными идеальной жидкостью.

В качества обзора публикуется сокращенный вариант предисловия составителей сборника.

Содержание



После смерти А. М. Ляпунова было предпринято издание лишь нескольких его неопубликованных работ. Это, прежде всего, большая работа «О некоторых рядах фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости»[1], обзор которой был выполнен В. А. Стекловым. Отдельной книгой, не вошедшей в «Собрание сочинений», была издана рукопись «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения»[2]. Кроме того, имеются обзоры (Л. Н. Сретенского, С. Н. Киро, В. И. Смирнова и др.), посвященные некоторым неопубликованным исследованиям Ляпунова. В частности, Л. Н. Сретенским был дан обзор некоторых рукописей по гидродинамике и общематематическим вопросам[3], в котором вкратце освящены и несколько работ, вошедших в настоящий сборник.

Отметим, что посмертно изданные рукописи А. М. Ляпунова, включая собранные здесь работы, составляют лишь небольшую часть его общего рукописного наследия, хранящегося в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН и насчитывающего более 70 рукописей (свыше 1500 страниц). Это работы по различным вопросам математики, теории устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теоретической и небесной механики. Наибольший объем занимают неопубликованные труды по теории фигур равновесия вращающейся жидкости — теме, которую молодому Ляпунову предложил П. Л. Чебышев для магистерской диссертации и к которой Ляпунов впоследствии вернулся, посвятив этим вопросам последние пятнадцать лет своей жизни. Изучение этих материалов требует очень основательных знаний и вдумчивого отношения. В. А. Стеклов, П. Э. Аппель и другие крупные математики того времени отмечали, что работы Ляпунова, отличающиеся огромными объемами сложнейших вычислений, читаются с большим трудом. К сожалению, в наше время практически нет специалистов, способных, вникнув и глубоко поняв эти неизданные тексты, подготовить их к печати. С другой стороны, и сами эти изыскания, возможно, оказываются несколько в стороне от основных интересов и направлений современной науки.

В настоящем сборнике представлены не опубликованные при жизни работы А. М. Ляпунова по некоторым задачам теоретической механики и гидродинамики. В них исследуются уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки; уравнения Кирхгофа, описывающие движение твердого тела в жидкости, и уравнения движения тела с полостями, заполненными идеальной жидкостью. Это классические задачи механики[4]. Некоторые из публикуемых здесь работ остались не доведены до окончательных результатов. Среди рассматриваемых в них задач встречаются настолько сложные (например, интегрирование системы Клебша), что их решения не найдены до сих пор. Решения других задач были получены позднее другими способами.

Тем не менее, публикация этих рукописей представляет несомненный интерес, прежде всего в историческом отношении. Эти ранее неизвестные работы выдающегося ученого стали доступны в удобном для изучения виде. По некоторым из них мы можем проследить путь Ляпунова к последующим широко известным его открытиям, восходящим как раз к этим отложенным или незавершенным рукописям, содержащим, на самом деле, все предпосылки, а зачастую и все самое существенное. Они еще раз иллюстрируют непостижимое, феноменальное аналитическое дарование А. М. Ляпунова. Производимые им с неизменной

[1]Ляпунов А. М. Собрание сочинений: Т. 5. — М.: Наука, 1965. — С. 7–378. Вступ. ст.: Стеклов В. А. Посмертные труды Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости, С. 379–384.

[2]Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1963, 116 с. Вступ. ст.: Басов В. П. О работе Ляпунова А. М. «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения», С. 3–12.

[3]Сретенский Л. Н. Неопубликованные рукописи Ляпунова А. М. [по теоретической механике и гидродинамике] // Тр. 3-го Всесоюз. мат. съезда, г. Москва, июнь-июль 1956 г. — М.: АН СССР, 1958.

[4]Их подробный обзор может быть найден, например, в монографии: Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Изд-во «РХД», 2005, 576 с.

тщательностью вычисления по объему и сложности иногда оказывается невозможно воспроизвести даже на компьютере. Кроме того, они дают должное понимание того, насколько трудны некоторые задачи механики, если даже Ляпунов, столь могучий аналитический ум, не смог отыскать искомого решения. Из тщательно отделанных рукописей мы видим, сколько времени, энергии и трудолюбия было вложено Ляпуновым в то, что он в итоге решил отложить в сторону. Он стремился доводить все начатые исследования до определенной завершенности и при малейшем сомнении относительно правильности выводов оставлял свои работы без публикации. Сравнительно немногочисленные, все опубликованные исследования Ляпунова характеризуются высшей степенью строгости и отсутствием каких-либо пробелов. В этом смысле их можно было бы противопоставить, например, работам Коши — не менее выдающегося математика, в лице которого мы встречаемся, однако, с ученым совершенно иного типа. (Как известно, бесчисленные публикации Коши очень часто отличались незавершенностью и изобиловали неточностями, что отнюдь не смущало их автора.) Отметим, что подобное отношение могло бы послужить образцом для тех современных авторов — их, к сожалению, немало, — которые не проявляют хоть какой-либо заботы о строгости и завершенности публикуемой работы, а зачастую не имеют и четкого представления о том, для чего она вообще была проделана.

Остановимся теперь подробнее на обсуждении вошедших в сборник работ.

О движении тяжелого твердого тела в жидкости в двух случаях, указанных Клебшем. Работа была написана А. М. Ляпуновым в период 1888–1893 гг. Она посвящена найденному Клебшем общему случаю явного интегрирования уравнений динамики твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости (уравнений Кирхгофа). Клебш нашел также дополнительный квадратичный интеграл для этих уравнений, однако его попытки явно их проинтегрировать успеха не имели. При нулевой постоянной площадей решение для системы Клебша было получено Вебером (это решение взаимно с решением задачи Неймана); этот случай не представляет особой сложности. Трудности возникают при исследовании задачи при ненулевой константе площадей. В строгой постановке эта проблема остается нерешенной до сих пор, хотя ею занимались многие выдающиеся математики. К сожалению, и исследование, предпринятое А. М. Ляпуновым, осталось неоконченным.

По-видимому, Ляпунов попытался проинтегрировать случай Клебша, вдохновившись успехом С. В. Ковалевской, которой удалось явно проинтегрировать уравнения в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки[5]. Несмотря на то, что интеграл в случае Ковалевской имеет четвертую степень, она смогла разделить переменные и получить общее решение задачи, выразив его через тета-функции от двух переменных.

Рукопись Ляпунова состоит из двух частей. Первая часть посвящена общей теории интегрирования дифференциальных уравнений с использованием метода последнего множителя Якоби; рассмотрено применение этого метода к случаю Клебша. Она заканчивается утверждением, что задача интегрирования уравнений движения может быть сведена к нахождению функций U и V и последнего множителя Якоби Δ.

Во второй части Ляпунов приступает к интегрированию уравнений на функциях U, V и Δ. В процессе решения вводятся цепочки различных замен переменных, что в итоге заканчивается введением эллиптических координат λ и μ. На выражении для функции Δ

[5]Kowalewsky S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.*, 1889, vol. 12, no. 2, p. 177–232. (Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. В кн.: Ковалевская С. В. Научные работы. М., 1948, с. 153–220.)

и фразе «Обращаемся теперь к преобразованным уравнениям...» текст обрывается. Если мы продолжим вычисления, то увидим, что эти преобразованные уравнения будут двумя квадратичными уравнениями от U и V, которые можно представить в виде двух алгебраических уравнений четвертой степени по U и V. Как известно, общее решение алгебраического уравнения четвертой степени, к сожалению, не может быть найдено явно, то есть использование формальных решений алгебраических уравнений старших степеней позволяет решить задачу лишь формально. В этом и заключается сложность интегрирования случая Клебша. На наш взгляд, именно эта необходимость обращения к алгебраическим уравнениям четвертой степени общего вида и стала основной причиной того, что данная работа осталась неоконченной.

Задачей нахождения разделяющих переменных и явного интегрирования системы Клебша занимались многие известные математики. Ниже мы приведем краткий обзор некоторых результатов, полученных другими исследователями в попытках интегрирования случая Клебша. Возможно, некоторые из них повлияли на то, что Ляпунов отказался от намерения найти полное решение этой задачи. Подробный обзор классических и современных исследований случая Клебша и изоморфных ему случаев читатель найдет в недавно вышедшем сборнике «Система Клебша: Разделение переменных, явное интегрирование?»[6], содержащем русские переводы основных классических работ по этой проблематике.

Можно предположить, что Ляпунову стало известно о работе Г. Кобба, вышедшей в 1895 г.[7] Кобб записывает уравнения для случая Клебша в гамильтоновой форме, вводя углы Эйлера и сопряженные им канонические импульсы. Для интегрирования Кобб использует гамильтонов формализм и метод производящей функции. Тоже получив уравнение четвертой степени, Кобб сводит задачу к квадратурам и приходит к тому, что для получения решения надо разрешить алгебраическое уравнение четвертой степени. Таким образом, у Кобба решение обладает тем же недостатком, что и у Ляпунова[8].

Как мы видим, необходимость обращения к уравнениям четвертой степени не позволила найти конструктивный метод интегрирования случая Клебша. В отличие от случая Ковалевской, случай Клебша, к сожалению, не может считаться проинтегрированным в полной мере. В частности, отмеченные решения не дают ответа на вопрос об однозначности общего решения, что делает невозможным разделение переменных и классификацию различных решений.

Попытки явно разрешить случай Клебша также были предприняты С. А. Чаплыгиным[9]. Но и он, обладая виртуозным аналитическим мастерством по части интегрирования уравнений динамики, не смог разрешить эту задачу до конца. В конце концов, он ограничился лишь случаем для нулевой постоянной площадей.

[6]М.–Ижевск: Изд-во «РХД», 2009, 288 с.

[7]Kobb G. Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, *Bulletin de la S. M. F.*, 1895, vol. 23, pp. 210–215. Пер. на рус: в сб. «Система Клебша: Разделение переменных, явное интегрирование?» М.–Ижевск: Изд-во «РХД», 2009, с. 159–165.

[8]Отметим, что подход, близкий к ляпуновскому, использовала и Харламова Е. И. в своей статье «О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил» (Изв. АН СССР, Сиб. Отд., 1959, №6, с. 7–17). Она сразу ввела эллиптические координаты (воспользовавшись аналогией Колосова), что привело к тем же самым уравнениям четвертой степени.

[9]Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердых тел в жидкости: Статья первая // *Труды Отд. физич. наук Об-ва любит. естеств.*, 1894, т. VI; Статья вторая // *Мат. сб.*, 1897, т. XX.
См. также неопубликованную при жизни работу: Чаплыгин С. А. Характеристическая функция в динамике твердого тела, Собрание сочинений, том III «Математика и механика. Речи и доклады», М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, с. 260–282.

Долгое время среди специалистов по явному интегрированию уравнений движния бытовало мнение, что явное решение случая Клебша было дано Ф. Кёттером. Кеттер посвятил этой проблеме две статьи, в которых он доводит решение задачи до явного вида через тета-функции[10]. Однако это решение было получено с несколькими комплексными заменами переменных и выделить вещественную часть из него невозможно; попытки упрощения этого решения до сих пор ни к чему не привели. Кроме того, из решения Кеттера невозможно получить какой-либо полезной информации для динамики, каких-либо качественных выводов о движении твердого тела. Этому препятствует комплексная форма полученного решения.

Решение Кеттера неоднократно проверялось другими математиками, его пытались сделать более понятным и прозрачными. Так, подробный анализ и более ясное изложение результатов Кеттера содержится в магистерской диссертации В. А. Стеклова «О движении твердого тела в жидкости» (1893 г.). Интересно отметить, что эта работа была подвергнута довольно основательной критике со стороны Ляпунова, собственной рукой внесшего многочисленные исправления и замечания прямо в экземпляр диссертации. По-видимому, Ляпунов счел, что Стеклов всего лишь повторил анализ Кеттера, мало продвинувашись в проблеме самостоятельно.

Примечательно, что случай Клебша является изоморфным случаю Шоттки уравнений движения свободного четырехмерного твердого тела[11]. Задача о движении волчка на $so(4)$ активно исследовалась классиками еще задолго до установления этого изоморфизма. Ее первый интегрируемый случай приведен в работах Ф. Шоттки[12] — выдающегося математика, который известен прежде всего как один из создателей алгебраической геометрии. В качестве отправной точки Шоттки использует упомянутые работы Кеттера и пишет, что лишь слегка модифицировал его анализ. К сожалению, попытка Шоттки явно проинтегрировать уравнения движения привела к еще более запутанным результатам.

Русский механик Г. Колосов, известный своими исследованиями в области динамики твердого тела, также пытался упростить анализ Кеттера, но это удалось ему лишь частично[13]. Проинтегрировав задачу Клебша при некоторых дополнительных ограничениях, Колосов нашел явную квадратуру, а фактически свел уравнения движения при определенных начальных условиях к квадратурам наподобие тех, что имеются у волчка Лагранжа. Колосов также нашел новые частные решения задачи Клебша. Интересно, что все движения в случаях, указанных Колосовым, являются периодическими. Это связано с наличием не только линейного интеграла типа Лагранжа, но и дробно-рационального интеграла.

Отметим, что современные авторы также неоднократно обращались к исследованию систем Клебша и Шоттки. К сожалению, полученные ими результаты зачастую лишь уточняют результаты классиков или носят предварительный характер. В работе В. Г. Марихина и В. В. Соколова[14] предложено вещественное, так называемое «частичное», разделение пе-

[10] Kötter F. Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. I. II, *J. Reine und Angew. Math.*, 1892, vol. 109, pp. 51–81, 89–111.

[11] Бобенко А. И. Уравнения Эйлера на алгебрах e(3) и so(4): Изоморфизм интегрируемых случаев, *Функц. анализ и его прил.*, 1986, т. 20, № 1, с. 64–66.

[12] Schottky F. Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers im Raume von vier Dimensionen, *Sitzungsber. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1891, pp. 227–232. См. также его статью Über die analytische Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers im vierdimensionalen Raume, *Sitzung der phys.-math. Klasse, Berlin Akad.*, 1926, pp. 215—241.

[13] Kolosoff G. On Some Cases of Motion of a Solid in Infinite Liquid, *American Journal of Mathematics*, 1906, vol. 28, no. 4., pp. 367–376.

[14] Марихин В. Г., Соколов В. В. О приведении пары квадратичных по импульсам гамильтонианов к канонической форме и о вещественном частичном разделении переменных для волчка Клебша, *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 313–322.

ременных для волчка Клебша. Однако это разделение не может рассматриваться как альтернатива классическому методу разделения, поскольку, в отличие от последнего, оно имеет комплексную форму и потому является бесполезным для для анализа общего решения, а значит, и его динамического поведения.

Несмотря на то, что система Клебша до сих пор не проинтегрирована в квадратурах, она, тем не менее, хорошо изучена с топологической точки зрения, проведена классификация ее движений. Здесь прежде всего следует отметить работы М. П. Харламова и Т. И. Погосяна, в которых получена полная топологическая картина этой системы[15].

По-видимому, в рамках обычного подхода, т. е. поиска разделяющих переменных, случай Клебша не имеет какого-либо осмысленного решения. Существует некое препятствие явному разделению переменных. Тот факт, что такому выдающемуся ученому, как А. М. Ляпунов, не удалось справиться с этой задачей, говорит о том, что она действительно чрезвычайно сложна.

О движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку (случай Гесса). Точное время написания рукописи, к сожалению, неизвестно. Работа посвящена случаю Гесса для уравнений Эйлера–Пуассона. Гессом был открыт частный случай интегрируемости этих уравнений[16]. После исследований, проведенных Гессом, этой проблемой занимались, в частности, русские механики Н. Е. Жуковский и П. А. Некрасов. Жуковский (1893 г.) предложил геометрическую интерпретацию этого случая и показал, что центр масс в случае Гесса будет двигаться по закону сферического маятника[17]. Некрасов (1896 г.) получил аналитические решения для случая Гесса, предполагающие интегрирование в явном виде уравнений типа Риккати[18].

Здесь Ляпунов также развивает аналитический подход к рассмотрению этого случая. Он тоже пришел к уравнениям типа Риккати и сделал сходные заключения, однако не стал публиковать свою работу, ознакомившись, как мы предполагаем, с аналогичными результатами, полученными Некрасовым.

Интересен результат, полученный В. В. Козловым для частного случая интегрируемости Гесса: при некоторых дополнительных условиях на параметры фазовый портрет системы представляет собой пару сдвоенных сепаратрис, которые разделяют зоны с различным хаотическим поведением решений. Случай Гесса при этом выделен с точки зрения расщепления сепаратрис: пара невозмущенных сепаратрис задачи Эйлера–Пуансо расщепляется, а пара, при которой реализуется случай Гесса, остается сдвоенной[19].

---

[15]Погосян Т. И., Харламов М. П. Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил, ПММ, 1979, vol. 43, №3, с. 419–428; Погосян Т. И. Области возможности движения в задаче Клебша. Критический случай, Механика твердого тела, вып. 15, Наукова думка, Киев, 1983, с. 3–23; Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела, Л.: Изд-во ЛГУ, 1988, 200 с.

[16]Hess W. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue particulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, *Math. Ann.*, 1890, Bd. 37, no. 2, S. 178–180.
Подробный анализ этого случая и развернутый исторический комментарий см. в книге Борисова А. В. и Мамаева И. С. «Динамика твердого тела», 2005.

[17]Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса, *Труды Отд. физич. наук Об-ва любит. естеств.*, 1893, т. V, вып. 2, с. 37–45; Собр. соч., т. 1, М.: 1948, с. 297–310. (Zhukovski N. E. Geometrische Interpretation des Hess'schen Falles der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Jber. Deutschen Math. Verein. 1894, vol. 3, pp. 62–70).

[18]Некрасов П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. *Мат. сб. кружка люб. мат. наук,* 1896, т. 18, вып. 2, с. 161–274.

[19]Козлов В. В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела.* 2-е изд., М.-Ижевск: Изд-во «РХД», 2000. 256 с.

С современными исследованиями частного случая Гесса можно ознакомиться в статье А. В. Борисова и И. С. Мамаева «Случай Гесса в динамике твердого тела»[20].

О движении тяжелого твердого тела, опирающегося острием на гладкую горизонтальную плоскость (случай, аналогичный гессову). В этой работе А. М. Ляпунов продолжает исследовать движение Гесса, но на этот раз острие волчка не закреплено в неподвижной точке, а скользит гладко, без проскальзывания, по горизонтальной плоскости. Это несколько иная задача, с другими уравнениями движения, для которой также можно получить интеграл Гесса, что и сделано в работе Ляпунова. Он приводит явное аналитическое решение, близкое к тому, которое он получил в случае, когда острие волчка было закреплено в неподвижной точке, и сводит его к уравнениям типа Риккати.

Как известно из переписки между А. М. Ляпуновым и Н. Е. Жуковским, от публикации этой работы Ляпунов отказался, предоставив более молодому ученому Г. В. Колосову опубликовать свою работу с аналогичными результатами[21]. В своей работе Колосов нашел тот же интеграл, что и Ляпунов, но он не пытался найти данное решение в квадратурах.

Заметим, что случай Гесса имеет аналоги во многих задачах динамики твердого тела и связан с некоторыми общими симметриями, которые могут быть достигнуты надлежащим распределением динамических характеристик потенциала поля сил. Обзор современных работ, посвященных исследованию случая Гесса и его аналогов, см. в книге А. В. Борисова и И. С. Мамаева «Динамика твердого тела».

К вопросу о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку (1894 г.). А. М. Ляпунов развивает метод нахождения периодических решений для этой задачи. Работа осталась неоконченной.

Исследованию периодических решений посвящена хорошо известная работа А. М. Ляпунова по небесномеханической задаче трех тел, а именно по задаче Хилла о движении Луны (1896 г.)[22]. Здесь подобные рассуждения применены им к задаче из динамики твердого тела, а именно для уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Судя по времени выхода статьи о рядах Хилла (1896 г.), можно предположить, что обеими этими задачами Ляпунов занимался в одно время. Возможно, он отложил рукопись, как раз перейдя к этой более значимой небесномеханической работе. Неясно, тем не менее, почему данная работа так и не была им завершена.

Развиваемый Ляпуновым метод получения периодических решений основан на изучении быстро вращающегося твердого тела: рассматривается невозмущенное движение Эйлера–Пуансо (быстрое движение Эйлера–Пуансо), и периодическое решение ищется в ряд по обратным степеням угловой скорости этого невозмущенного движения. Здесь периодические решения представляют собой такие решения, для которых, как пишет Ляпунов, угловая скорость весьма велика, а мгновенная ось во все время движения составляет весьма малый угол с осью наибольшего или наименьшего из моментов инерции в теле и с вертикалью в пространстве. Ляпунов упоминает также другой метод, применявшийся им для случая небыстрого вращения тела, ссылаясь при этом на свой известный мемуар «Общая задача

[20] ПММ, 2003, том 67, вып. 2, С. 256–265.

[21] Колосов Г. В. Об одном случае движения тяжелого твердого тела, опирающегося острием на гладкую плоскость, *Труды Отд. физич. наук Об-ва любит. естеств.*, 1898, т. 10, с. 11—12.

[22] О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны, *Труды Отд. физич. наук Об-ва любит. естеств.*, М., 1896, т. VIII, вып. 1, с. 1–23; Собрание сочинений: Т. 1. М.: Издательство Академии наук СССР, 1954, с. 418–446.

об устойчивости движения»[23]. Однако в нем мы не нашли каких-либо рассуждений, связанных с уравнениями Эйлера–Пуассона. Возможно, Ляпунов добавил их во французское издание своего мемуара, вышедшее спустя пятнадцать лет[24].

Интересно отметить, что до сих пор имя Ляпунова никогда не связывалось с задачей быстрого вращения твердого тела. Подробно эта задача изучена в монографии Ю. А. Архангельского «Динамика быстровращающегося твердого тела», где рассматривается динамика быстро вращающегося гироскопа как в интегрируемых случаях (Эйлера, Лагранжа, Гесса, Ковалевской, Горячева, Чаплыгина), так и в общем случае[25]. В своем исследовании Ляпунов также рассматривает общий случай. Он не только находит периодические решения, но и приводит последовательную процедуру для нахождения рядов по обратным степеням угловой скорости, а также доказывает сходимость этих рядов при достаточно больших значениях угловой скорости.

О движении твердого тела с жидкостью, заключающейся в нем (1882–1883 гг.). Эта рукопись представляет собой вполне законченный, переписанный начисто текст. Можно предположить, что автор готовил ее к публикации, но впоследствии изменил свое намерение. Время написания рукописи приходится на период подготовки и сдачи А. М. Ляпуновым магистерских экзаменов (1882 г.) и его первый год на кафедре механики Санкт-Петербургского университета, заведуемой в то время Д. К. Бобылевым. К тому времени молодой Ляпунов опубликовал две свои первые научные статьи. Они относились к области гидростатики и были выполнены под руководством Бобылева. Вероятно, эти первые научные интересы послужили определенным стимулом для данной гидродинамической работы Ляпунова. Интересен вопрос о том, почему столь обширный, вполне завершенный труд был оставлен Ляпуновым в виде рукописи. О причинах можно лишь догадываться. Возможно, Ляпунову стало известно об исследовании Н. Е. Жуковского по той же теме (об этом мы еще упомянем ниже). Другим правдоподобным объяснением может быть перемена его научных интересов. Речь, конечно, идет о поставленной ему П. Л. Чебышевым задаче по фигурам равновесия вращающейся жидкости.

В этой, а также в следующей приведенной здесь работе (датированной 1893 г.) содержатся некоторые обобщения гидродинамических идей, восходящих к Кирхгофу и связанных с движением твердого тела, взаимодействующего с жидкой средой.

В данной работе Ляпунов рассматривает движение твердого тела, содержащего полости, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, имеющей потенциальное, невихревое течение (т. е. течение внутри полости имеет неоднозначный потенциал). Он записывает уравнения движения в форме Кирхгофа. Главным образом его интересует движение жидкости внутри полости. Сначала исследуется случай односвязных полостей: он приводит подробные явные формулы для случаев, когда полость имеет форму сферы или эллипсоида.

Далее Ляпунов проводит тщательный анализ случая кругового кольца. Имеется в виду течение жидкости внутри круглого тора, т. е. поверхности, полученной вращением окружности вокруг оси. Течение в данном случае, строго говоря, не является потенциальным: потенциал внутри полости является неоднозначным, что создает дополнительные сложности. Работа содержит очень подробные, большого объема вычисления, весьма сложные технически, с особыми приемами в вычислении сумм и интегралов. Для определения течения Ля-

[23] Дис. докт. мат. наук. Харьков, 1892.

[24] Liapounoff A. Problème général de la stabilité du mouvement, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Sér. 2*, t. 9, 1907, pp. 203–474.

[25] М.: Наука, 1985.

пунов применяет все самые современные на тот период средства математического анализа: строит разложения по различным рядам, использует гипергеометрические ряды, шаровые функции, эллиптические интегралы, строго подходит к вопросам сходимости. У него даже возникают уравнения в конечных разностях, которые были решены им с помощью цепных дробей. Дать здесь подробный анализ всех этих вычислительных манипуляций не представляется возможным. Мы заметим лишь, имея в виду, что Ляпунов выполнил это исследование в возрасте 25 лет, что оно уже свидетельствует о высочайшем вычислительном мастерстве автора, его владении самыми передовыми на то время методами математического анализа и отличающей его склонности к чисто аналитическим методам исследования, нахождению точных значений интегралов, разного рода оценок. В своем исследовании он широко использует различные теоретико-числовые факты.

По всей видимости, это исследование, обнаруживающее столь широкий общематематический кругозор, подкованность в теретико-числовых вопросах и, наряду с этим, свободное обращение со всякого рода интегралами, конечными суммами и пр., и подвело потом Ляпунова к занятиям теорией вероятностей и теорией потенциала, где он получил ряд выдающихся результатов.

Интересуясь, в первую очередь, чисто аналитическими аспектами рассматриваемой задачи, А. М. Ляпунов практически не прибегает к механической интуиции и каким-либо геометрическим соображениям. Здесь следует отметить, что те же самые вопросы, однако в совершенно другом подходе, исследовал Н. Е. Жуковский в своем обширном сочинении «О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью», вышедшем в 1885 г.[26] Учитывая срок печатания этого труда, можно заключить, что фактически Ляпунов и Жуковский разрабатывали эту задачу одновременно. Жуковский получил свои уравнения исходя из более простых механических соображений. Он указал, что при движении в случае односвязной полости возникают дополнительные члены в моментах инерции, что дает эффект, эквивалентный движению твердого тела. В случае же потенциального течения в неодносвязной полости эффект движения оказывается аналогичным движению твердого тела с гиростатом. Как известно, на этом пути Жуковский обнаружил известный интегрируемый случай свободного гиростата — так называемый случай Жуковского – Вольтерра (отметим, что Вольтерра пришел к явному решению (1899 г.)[27], изучая непосредственно движение гиростатов, а также пытаясь объяснить чандлеровскую прецессию). Отметив аналогию случая многосвязных полостей с движением гиростата, Жуковский подробно исследовал эту задачу с точки зрения механики, дав тщательный качественный анализ динамических эффектов, к которым приводит наличие жидкости в полостях. Кроме того, Жуковский продвинулся существенно дальше, получив уравнения для более интересного случая, когда движение жидкости в полости является не потенциальным, а однородно завихренным.

Жуковский также рассмотрел задачу о движении тела с эллипсоидальными полостями, имеющими однородное вихревое заполнение. В случае динамической симметрии он проинтегрировал эти уравнения.

Исследования этой задачи были также продолжены учеником А. М. Ляпунова, в дальнейшем выдающимся ученым В. А. Стекловым. По этим вопросам Стеклов опубликовал две

[26] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью, *Журнал Русского физико-химического общества, ч. физическая*, 1885, т. XVII, отд. I, вып. 6, с. 81–113; вып. 7, с. 145–199; вып. 8, с. 231–280; Полное собрание сочинений, Том II «Гидродинамика», М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, с. 152–309.

[27] Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes, *Acta Math.*, 1899, vol. 22, pp. 201–358.

работы. В его статье «О теории вихрей»[28] предложены общие принципы составления гидродинамических уравнений для таких систем и получена общая система уравнений. Во второй работе, «О движении твердого тела с полостями, содержащими жидкость и об изменении широт»[29], Стеклов заново вывел формы уравнений и указал новый интересный интегрируемый случай (именуемый сейчас случаем Стеклова) задачи о движении твердого тела с эллипсоидальными полостями, содержащими жидкость. Полученные уравнения были им использованы для теоретического обоснования явления движения полюсов Земли (т. е. чандлеровской прецессии). Отметим, что практически одновременно со Стекловым теми же вопросами занимался Пуанкаре, который, обладая более глобальными математическими знаниями, применил при выводе этих уравнений общий вариационный принцип Гамильтона и развитую к тому времени теорию непрерывных групп преобразований (называемую теперь теорией групп и алгебр Ли)[30]. Обобщение уравнений движения твердого тела, содержащего жидкость, привело Пуанкаре к выводу некоторых общих форм уравнений динамики, которые сейчас называются уравнениями Пуанкаре. Это уравнения движения механических систем, конфигурационные пространства для которых представляют собой группу Ли. В частности, вся динамика твердого тела может быть описана уравнениями Пуанкаре[31].

Об интегрировании дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости (1893 г.) Работа посвящена задаче о движении многосвязного твердого тела в бесконечном объеме идеальной жидкости. Данная задача рассмотрена А. М. Ляпуновым не полностью: рукопись осталась неоконченной. Время ее написания относится к харьковскому периоду жизни Ляпунова и приходится на следующий год после защиты его знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.).

В отличие от случая движения в жидкости односвязного твердого тела типа эллипсоида или сферы, которое описывается известными уравнениями Кирхгофа, для этой задачи характерны некоторые более сложные эффекты, связанные с наличием внутренней циркуляции. Ляпунов производит расчеты для потенциала (ему помогает предварительно найденный расчет потенциала движения жидкости вне и внутри кольца), записывает уравнения движения, получает искомые дополнительные линейные члены, но вдруг останавливается, не доведя задачу до конца.

Изучение этой задачи также было продолжено В. А. Стекловым. Предварительный, общего характера, анализ был сделан Стекловым уже в его харьковской работе «О движении твердого тела в жидкости» (1893 г.). Подробные выводы уравнений движения приведены в работе на французском языке под названием «Мемуар о движении твердого тела в безграничной жидкости» (1902 г.)[32], Вообще говоря, задача о движении многосвязного твердого тела в идеальной жидкости восходит к У. Томсону (лорду Кельвину) и обсуждается

[28]Stekloff V. A. Sur la theorie des tourbillons, *Ann. Fac. sci. Toulouse* (*2*), 1908, t. 10, p. 271–334. Пер. на рус: В. А. Стеклов. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского, Изд-во «РХД», 2010 (в печати).

[29]Stekloff V. A. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes, *Ann. Fac. sci. Toulouse* (*3*), 1909, t. 1. p. 145–256. Пер. на рус: В. А. Стеклов. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского, Изд-во «РХД», 2010 (в печати).

[30]Poincaré H. *Sur la precession des corps deformables.* Bull. Astr., 1910, v. 27, p. 321–356. Пер. с франц.: Пуанкаре А. *Последние работы.* Ижевск: Изд-во РХД, 2001, с. 74–111.

[31]Подробные комментарии см. в книге Борисова А. В. и Мамаева И. С. «Динамика твердого тела».

[32]Stekloff V. A. Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série*, T. 4, 1902, pp. 171–219. Пер. на рус: В. А. Стеклов. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского, Изд-во «РХД», 2010 (в печати).

в знаменитом трактате Томсона и Тета[33]. Но их решение, записанное в лагранжевом виде, не было доведено до алгебраической формы. (Есть также ряд работ Томсона, в которых он развивает теорию систем с циклическими движениями, и, в частности, рассматривает движение многосвязного твердого тела.) Уравнения в окончательной форме, аналогичные уравнениям Стеклова, были получены Брайаном (1892 г.)[34].

Современный анализ задачи о движении твердого тела с заключенными в нем жидкими массами содержится в книге А. В. Борисова и И. С. Мамаева «Динамика твердого тела». Ее более прикладные аспекты рассмотрены в книге Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева «Динамика тела с полостями, содержащими жидкость»[35].

К тому же году, что и вышеназванная рукопись, относится следующая заметка Ляпунова:

Несколько слов относительно статьи Г. Г. Аппельрота «По поводу §1 мемуара С. В. Ковалевской *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*»[36]. Эту малодоступную публикацию, не вошедшую в «Собрание сочинений» или в какое-либо другое переиздание трудов А. М. Ляпунова, мы также приводим в этом сборнике. В своей работе Г. Г. Аппельрот продолжил исследование Ковалевской по отысканию однозначных решений уравнений Эйлера–Пуассона. Ляпунов приводит здесь критические соображения относительно анализа Аппельрота и строит к нему контрпример. Год спустя выходит его широко известная работа, где к задаче Ковалевской он применяет свой метод поиска однозначных решений, основанный на введении малого параметра и исследовании уравнения в вариациях, и тем самым вносит в этот вопрос окончательную ясность[37].

В заключение отметим, что публикация данного сборника работ приурочена к 150-летию со дня рождения А. М. Ляпунова.

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. В. Цыганов

[33]Thomson W., Tait P. *Treatise on Natural Philosophy*, vol. 1, Oxford, 1867. Пер. на рус: Томсон У. и Тэт П. «Трактат по натуральной философии», Изд-во «РХД», 2010 (в печати).

[34]Bryan G. H. A hydrodynamical proof of the equations of motion of a perforated solid, with applications to the motion of a fine rigid framework in circulating liquid, *Proceedings of the Physical Society of London*, 1892, vol. 12, issue 1, pp. 186–204.

[35]Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.

[36]Приложение к протоколу заседания Харьк. Мат. Общ. 10 Мая 1893 года, Сообщ. Харьк. Мат. Общ., 2 сер., т. 4, с. 292–297.

[37]Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, с. 402–417. *Сообщения Харьковского математического общества*, II серия, 1894, т. IV, № 3, с. 123–140.