

Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов

А. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев, Л. В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38
apkuz@rambler.ru, sataevir@rambler.ru, lvtur@rambler.ru

Получено 28 июня 2010 г.

Рассматривается задача о динамике фазовых осцилляторов при увеличении их числа в цепочке. Обсуждается устройство пространства параметров, отвечающих за частотные расстройки осцилляторов и величину диссипативной связи. Выявляются области полной синхронизации, квазипериодических колебаний разной размерности и хаоса. Обсуждаются метаморфозы картины при увеличении числа осцилляторов в цепочке. Используется метод карт ляпуновских показателей и модификация метода карт динамических режимов, визуализирующая резонансные двухчастотные торы разного типа.

Ключевые слова: синхронизация, фазовые осцилляторы, квазипериодическая динамика, хаос

A. P. Kuznetsov, I. R. Sataev, L. V. Turukina

Synchronization and multi-frequency oscillations in the chain of phase oscillators

The problem of the dynamics of phase oscillators is discussed with an increasing their numbers. We discuss the organization of the parameters plane responsible for the frequency detunings of the oscillators and amplitude of the dissipative coupled. The region of complete synchronization, quasi-periodic oscillations of different dimension and chaos are observed. We discuss the changing of the synchronization picture with an increasing of the number of oscillators in the chain. We use the method of charts of Lyapunov exponents and modification of the method of charts of dynamical regimes visualized two-frequency resonant tori of different types.

Keywords: synchronization, phase oscillators, quasi-periodical dynamics, chaos
MSC 2010: 39Axx, 93D05

1. Введение

Задача о динамике связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной в теории синхронизации и нелинейной динамике [1–9]. Теория синхронизации двух осцилляторов стала уже классической. Основные эффекты, возникающие при взаимодействии двух осцилляторов — это возможность взаимного захвата и режима биений при изменении частотной расстройки или величины связи. В то же время новые существенные моменты продолжают выявляться даже для случая двух связанных автоколебательных элементов (см., например, [10–12]). Задача о синхронизации трех, четырех и более осцилляторов является значительно более сложной и многоплановой. Она допускает решение в рамках различных подходов: в терминах исходных дифференциальных уравнений, с помощью укороченных уравнений или фазовых уравнений, полученных в рамках квазигармонического приближения, а также модельных отображений для фаз (отображений на торе). Так, в одной из наиболее фундаментальных работ обзорного характера [13] обсуждается модель взаимно связанных осцилляторов в форме связанных отображений поворота. Дан анализ плоскости параметров, которые можно интерпретировать как частотные расстройки осцилляторов. Обсуждается большое разнообразие бифуркаций связанных отображений, включая бифуркации коразмерности два. Некоторые свойства отображений на торах разной размерности обсуждались, например, в [14, 15]. Следует отметить, что связанные осцилляторы дают контрпримеры гипотезе Рюэля и Такенса [16] о нетипичности трехчастотных торов и их разрушении за счет слабых возмущений в нелинейных системах. Об экспериментальном наблюдении трехчастотной квазипериодичности в связанных радиоэлектронных осцилляторах сообщалось в [17]. В [18] исследовались два возбуждаемых внешней силой реактивно связанных Ван-дер-Поля. Для малой связи и величины возбуждения представлены примеры, когда доминирует трехчастотная квазипериодичность. С увеличением силы связи она сменяется периодическими режимами и хаосом. Однако зависимость картины от частотной расстройки осцилляторов не исследовалась. В [19, 20] проведено теоретическое обсуждение трех взаимно связанных осцилляторов и описан соответствующий эксперимент с радиоэлектронным устройством. Показано, что за возникновение трехчастотной квазипериодичности отвечает седло-узловая бифуркация устойчивого и неустойчивого двухчастотных торов. Продемонстрирована также возможность тороидального хаоса, обсуждавшегося в [13]. В работах [21, 22] исследована возможность трехчастотной квазипериодичности и переходов к хаосу с ее разрушением в системе трех связанных систем Лоренца. Задача о динамике кольца из трех осцилляторов обсуждалась, например, в работах [23, 24], а сетей из четырех и более осцилляторов — в работах [24, 25]. При этом сейчас установлено, что важную роль в динамике сетей из небольшого числа элементов играют гомоклинические бифуркации (см. [24, 25] и цитированную там литературу). Следует отметить, что работы, в которых сообщается о наблюдении уже четырехчастотной квазипериодичности, носят единичный характер. Например, в [26] сообщалось об экспериментальном наблюдении колебаний с четырьмя несоизмеримыми частотами в возбуждаемой полупроводниковой системе с pn -переходами, но при этом говорить о какой-то достаточно общей и полной картине не приходится.

В последнее время выявлены новые интересные аспекты, которые заставляют по-новому взглянуть на задачу о синхронизации многочастотных, в частности квазипериодических, колебаний высокой размерности. Была рассмотрена проблема о вынужденной синхронизации двух осцилляторов внешней силой. В серии работ [8, 27–29] были обсуждены и установлены механизмы синхронизации резонансных циклов на торе, которые оказались

существенно отличными от синхронизации «обычных» предельных циклов. Эти работы были подкреплены радиофизическими экспериментами. В [30, 31] были получены фазовые уравнения, описывающие возбуждение двух связанных автоколебательных осцилляторов внешней силой, и показано, что за возникновение трехчастотных колебаний отвечает бифуркация слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой инвариантных кривых, чему в исходной системе соответствует аналогичная бифуркация торов. В [32] дан анализ той же плоскости параметров с использованием метода карт ляпуновских показателей, который выявил большое число режимов, соответствующих резонансным двухчастотным колебаниям. Эти режимы допускают определенную классификацию. Было показано также, что картина характеризуется двумя качественно разными ситуациями, которые отвечают режиму захвата двух автономных осцилляторов и режиму биений. В последнем случае появляется амплитудный порог полной синхронизации, а трехчастотные колебания могут реализоваться даже при малой амплитуде сигнала [32].

В настоящей работе мы будем развивать подходы работ [30–32] к задаче о *взаимной* синхронизации цепочки связанных квазипериодических фазовых осцилляторов, постепенно повышая число осцилляторов в системе и, тем самым, увеличивая размерность наблюдаемых торов. При этом будем варьировать частотные расстройки осцилляторов и величину связи так, чтобы можно было ответить на вопрос о вложении картины областей полной синхронизации, торов разной размерности и хаоса в пространство параметров. Будет обсуждаться также вопрос: типичны ли режимы трех- и четырехчастотных торов и вытесняются ли многочастотные торы хаотическими режимами?

Как мы отмечали, задача о динамике двух осцилляторов практически полностью изучена. Задача о динамике трех взаимно связанных автоколебательных осцилляторов также исследовалась (см., например, фундаментальные монографии [2, 3]). Нас здесь, однако, она будет интересовать несколько в ином контексте, что будет ясно из дальнейшего. Кроме того, ее обсуждение необходимо как предварительный этап для перехода к системе из четырех осцилляторов. Заметим, что задачи о динамике трех, четырех и более осцилляторов являются достаточно сложными и «емкими».¹ Для того чтобы ориентироваться в многообразии возможных явлений, необходимо иметь ясную, физически мотивированную постановку задачи, когда используемые параметры допускают понятную и естественную интерпретацию в эксперименте. В этом плане целесообразно обратиться к связанным автоколебательным осцилляторам Ван-дер-Поля, для которых фазовые уравнения получаются в рамках квазигармонического приближения «из первых принципов», т. е. из исходных динамических уравнений.

2. Фазовая динамика трех связанных автоколебательных осцилляторов

2.1. Фазовые уравнения

Рассмотрим систему трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, соединенных в цепочку, как показано на рисунке 1. Система дифференциальных уравнений,

¹Так, в фундаментальной монографии по синхронизации [1] на стр. 351 говорится: «... Исследование трех и четырех осцилляторов, связанных каждый с каждым, дает достаточно сложную, практически неисчерпаемую, картину».

описывающая взаимодействие таких осцилляторов, имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь λ — параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ_1 — частотная расстройка второго осциллятора относительно первого, Δ_2 — третьего относительно первого, μ — коэффициент диссипативной связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

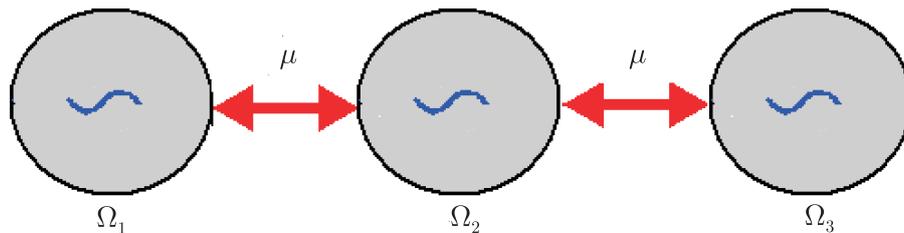


Рис. 1. Схематическое изображение трех связанных автоколебательных осцилляторов.

Если параметр возбуждения λ мал, а также малы частотные расстройки и другие соответствующие параметры в (2.1), то для анализа уравнений (2.1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [1–3, 8, 9]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it}, \quad z = ce^{it} + c^*e^{-it}. \quad (2.2)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — комплексные амплитуды осцилляторов, которые будем полагать медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные для такого метода дополнительные условия [9]:

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}^*e^{-it} = 0. \quad (2.3)$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - a^*e^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - b^*e^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} + c^*e^{-it}). \quad (2.4)$$

Подставим соотношения (2.2)–(2.4) в уравнения (2.1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В полученных уравнениях управляющий параметр λ можно убрать перенормировкой переменных и параметров:

$$a = \sqrt{\lambda}\bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda}\bar{b}, \quad c = \sqrt{\lambda}\bar{c}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\lambda}, \quad \mu = \lambda\bar{\mu}, \quad \Delta_{1,2} = \lambda\bar{\Delta}_{1,2}. \quad (2.6)$$

Будем считать такую перенормировку выполненной, а для сокращения записи черту над нормированными величинами будем опускать. Теперь новые отнормированные параметры можно считать уже не малыми.

Положим далее $a = Re^{i\psi_1}$, $b = re^{i\psi_2}$ и $c = ve^{i\psi_3}$, где R, r, v — действительные амплитуды, а $\psi_{1,2,3}$ — фазы осцилляторов. Тогда получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) + v \cos(\psi_3 - \psi_2) - 2r), \\ 2\dot{v} &= v - v^3 + \mu(v \cos(\psi_2 - \psi_3) - v), \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{r}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{v}{2r} \mu \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{r}{2v} \mu \sin(\psi_2 - \psi_3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В уравнениях для фаз в (2.7) вслед за [1–3] считаем, что осцилляторы движутся в окрестностях стационарных невозмущенных орбит $R = r = v = 1$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \mu \sin(\psi_1 - \psi_2) + \mu \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \mu \sin(\psi_2 - \psi_3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Размерность системы (2.8) может быть понижена на единицу, если ввести относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3. \quad (2.9)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это и есть фазовые уравнения, описывающие взаимодействие трех взаимно связанных автоколебательных осцилляторов.

2.2. Фазовая динамика двух связанных осцилляторов

Для дальнейшего нам понадобится охарактеризовать случай двух осцилляторов в принятых здесь обозначениях. Выключим связь между вторым и третьим осцилляторами. Тогда вместо уравнений (2.10) будем иметь одно уравнение для относительной фазы первого и второго осцилляторов:

$$\dot{\theta} = -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta. \quad (2.11)$$

Это классическое уравнение Адлера, которое описывает возможность двух режимов колебаний: захвата относительной фазы при $|\Delta_1| < 2\mu$ и режима биений при $|\Delta_1| > 2\mu$ [1–3, 8, 9]. На плоскости параметров «частотная расстройка–величина связи (Δ_1, μ) » указанным режимам отвечают области внутри и вне языка Арнольда (рис. 2). Основание языка расположено в точке $\Delta_1 = 0$, что отвечает *резонансному условию* в системе, когда собственные частоты первого и второго осциллятора совпадают. При Δ_1 синхронизация осцилляторов

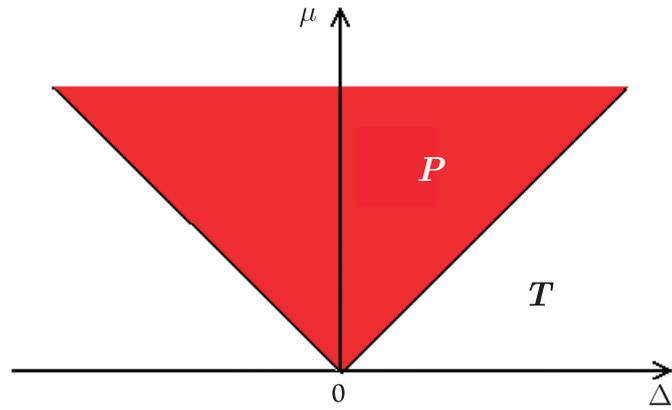


Рис. 2. Области захвата P и биений T двух связанных осцилляторов.

может происходить при сколь угодно малой связи. В фазовом приближении этими двумя типами поведения и исчерпывается случай двух связанных осцилляторов [1–9].

Захват двух осцилляторов происходит на их центральной частоте [1–3]. В наших обозначениях в этом случае скорость изменения относительной фазы равна нулю $\dot{\theta} = 0$, так что $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$. Тогда из (2.11) и первого уравнения (2.8) получаем для частоты захвата

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \frac{\Delta_1}{4}, \quad (2.12)$$

что равно среднему арифметическому собственных частот первого и второго осцилляторов, равных в соответствии с (2.8) нулю и $\frac{\Delta_1}{2}$.

Аналогично, если оставить связь только между вторым и третьим осцилляторами, то приходим к режиму их захвата при $|\Delta_1 - \Delta_2| > 2\mu$ и режиму биений при противоположном условии. В таком случае осцилляторы также захватываются на своей центральной частоте.

Для дальнейшего необходимо привести сводку основных характерных частот в безразмерной форме в принятых обозначениях. Так, собственные частоты осцилляторов равны, соответственно,

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (2.13)$$

Частоты захвата пар осцилляторов при выключенной связи с третьим даются соотношениями

$$\Omega_{1-2} = \frac{\Delta_1}{4}, \quad \Omega_{2-3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}. \quad (2.14)$$

2.3. Условие полной синхронизации трех осцилляторов

Перейдем теперь к системе из трех связанных осцилляторов. Найдем условия *полной* синхронизации, т. е. режима, когда реализуется *точный* взаимный захват фаз всех трех осцилляторов. В этом случае $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$. Тогда $\dot{\theta} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, и из (2.10) находим выражения для относительных фаз:

$$\begin{aligned} \mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отсюда сразу следуют уравнения границ области захвата

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}, \quad (2.16)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}. \quad (2.17)$$

В пространстве параметров $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ условия (2.16), (2.17) задают некоторые поверхности. Фиксируем одну из расстроек, например Δ_2 , и изучим устройство плоскости «частотная расстройка Δ_1 — величина связи μ ». На плоскости (Δ_1, μ) условия (2.16), (2.17) задают линии, показанные на рисунке 3. Они определяют два языка традиционного вида с вершинами в точках

$$\Delta_1 = -\Delta_2, \quad \Delta_1 = 2\Delta_2. \quad (2.18)$$

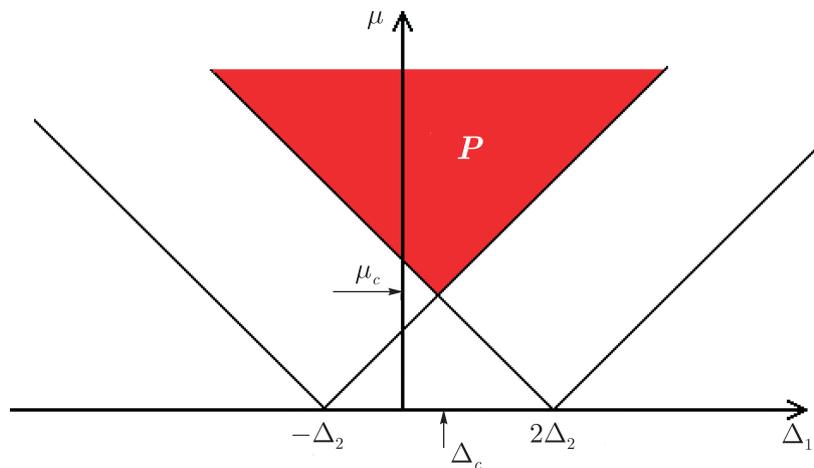


Рис. 3. Область полного захвата трех фазовых осцилляторов P (красный цвет)² и квазипериодических режимов (белый цвет). Линии отвечают условиям (2.16) и (2.17).

Появление таких значений частотных расстроек имеет простое физическое объяснение. Действительно, разобьем исследуемую систему на две подсистемы, как показано на рисунке 4а. Частота захвата кластера из второго и третьего осцилляторов как единого целого, в соответствии с (2.14), равна Ω_{2-3} . Условие резонанса этой частоты с частотой первого осциллятора: $\Omega_1 = \Omega_{2-3}$. Подставляя сюда соответствующие частоты из (2.13), (2.14), получаем первое из условий (2.18). Если же разбить три осциллятора на две подсистемы, как показано на рисунке 4б, то получим резонансное условие $\Omega_{1-2} = \Omega_3$. Используя (2.13), (2.14), тогда приходим ко второму условию (2.18).³

Однако в отличие от случая двух осцилляторов, языки с вершинами в точках (2.18) при малой величине связи не отвечают состояниям равновесия. Обсудим этот вопрос подробнее. Внутри области P на рисунке 3 в системе имеется четыре неподвижные точки: устойчивый и неустойчивый узел и два седла. Соответствующий фазовый портрет показан на рисунке 5а. Устойчивый узел отвечает за режим полной синхронизации. При выходе из области P при пересечении ее границы все четыре точки попарно сливаются. Пороговая

²Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/1756/0>

³Полезно привести резонансные условия в размерной форме, они даны в пояснении к рисунку 4.

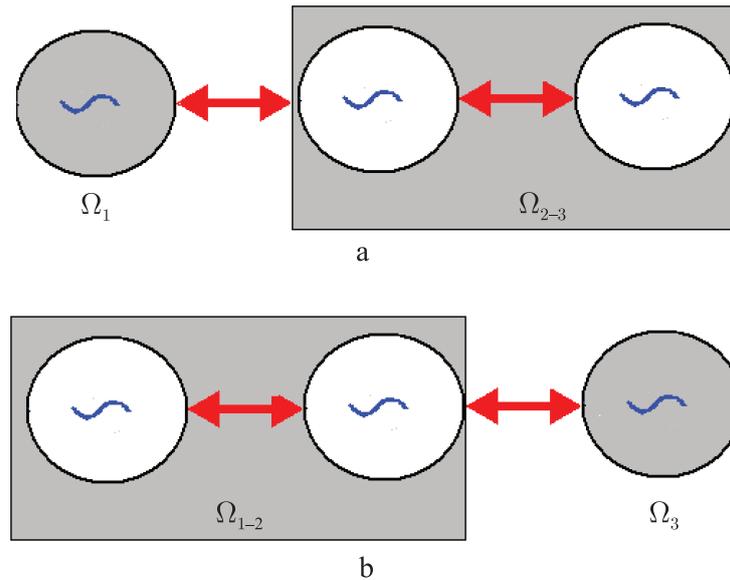


Рис. 4. Объединение трех связанных осцилляторов в подсистемы. Резонансные условия (а) $2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, (б) $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_3$; ω_i — собственная частота i -го осциллятора.

ситуация показана на рисунке 5b. После этого равновесия исчезают, и остаются устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые (рис. 5с). При этом режим полной синхронизации разрушается с возникновением двухчастотных колебаний. Как можно видеть из рисунка 5с, фаза θ осциллирует около положения равновесия. Поскольку по определению θ — относительная фаза первого и второго осцилляторов, это означает, что осцилляторы *частично* взаимно захвачены (см. рис. 4b). Если затем уменьшить (с учетом знака) частотную расстройку Δ_1 , то устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые сливаются, режим двухчастотного тора разрушается и возникает режим трехчастотных колебаний, которому отвечает «поток» фазовых траекторий на фазовой плоскости (рис. 5d).

Нетрудно видеть, что за разрушение полной синхронизации отвечает специфический вариант бифуркации, когда одновременно происходят, фактически, две седло-узловые бифуркации состояний равновесия. Поясним механизм наблюдаемого поведения.

Из соотношений (2.15) видно, что решения появляются парами: θ_1 и θ_2 для первого уравнения и φ_1 и φ_2 — для второго. При этом имеют место четыре неподвижные точки: (φ_1, θ_1) , (φ_1, θ_2) , (φ_2, θ_1) , (φ_2, θ_2) . На фазовой плоскости они располагаются в вершинах прямоугольника (рис. 6a). Их устойчивые и неустойчивые многообразия образуют замкнутый гетероклинический контур, как схематически показано на рисунке 6a. (Сравните рис. 6a и рис. 5a.)

Будем теперь варьировать одну из комбинаций параметров, стоящих в правых частях (2.15), например, вторую. Тогда решения θ_1 и θ_2 не будут меняться, а решения φ_1 и φ_2 будут сближаться. При выполнении условия (2.17) они сливаются. На рисунке 6 это будет отвечать одновременному слиянию пар состояний равновесия. После такой бифуркации остаются два многообразия, обозначенные на рисунке 6b как M_1 и M_2 . Из них и возникают неустойчивая и устойчивая инвариантные кривые, причем вторая отвечает за режим двухчастотных колебаний.

Из рисунка 6b нетрудно понять, что возникающий квазипериодический режим будет отвечать ситуации, когда переменная θ будет «примерно» постоянна. Это означает, что

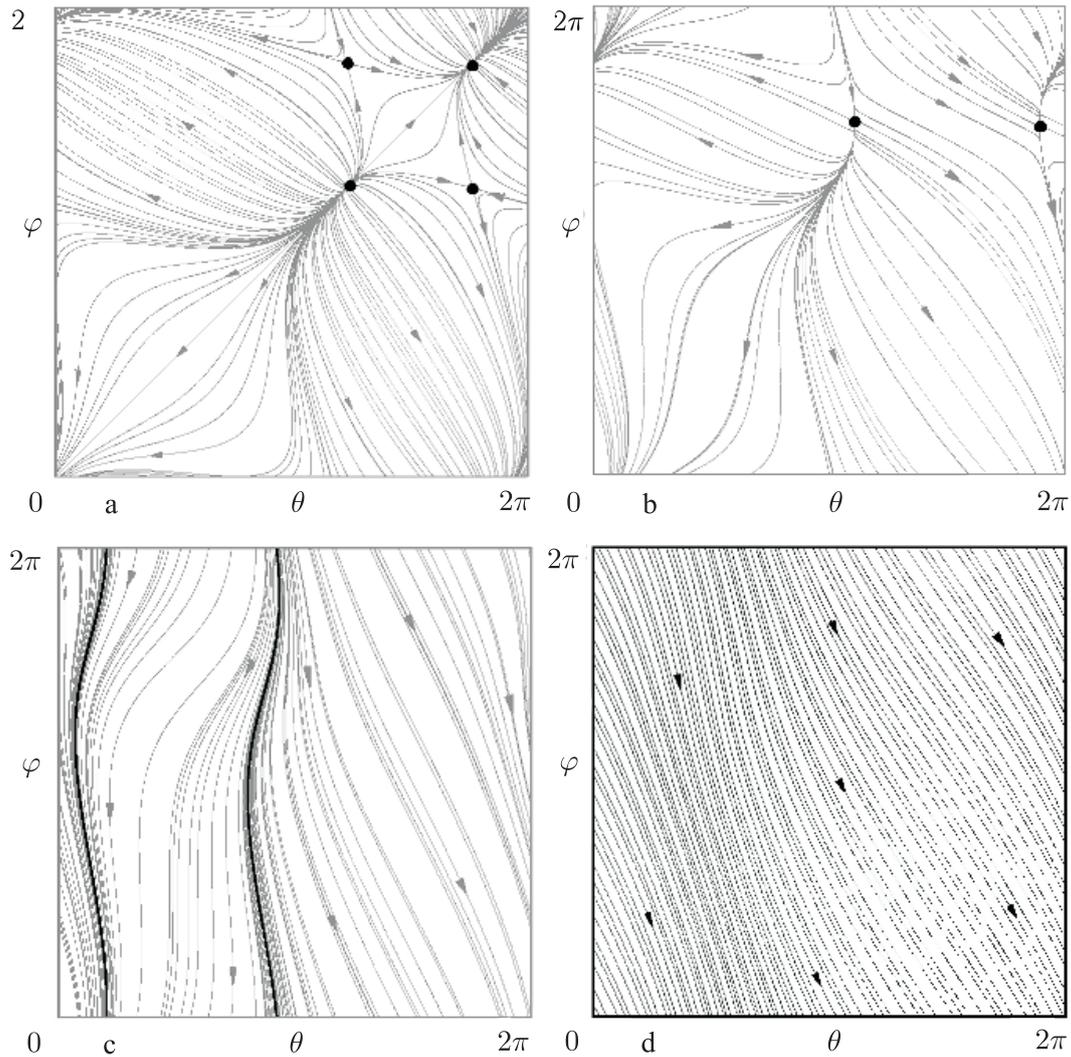


Рис. 5. Фазовые портреты системы (2.10), $\Delta_2 = 1$: а) $\Delta_1 = 0.5$, $\mu = 0.75$, б) $\Delta_1 = -0.25$, $\mu = 0.75$, в) $\Delta_1 = -0.25$, $\mu = 0.25$, г) $\Delta_1 = -1.0$, $\mu = 0.25$.

в результате описанной бифуркации можно ожидать возникновения режима частичного захвата первого и второго осцилляторов (см. рис. 4б).

Если варьировать другую комбинацию параметров, отвечающую первому соотношению (2.15), то сливаются решения θ_1 и θ_2 , и уже не горизонтальные, а вертикальные многообразия на рисунке 6. Эта ситуация имеет место при выходе через правую границу области полной синхронизации P . При этом примерно постоянной должна оказаться вторая относительная фаза φ , что отвечает режиму частичного захвата второго и третьего осцилляторов.

Две линии седло-узловых бифуркаций описанного типа сходятся на рисунке 3 в точке, которую легко находим, совмещая (2.16)–(2.17):

$$\mu_c = \frac{\Delta_2}{2}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (2.19)$$

Эти значения отмечены стрелочками на рисунке 3. Таким образом, область полной синхронизации имеет *пороговый характер* по величине связи, что отличает обсуждаемую ситуацию от случая двух связанных осцилляторов.

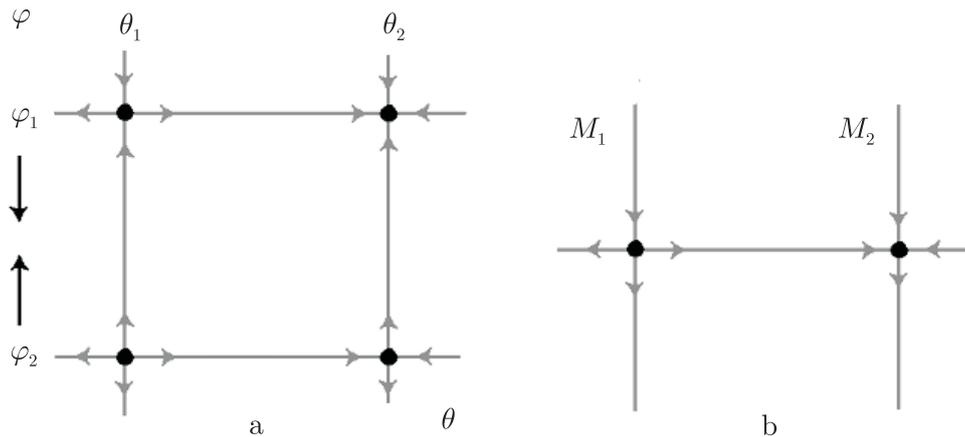


Рис. 6. а) «Каркас» из состояний равновесия и их многообразий системы (2.10), б) ситуация на пороге разрушения полной синхронизации.

Вычислим теперь частоту захвата трех осцилляторов. Подставляя в любое из уравнений (2.8) условия (2.15), получаем:

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (2.20)$$

С учетом (2.13) это отвечает тому, что три осциллятора захватываются на центральной частоте, для которой далее введем обозначение

$$\Omega_* = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3}{3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (2.21)$$

2.4. Различные режимы динамики трех осцилляторов

Мы описали пока простейшие режимы колебаний трех связанных осцилляторов. Для более полного исследования необходимо детальнее проанализировать устройство пространства параметров, привлекая численные методы. Вслед за [32] будем использовать построение карты ляпуновских показателей. С этой целью вычисляются оба ляпуновских показателя системы (2.10) Λ_1, Λ_2 в каждой точке плоскости параметров (Δ_1, μ) . Затем эта плоскость окрашивается в соответствии с величиной показателей, чтобы визуализировать следующие режимы:

- а) P — наличие устойчивой неподвижной точки (точный захват фаз), $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$,
- б) T_2 — квазипериодический режим, отвечающий двухчастотному тору, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$,
- в) T_3 — квазипериодический режим, отвечающий трехчастотному тору⁴, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$.

Такая карта показана на рисунке 7. Анализируя рисунок 7, прежде всего отмечаем наличие области точного захвата всех трех осцилляторов P , отвечающей аналитическому рассмотрению. В частности, выявляется амплитудный порог полной синхронизации трех осцилляторов. Область трехчастотных торов занимает нижнюю часть карты. Области двухчастотных торов имеют вид языков, погруженных в область трехчастотных торов. Острия этих языков лежат на оси частотной расстройки.

⁴Вообще говоря, термины «двухчастотный тор» и «трехчастотный тор» относятся к исходной системе дифференциальных уравнений (2.1). В фазовых уравнениях режиму с одним нулевым ляпуновским показателем отвечает замкнутая инвариантная кривая, а с двумя — поток фазовых траекторий. Их использование, однако, очень удобно при описании типов режимов и устройства пространства параметров, поэтому мы будем использовать их далее, имея в виду сделанное замечание.

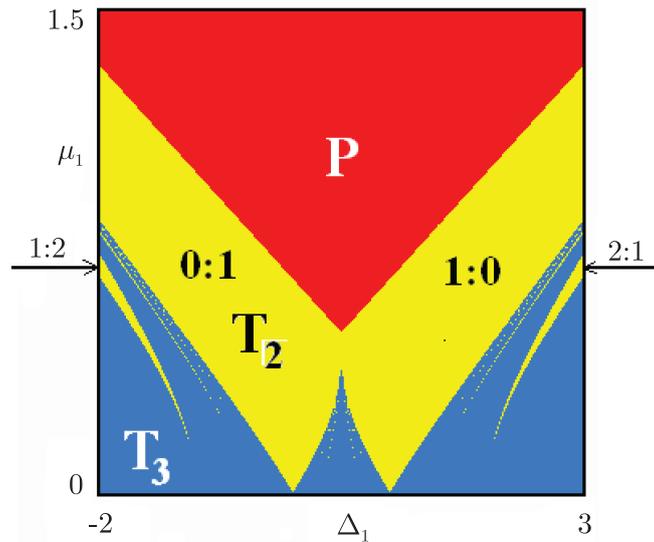


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей системы трех связанных фазовых осцилляторов (2.10), $\Delta_2 = 1$. Цифрами в виде дробей обозначены языки основных резонансных двухчастотных торов; P — периодический режим, T_2 — двухчастотный тор, T_3 — трехчастотный тор.

В режимах двухчастотных торов аттракторами системы (2.10) являются инвариантные кривые на «фазовом квадрате» $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ (рис. 5с). Такие режимы можно классифицировать с помощью фактора $w = p : q$, где числа p и q отвечают количеству пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной сторонами этого квадрата [33]. (Поскольку фаза может осциллировать, то нужно учитывать только существенные пересечения. Так, если траектория покидает фазовый квадрат через верхнюю границу и снова входит в него через нижнюю, значение p увеличивается на единицу, а если наоборот — уменьшается. Аналогично — для правой и левой границ.)

Поскольку фазовое пространство 2π -периодично по каждой переменной (θ, φ) , то оно может быть замкнуто по ним, так что динамика фаз будет происходить на торе [33], как показано на рисунке 8. При этом режимам двухчастотной квазипериодичности будут отвечать замкнутые притягивающие орбиты, лежащие на поверхности тора (рис. 8а), а трехчастотной — траектории, всюду плотно покрывающие тор (рис. 8б). Фактор $w = p : q$ в рамках такой интерпретации можно охарактеризовать как число вращения на «торе фаз», классифицирующее двухчастотный тор. При этом двухчастотным режимам отвечают рациональные w , а трехчастотным — иррациональные.⁵

Для более детального описания и классификации наблюдаемых режимов карту ляпуновских показателей удобно дополнить «картой торов» [34]. Для этого в каждой точке плоскости параметров вычисляем величины p и q и находим числа вращения $w = p : q$. После этого плоскость параметров окрашивается в разные цвета в соответствии с фактором $w = p : q$. При этом удобно использовать цветную гамму.

Для построения карты используем наиболее интересный фрагмент плоскости параметров в окрестности точки, отвечающей порогу полной синхронизации (рис. 9а). Для областей основных двухчастотных торов числа вращения w подписаны на рисунке. Области трехчастотных торов, которые в ходе численной процедуры фиксируются как неперіодические

⁵При такой интерпретации становится наглядным утверждение, что резонансные двухчастотные торы лежат на поверхности трехчастотного.

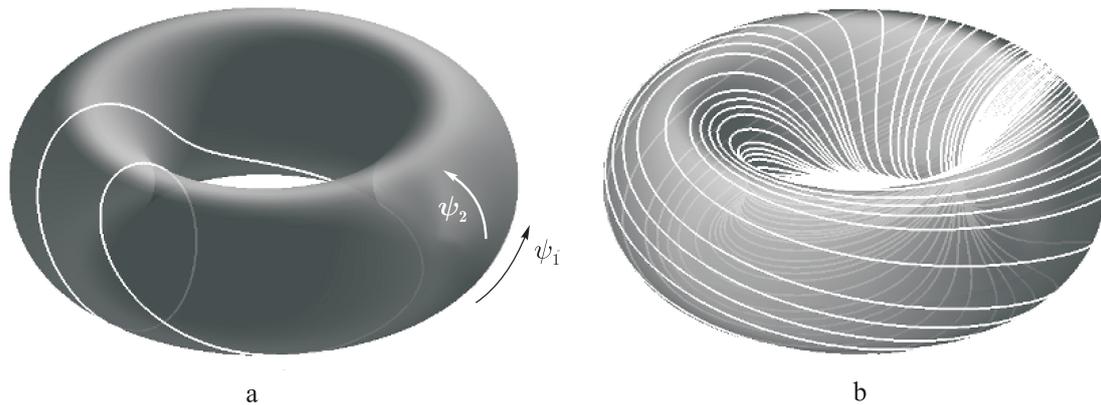


Рис. 8. Траектории на «фазовом торе»: а) резонансный двухчастотный тор с числом вращения $w = 1 : 2$, б) трехчастотный тор.

режимы, показаны светло-серым цветом. На рисунке 9б показана область трехчастотных торов с еще большим увеличением.

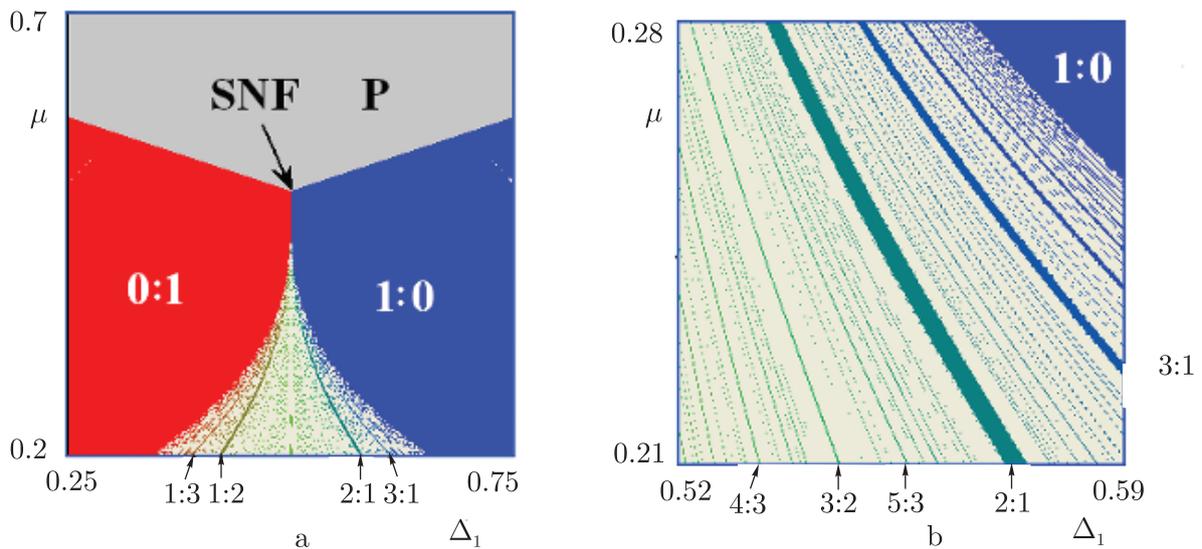


Рис. 9. а) Карта торов системы (2.10) в окрестности точки, отвечающей порогу полной синхронизации (точка SNF — *saddle node fan*, см. пояснение в тексте); б) ее увеличенный фрагмент. Цифрами указаны числа вращения основных областей двухчастотных торов, P — режим полной синхронизации всех трех осцилляторов.

Самые большие языки резонансных двухчастотных торов на рисунках 7, 9 имеют числа вращения $w = 0 : 1$ и $w = 1 : 0$. В первом случае относительная фаза первого и второго осцилляторов осциллирует около равновесного значения (осцилляторы частично захвачены), в то время как фаза третьего неограниченно нарастает. Соответствующий фазовый портрет показан на рисунке 5с. Для $w = 1 : 0$ частично захвачена относительная фаза второго и третьего осцилляторов. Из наиболее широких других языков двухчастотных торов отметим языки с числами вращения $w = 1 : 2$ и $w = 2 : 1$. В этом случае относительные фазы обоих осцилляторов неограниченно нарастают.

Анализируя рисунок 9а, можно заключить, что точка, отвечающая порогу полной синхронизации с координатами (2.19), дает важный пример бифуркации коразмерности два для системы с трехчастотной квазипериодичностью. В этой точке сходятся две линии седло-узловых бифуркаций неподвижных точек разного типа, ограничивающие область полной синхронизации. При этом гетероклинический контур, показанный на рисунке 6а, стягивается в точку на фазовой плоскости.

В окрестности обсуждаемой точки SNF на рисунке 9 имеют место режимы полного захвата всех осцилляторов, частичного захвата пар осцилляторов (первый–второй и второй–третий) и трехчастотных торов. В свою очередь, область трехчастотных торов пронизана целой системой языков синхронизации резонансных двухчастотных торов, самые широкие из которых имеют числа вращения $1 : 2$ и $2 : 1$, следующие — числа вращения $1 : 3$ и $3 : 1$, и т. д. О многообразии возможных двухчастотных торов можно судить по увеличенному фрагменту на рисунке 9б, на котором фиксируются области резонансных торов с числами вращения $4 : 3$, $3 : 2$, $5 : 3$, и т. д. Все эти языки имеют вершины в точке SNF, причем границами всех языков являются линии седло-узловых бифуркаций соответствующих инвариантных кривых.

Наличие таких точек, по-видимому, важный атрибут задач о трехчастотной квазипериодичности. Так, аналогичные точки были представлены в работе [13] для связанных отображений поворота, моделирующих динамику связанных осцилляторов (рис. 4.21 в [13]). Там они получили название *saddle node fan* — «седло-узловой веер», в соответствии с характерным расположением системы высших языков двухчастотных торов. Такие же точки обнаруживаются и в работах [30–32], относящихся к задаче вынужденной синхронизации двух связанных автоколебательных осцилляторов внешней силой. Они достаточно уверенно диагностируются и по экспериментальным картам, представленным в работе [17] (рис. 9 в [17]).

3. Фазовая динамика четырех связанных осцилляторов

3.1. Фазовые уравнения и условия полной синхронизации

Рассмотрим теперь цепочку из четырех связанных осцилляторов Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\ \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Действуя аналогично п. 2.1, получаем уравнения для фаз четырех осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2} \sin \theta, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\ \dot{\psi}_4 &= \frac{\Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \phi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь использованы обозначения для относительных фаз осцилляторов:

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3, \quad \phi = \psi_3 - \psi_4. \quad (3.3)$$

Перейдем от (3.2) к уравнениям для относительных фаз:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \mu \sin \phi.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Найдем условия полной синхронизации в системе, для чего положим $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\phi} = 0$. Тогда из (3.4) можно получить уравнения для синусов каждой из относительных фаз:

$$\begin{aligned}\mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2}, \\ \mu \sin \phi &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Если все три соотношения (3.5) имеют решения, то они дают, соответственно, восемь неподвижных точек, расположенных в фазовом пространстве (θ, φ, ϕ) , в вершинах параллелепипеда. При вариации любой из трех комбинаций параметров в правых частях (3.5), две из граней параллелепипеда будут сближаться и могут слиться. При этом все восемь неподвижных точек попарно сливаются и *одновременно* исчезают, как только синус одной из фазовых переменных обращается в единицу. Картина аналогична представленной на рисунке 6, только вложена в трехмерное фазовое пространство. Отсюда сразу следуют выражения для седло-узловых бифуркаций:

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4}, \quad (3.6)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2}, \quad (3.7)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4}. \quad (3.8)$$

Соотношения (3.6)–(3.8) определяют три языка синхронизации на плоскости параметров (Δ_1, μ) . Основания языков отвечают точкам

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\Delta_2 - \Delta_3, \\ \Delta_1 &= \Delta_2 + \Delta_3, \\ \Delta_1 &= -\Delta_2 + 3\Delta_3\end{aligned}\quad (3.9)$$

Как и в случае трех осцилляторов, эти условия отвечают определенным резонансам в системе. Система из четырех осцилляторов допускает разбиения на подсистемы, состоящие из двух элементов, тремя способами: а) первый осциллятор и второй–третий–четвертый, б) первый–второй и третий–четвертый, с) первый–второй–третий и четвертый. Вычислим соответствующие собственные частоты кластеров, используя известные правила расчета частот захвата двух и трех осцилляторов:

$$\begin{aligned}\Omega_{2-3-4} &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{6}, \quad \Omega_{1-2} = \frac{\Delta_1}{4}, \\ \Omega_{3-4} &= \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{4}, \quad \Omega_{1-2-3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Используя (3.10), нетрудно показать, что первое условие (3.9) отвечает ситуации, когда собственная частота первого осциллятора равна частоте кластера из трех оставшихся. Второе отвечает резонансу между двумя кластерами из двух осцилляторов, и, наконец, третье — резонансу кластера из первых трех и четвертого осцилляторов:

$$\Omega_1 = \Omega_{2-3-4}, \quad \Omega_{1-2} = \Omega_{3-4}, \quad \Omega_{1-2-3} = \Omega_4. \quad (3.11)$$

Обсудим теперь картину седло-узловых бифуркаций неподвижных точек. Как и в случае трех осцилляторов, будем использовать плоскость параметров (Δ_1, μ) . Условия (3.6) и (3.8) задают на этой плоскости четыре линии. Центр системы двух симметричных языков на рисунке 10а отвечает точке $\Delta_1 = -\Delta_2 + \Delta_3$ и величине связи $\mu = \frac{\Delta_3}{2}$. При малой связи, как и в случае трех осцилляторов, оба языка не отвечают устойчивым режимам. Однако даже область перекрытия этих языков, показанная на рисунке 10а светло-серым цветом, теперь не обязательно будет отвечать устойчивым режимам. Так это или нет, определяется положением третьего языка (3.7).

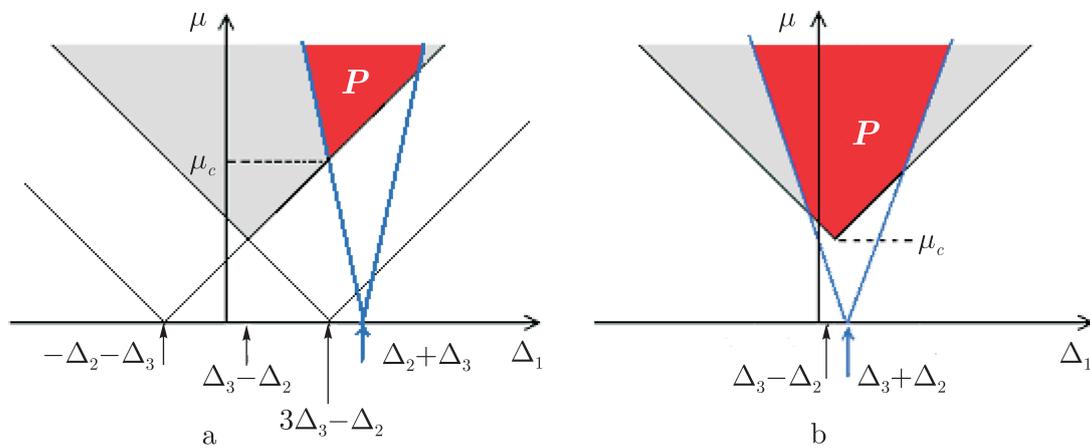


Рис. 10. Различные конфигурации линий седло-узловых бифуркаций и область точного захвата P (красный цвет) для четырех связанных осцилляторов (3.4); μ_c — порог полной синхронизации.

Чтобы классифицировать режимы синхронизации системы (3.4), удобно следить за относительным положением области, показанной светло-серым цветом на рисунке 10 и языка (3.7). Ординаты их острий равны, соответственно, $\Delta_1 = -\Delta_2 + \Delta_3$ и $\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3$. Проследим, как меняется конфигурация при уменьшении частотной расстройки Δ_2 . При $\Delta_2 > \frac{\Delta_3}{2}$ реализуется конфигурация, показанная на рисунке 10а. Отвечающая ей область полного захвата всех четырех осцилляторов показана темно-серым цветом. Полная синхронизация в этом случае имеет порог по величине связи, который находим, совмещая (3.6) и (3.8):

$$\mu_c = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{3}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{3}. \quad (3.12)$$

При уменьшении расстройки Δ_2 языки на рисунке 10а сближаются, и при $\Delta_2 < \frac{\Delta_3}{2}$ точка пересечения их границ переходит на другую ветвь, так что реализуется ситуация, показанная на рисунке 10b. В этом случае форма области точного захвата осцилляторов

меняет форму, а пороговое значение связи перестает зависеть от Δ_2 и отвечает значению

$$\mu_c = \frac{\Delta_3}{3}, \quad \Delta_c = \Delta_3 - \Delta_2. \quad (3.13)$$

Затем ситуация симметричным образом повторяется. Таким образом, возможны два типа области полной синхронизации четырех осцилляторов, отвечающие рисункам 10а и б.

Не составляет труда показать, что четыре осциллятора также захватываются на своей центральной частоте, что с использованием наших нормировок отвечает значению $\Omega = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{8}$.

3.2. Различные режимы динамики четырех осцилляторов

Перейдем к более детальному обсуждению устройства пространства параметров четырех связанных автоколебательных осцилляторов. На рисунке 11а представлена карта ляпуновских показателей системы (3.4) на плоскости параметров (Δ_1, μ) . Такая система характеризуется уже тремя ляпуновскими показателями, так что дополнительно появляется возможность режимов четырехчастотных торов и хаоса. На рисунке 11а использованы следующие обозначения:

- а) P — наличие устойчивой неподвижной точки, $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$,
- б) T_2 — режим, отвечающий двухчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$,
- в) T_3 — режим, отвечающий трехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 < 0$,
- г) T_4 — режим, отвечающий четырехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$,
- д) C — хаотический режим, $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$.

Значения остальных параметров выбраны ($\Delta_1 = 0,3$, $\Delta_2 = 1$) так, чтобы реализовалась наиболее сложная из возможных конфигурация области полной синхронизации (рис. 10б).

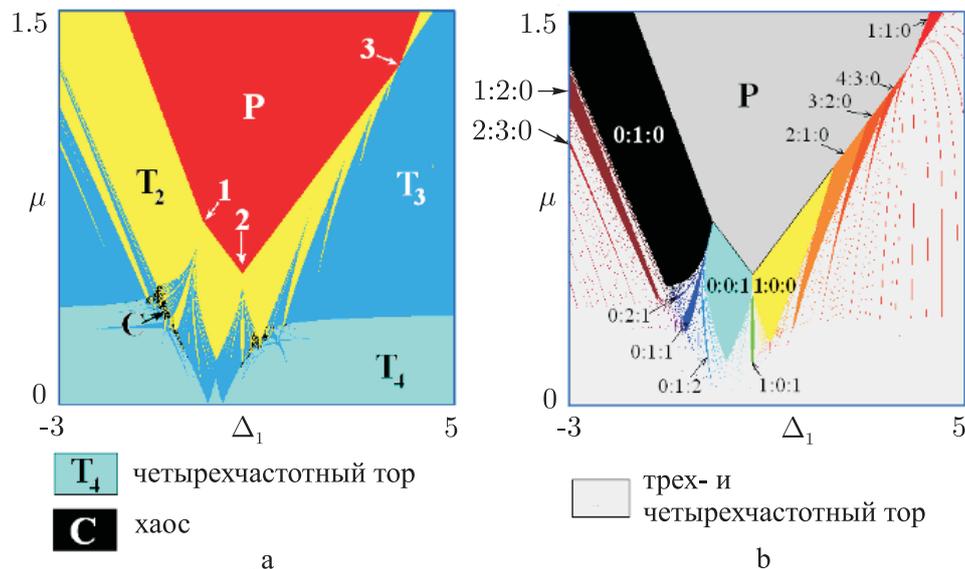


Рис. 11. а) Карта ляпуновских показателей четырех связанных осцилляторов (3.4), б) карта двухчастотных торов той же системы; $\Delta_2 = 0,3$, $\Delta_3 = 1$.

На карте можно видеть область полной синхронизации P , отвечающую аналитическому рассмотрению и рисунку 10b. Область полной синхронизации граничит с областью двухчастотных торов, за исключением указанных стрелками и цифрами 1, 2 и 3 точек, в которых она имеет «точечный» контакт с областью трехчастотных торов.

По сравнению со случаем трех осцилляторов на рисунке 7, основания языков двухчастотных торов на оси частотной расстройки разрушены. Область двухчастотных торов теперь окружена областями трехчастотных торов, которые располагаются в основном выше линии $\mu \simeq 0,3$. При меньших значениях связи доминируют уже четырехчастотные торы. Однако и при очень малой связи можно видеть два языка трехчастотных торов, основания которых расположены на оси частот. Для системы из четырех связанных осцилляторов возникают и области хаоса, однако они незначительны и локализованы на границе областей трех- и четырехчастотных торов.

Карту ляпуновских показателей дополняет карта торов на рисунке 11b, на которой разными цветами показаны области различных резонансных двухчастотных торов. Торы обозначены числами вращения $w = p : q : r$, где p, q, r отвечают числам существенных пересечений инвариантной кривой со сторонами фазового куба (со сторонами 2π) в фазовом пространстве относительных фаз осцилляторов (θ, φ, ϕ) .

3.3. Ситуации коразмерности два и три

На картах можно видеть три характерные точки коразмерности два, обозначенные на рисунке 11a цифрами 1, 2 и 3, в которых сходятся по паре различных линий седло-узловых бифуркаций неподвижных точек. Увеличенные фрагменты карты торов в окрестности точек 1 и 2 показаны, соответственно, на рисунках 12a и 12b.

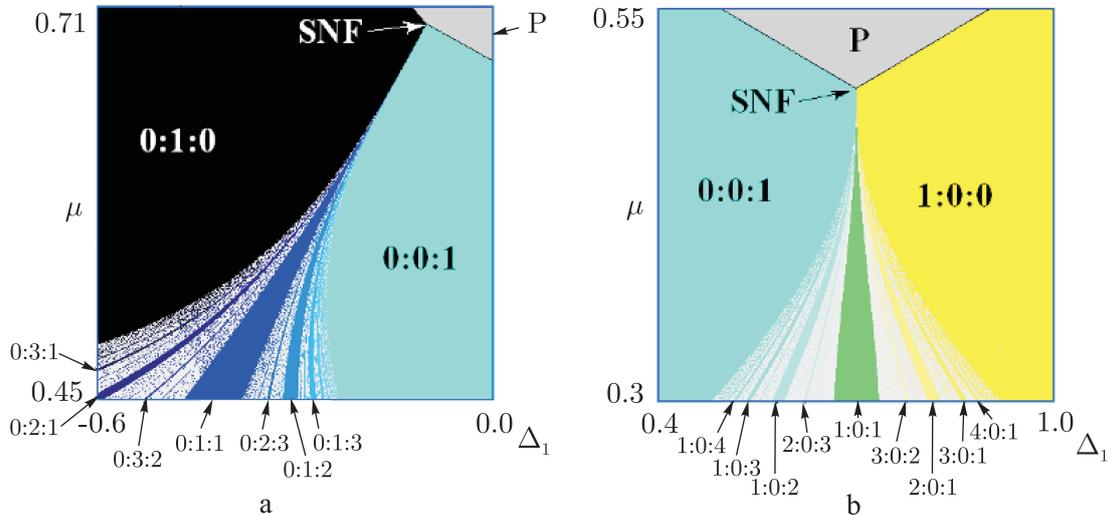


Рис. 12. Увеличенные фрагменты карты торов в окрестности точек SNF: а) окрестность точки, обозначенной на рисунке 11a цифрой 1, б) окрестность точки, обозначенной на рисунке 11a цифрой 2; $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$.

Обратимся сначала к первой точке на рисунке 12a. Ее устройство аналогично обсуждавшейся выше точке SNF. Действительно, все числа вращения на рисунке 12a имеют вид $w = 0 : q : r$. Это означает, что первый и второй осцилляторы частично захвачены

(их относительная фаза совершает колебания с ограниченной амплитудой и не нарастает, чему отвечает индекс нуль для числа вращения). Система кластеризуется в соответствии с рисунком 13а. При этом правила для оставшихся двух индексов $q : r$ совершенно аналогичны случаю трех осцилляторов (см. рис. 9). Таким образом, в окрестности этой точки динамика системы аналогична случаю трех осцилляторов, при этом в качестве подсистемы выступают частично захваченные первый и второй осцилляторы.

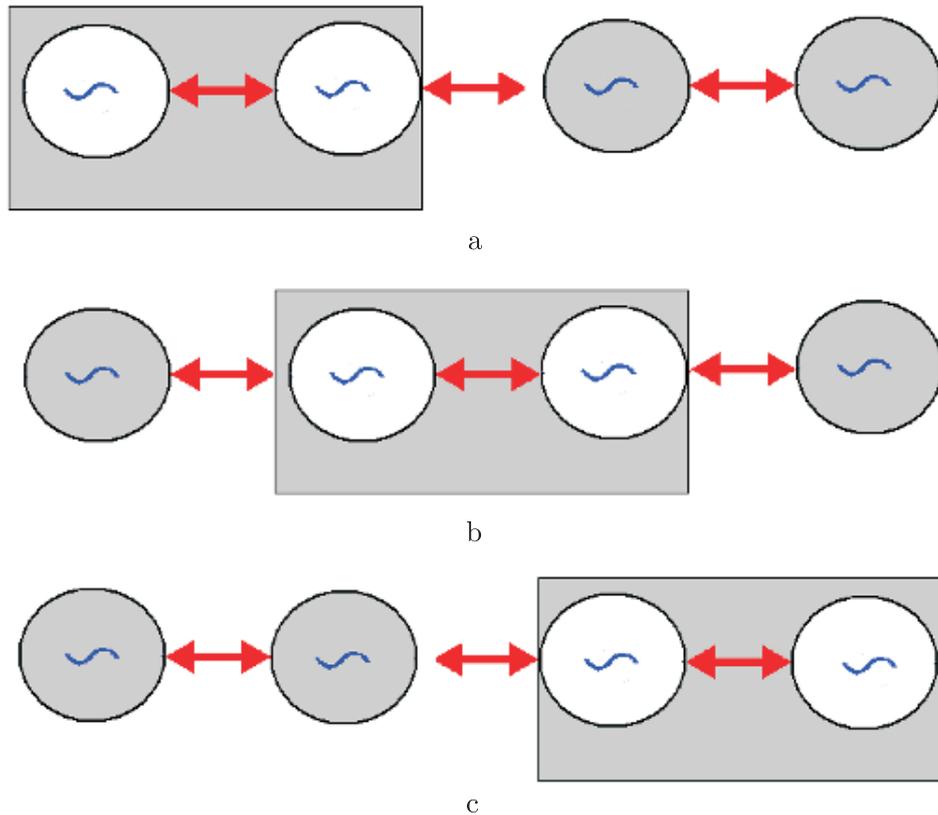


Рис. 13. Кластеризация в цепочке четырех осцилляторов в окрестности точек слияния линий седло-узловых бифуркаций неподвижных точек, отвечающая трем возможным вариантам попарного захвата.

Из рисунка 12b нетрудно видеть, что аналогичная ситуация имеет место и в окрестности второй точки SNF, только в этом случае частично захваченными оказываются второй и третий осциллятор, что схематически показано на рисунке 13b. При этом числа вращения имеют вид $w = p : 0 : r$, а оставшиеся индексы $p : r$ также повторяют правила для случая трех осцилляторов.

В определенной мере аналогичная ситуация имеет место в окрестности третьей характерной точки пересечения седло-узловых бифуркаций. Из рисунка 11b можно видеть, что в этом случае числа вращения $w = p : q : 0$, что соответствует ситуации частичного захвата третьего и четвертого осцилляторов (рис. 13c). Однако вид областей не вполне отвечает каноническому для точки *saddle node fan*. Действительно, для этой точки характерно наличие в ее малой окрестности областей с числами вращения $p : q = 1 : 0$ и $p : q = 0 : 1$ (см. рис. 9 и рис. 4.21 в [13]). В рассматриваемом случае эти области, однако, отделены от точки 3.

Кроме того, как видно из рисунка 11b, области резонансных торов с числами вращения $2 : 1 : 0, 3 : 2 : 0, 4 : 3 : 0, \dots$ имеют не вид узких язычков, погруженных в область трехчастотных торов, а имеют протяженный «контакт» с областью полной синхронизации. Таким образом, для рассматриваемых значений частотных расстройек динамика кластерного состояния (рис. 13c) в области большой связи не вполне аналогична случаю трех осцилляторов.

Вновь обратимся к рисунку 10. Нетрудно видеть, что, варьируя частотную расстройку Δ_2 , можно добиться ситуации, когда два «угла» на рисунке 10b сольются. При этом возникает новая *ситуация коразмерности три*. В этом случае в одной точке пересекаются все три линии (3.6)–(3.8). Совмещая соответствующие уравнения, нетрудно получить условие реализаций такой бифуркации коразмерности три: $\Delta_2 = \frac{\Delta_3}{2}$.

Ситуация до порога этой бифуркации отвечает двум точкам *saddle node fan* (рис. 12a). Таким образом, указанная бифуркация может быть интерпретирована как *слияние двух точек saddle node fan*.

Карта торов непосредственно в точке такой бифуркации дана на рисунке 14. Можно видеть, что точки *saddle node fan* разрушены — теперь в одной точке сходятся области разных типов, отвечающие как частичному захвату первого–второго, так и второго–третьего осцилляторов с числами вращения как $w = 0 : q : r$, так и $w = p : 0 : r$. Эти два семейства, однако, четко разделены языком с числом вращения $w = 0 : 0 : 1$, для которого частично захвачены одновременно три осциллятора: первый, второй и третий.

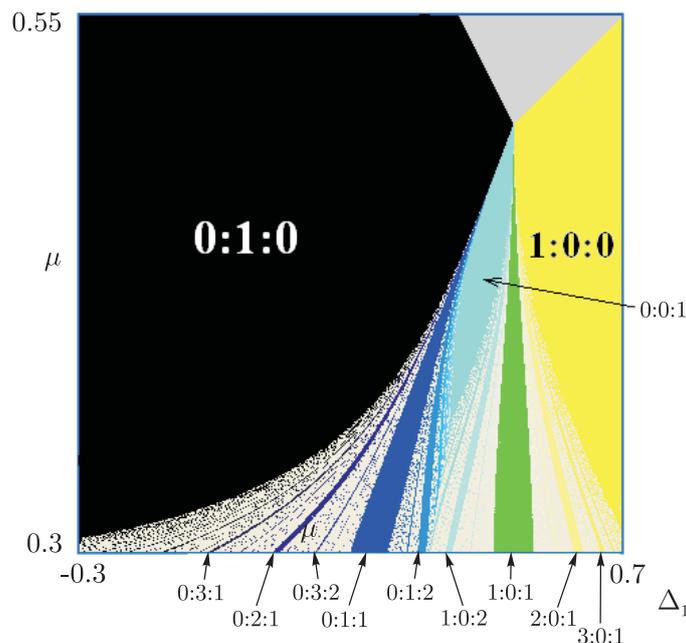


Рис. 14. Карта торов для ситуации, отвечающей бифуркации коразмерности три: слиянию двух точек SNF, $\Delta_2 = 0.5$, $\Delta_3 = 1$.

При увеличении параметра Δ_2 в область $\Delta_2 > \frac{\Delta_3}{2}$ за порог обсуждаемой бифуркации происходит заметная перестройка и усложнение картины, что иллюстрируют карты торов и ляпуновских показателей на рисунке 15. Между областями $0 : 1 : 0$ и $1 : 0 : 0$ в дополнение к обсуждавшимся семействам, появляется система язычков $w = p : q : 0$, отвечающая частичному захвату третьего и четвертого осцилляторов. Таким образом, на рисунке 15а

одновременно присутствуют все три варианта кластеризации, отвечающие захвату одной из пар осцилляторов. Кроме того, возникают языки двухчастотных торов, не отвечающие кластерным состояниям. Их можно видеть в нижней части рисунка 15а, наиболее крупные из них имеют числа вращения $1:3:2$, $2:4:3$, и т. д. Если обратиться к ляпуновской карте на рисунке 15b, то можно видеть, что эти языки погружены в область хаоса. Интересно отметить, что характерные «углы» приобретает не только область полной синхронизации, но и область двухчастотных торов, отвечающая частичной синхронизации типа $0:1:0$. При этом область хаоса локализована как раз в окрестности такого «угла». При уменьшении связи можно наблюдать, как хаос превращается в четырехчастотные торы.

Таким образом, окрестность точки слияния двух точек *saddle node fan* оказывается наиболее «представительной» с точки зрения наблюдаемых режимов.

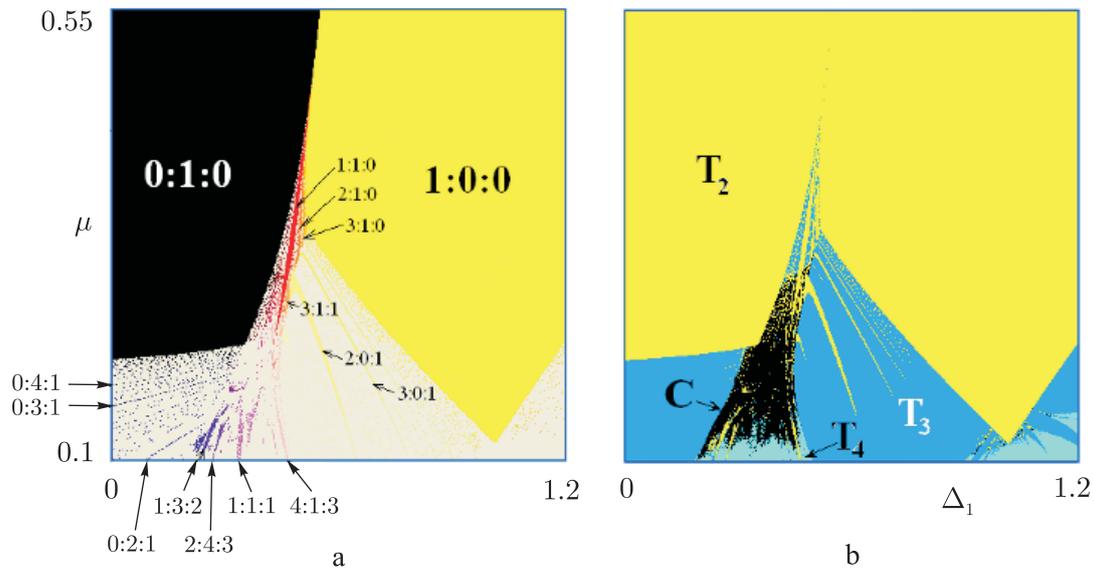


Рис. 15. Карта торов (а) и карта ляпуновских показателей (б) за порогом бифуркации слияния двух точек SNF; $\Delta_2 = 0.65$, $\Delta_3 = 1$.

3.4. На пути к многомерным торам

Описанный алгоритм анализа может быть распространен и на случаи большего числа осцилляторов. Например, для пяти осцилляторов вместо уравнений (3.4) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\
 \dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \mu \sin \phi + \frac{\mu}{2} \sin \vartheta, \\
 \dot{\vartheta} &= \frac{\Delta_3 - \Delta_4}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \phi - \mu \sin \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Для неподвижных точек полагаем $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\phi} = \dot{\vartheta} = 0$. Далее следуем описанному выше алгоритму. В первом уравнении выражаем $\sin \varphi$ через $\sin \theta$, подставляем во второе. Оттуда

выражаем $\sin \phi$ через $\sin \theta$, и так далее, «вниз» по цепочке уравнений. В результате после некоторых преобразований получаются следующие выражения для синусов всех четырех фазовых переменных:

$$\begin{aligned}\mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{5}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 - 2\Delta_3 - 2\Delta_4}{2}, \\ \mu \sin \phi &= \frac{2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 3\Delta_3 - 3\Delta_4}{5}, \\ \mu \sin \vartheta &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 4\Delta_4}{5}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Если все уравнения (3.15) имеют решения, то система имеет 16 неподвижных точек, расположенных в вершинах *четырёхмерного* параллелепипеда в четырёхмерном фазовом пространстве $(\theta, \varphi, \phi, \vartheta)$. Аналогично случаю трех и четырех осцилляторов, при вариации соответствующих комбинаций параметров в (3.15), трехмерные грани этого параллелепипеда могут сближаться. В результате происходит седло-узловая бифуркация такого типа, что все 16 точек сливаются попарно и *одновременно* исчезают.

Условие обращение каждого из синусов в ± 1 приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\mu &= \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{5}, \\ \mu &= \pm \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 - 2\Delta_3 - 2\Delta_4}{2}, \\ \mu &= \pm \frac{2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 3\Delta_3 - 3\Delta_4}{5}, \\ \mu &= \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 4\Delta_4}{5}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Замечательно, что вершины языков $\mu = 0$, задаваемых уравнениями (3.15), также отвечают резонансам между кластерами, на которые разбивается система: из четырех осцилляторов и одного, а также из двух и трех осцилляторов. Это без особых проблем получается по правилам расчета частот захвата двух, трех и четырех осцилляторов. Соответствующие резонансные условия, записанные в том же порядке, что и условия (3.15), имеют вид

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega_{2-3-4-5}, & \Omega_{1-2} &= \Omega_{3-4-5}, \\ \Omega_{1-2-3} &= \Omega_{4-5}, & \Omega_{1-2-3-4} &= \Omega_5.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Теперь на плоскости (Δ_1, μ) имеет место четыре языка, два из которых имеют наименьший одинаковый наклон, а два других — больший наклон. Несложно показать, что картина пересечения этих языков может иметь не более четырех «углов» — точек коразмерности два. На рисунке 16 представлен качественный рисунок, иллюстрирующий соответствующую конфигурацию.

Наличие такой конфигурации можно выявить следующими рассуждениями. Разбиение плоскости параметров первой и четвертой линиями (3.15), дополненное третьей линией, аналогично случаю трех осцилляторов. Из (3.15) можно показать, что случай с тремя «углами» для этой области имеет место при условии $\Delta_3 < \frac{\Delta_4}{2}$. При этом имеет место порог полной

синхронизации по величине связи, который определяется соотношениями

$$\mu_c = \frac{\Delta_4}{2}, \quad \Delta_c = \frac{3}{2}\Delta_4 - \Delta_3 - \Delta_2. \quad (3.18)$$

Эта картина должна быть дополнена двумя линиями, задающими второй язык (3.15), как показано на рисунке 16. При этом если язык охватывает точку (3.18), то она и определяет порог полной синхронизации пяти осцилляторов.

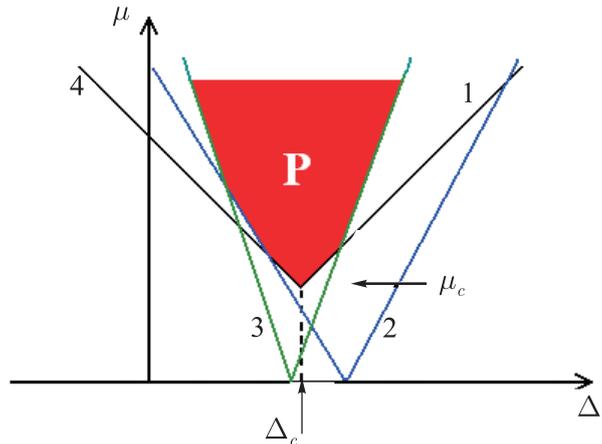


Рис. 16. Качественная картина возможного расположения линий седло-узловых бифуркаций и конфигурации области точного захвата P (красный цвет) для пяти осцилляторов. Цифры отвечают соответствующему по порядку уравнению (3.15).

Нетрудно понять, что, варьируя необходимое число параметров, можно добиться ситуации более высокой коразмерности (четыре), когда три точки коразмерности два сольются. Это имеет место при значениях параметров

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_4}{5}, \quad \Delta_3 = \frac{\Delta_4}{2}. \quad (3.19)$$

При этом координаты соответствующей точки на плоскости (Δ_1, μ) будут составлять

$$\mu = \frac{\Delta_4}{2}, \quad \Delta_1 = \frac{4\Delta_4}{5}. \quad (3.20)$$

Приведенные рассуждения обобщаются на случай произвольного числа осцилляторов. Если связаны $(N + 1)$ осциллятор, то на плоскости одной из частотных расстроек (величина связи) имеется N языков, причем при малой связи все они отвечают неустойчивым режимам. Вершины языков отвечают N вариантам разбиения системы на кластеры из $N - 1$, $N - 2$ и т. д. осцилляторов. Область полной синхронизации получается как пересечение *всех внутренних областей* языков. Можно усмотреть здесь определенную аналогию с известной интерпретацией синхронизации хаоса как области пересечения языков синхронизации встроенных в хаотический аттрактор неустойчивых периодических орбит. (См. рис. 10.11 из [1] и соответствующее обсуждение.) Отличие состоит в том, что в случае режима синхронизации многочастотного ансамбля число языков конечно и на единицу меньше числа взаимодействующих осцилляторов, причем имеют место определенные правила расчета вершин языков и наклона их границ.

Граница области полной синхронизации образована линиями седло-узловых бифуркаций, для которых одновременно сливаются все 2^N неподвижных точек системы. Эта граница будет иметь «углы» — точки коразмерности два, в которых сходятся линии седло-узловых бифуркаций разных типов. При этом максимально «противоположный» синхронизации режим реализуется в областях, которые лежат в области малых значений связи.

4. Заключение

Система трех взаимно связанных фазовых осцилляторов характеризуется наличием порога полной синхронизации по величине связи. Этот порог связан с точкой коразмерности два, в которой сходятся области полной синхронизации, две области частичной синхронизации попарного захвата осцилляторов и трехчастотных торов. Последняя содержит систему языков резонансных двухчастотных торов с рациональными числами вращения. В фазовом пространстве в окрестности этой точки имеет место гетероклинический контур, разрушение которого отвечает за возникновение двухчастотной квазипериодичности. Непосредственно в точке коразмерности два контур стягивается в точку. Такие точки являются типичными и существенными в задачах с трехчастотной квазипериодичностью.

В системе четырех взаимно связанных фазовых осцилляторов область полной синхронизации также граничит с областью двухчастотных торов, за исключением избранных точек, в которых она имеет «точечный» контакт с областью трехчастотных торов. Эти точки отвечают пересечению двух линий седло-узловых бифуркаций неподвижных точек разного типа. Их окрестности могут отвечать трем вариантам кластеризации в системе, когда одна соседняя пара осцилляторов взаимно (частично) захвачена. Система при этом в определенной мере может оказаться аналогичной цепочке из трех осцилляторов. Однако для случая сильной связи возникают и некоторые отличия в устройстве областей двухчастотных торов.

Эти отличия становятся наиболее существенными вблизи ситуации коразмерности три, отвечающей пересечению трех линий, ответственных за седло-узловые бифуркации неподвижных точек. Эта область оказывается наиболее представительной с точки зрения наблюдаемых режимов. В ее окрестности одновременно присутствуют все три варианта кластеризации, отвечающие захвату одной из пар осцилляторов. Кроме того, возникают языки двухчастотных торов, не отвечающие кластерным состояниям, причем последние погружены в область хаоса. При уменьшении связи можно наблюдать, как хаос превращается в четырехчастотные торы.

Для случая четырех осцилляторов при малой связи наблюдаются уже четырехчастотные торы. Однако и при очень малой связи имеют место два узких языка трехчастотных торов.

Описанный в статье алгоритм поиска области полной синхронизации распространяется на случай большего числа фазовых осцилляторов в цепочке. При этом за разрушение режима полной синхронизации отвечает специфическая версия седло-узловой бифуркации, когда все эти точки попарно сливаются и одновременно исчезают. Каждое из N соответствующих условий задает на плоскости параметров (одна из частотных расстроек — величина связи) N языков. Их вершины отвечают резонансным условиям, когда частоты колебаний двух кластеров, на которые разбивается цепочка, совпадают. Область полной синхронизации отвечает ситуации перекрытия всех языков из этой системы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект 09-02-00707 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Список литературы

- [1] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [2] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
- [3] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 496 с.
- [4] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
- [5] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. (Springer Ser. Synergetics, vol. 19.) Berlin: Springer, 1984. 156 p.
- [6] Glass L., MacKey M. C. From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton: Princeton Univ. Press, 1988. 272 p.
- [7] Winfree A. The geometry of biological time. 2nd ed. New York: Springer, 2001. 800 p.
- [8] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2008. 136 с.
- [9] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
- [10] Ivanchenko M. V., Osipov G. V., Shalfeev V. D., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Phys. D*, 2004, vol. 189, nos. 1–2, pp. 8–30.
- [11] Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., Turukina L. V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // *Phys. D*, 2009, vol. 238, no. 14, pp. 1203–1215.
- [12] Kuznetsov A. P., Roman Ju. P. Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators: Broadband synchronization // *Phys. D*, 2009, vol. 238, no. 16, pp. 1499–1506.
- [13] Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Phys. D*, 1991, vol. 49, pp. 387–475.
- [14] Rockmore D., Siegel R., Tongring N., Tresser C. An approach to renormalization on the n -torus // *Chaos*, 1991, vol. 1, no. 1, pp. 25–30.
- [15] Baladi V., Rockmore D., Tongring N., Tresser C. Renormalization on the n -dimensional torus // *Nonlinearity*, 1992, vol. 5, no. 5, pp. 1111–1136.
- [16] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // *Comm. Math. Phys.*, 1971, vol. 20, no. 3, pp. 167–192.
- [17] Linsay P. S., Cumming A. W. Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos // *Phys. D*, 1989, vol. 40, pp. 196–217.
- [18] Battelino P. M. Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // *Phys. Rev. A*, 1988, vol. 38, pp. 1495–1502.
- [19] Ashwin P., Guasch J., Phelps J. M. Rotation sets and phase-locking in an electronic three oscillator system // *Phys. D*, 1993, vol. 66, nos. 3–4, pp. 392–411.
- [20] Ashwin P. Boundary of two frequency behaviour in a system of three weakly coupled electronic oscillators // *Chaos Solitons Fractals*, 1998, vol. 9, no. 8, pp. 1279–1287.
- [21] Pazo D., Sanchez E., Matias M. A. Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2001, vol. 11, no. 10, pp. 2683–2688.
- [22] Yang J. Quasiperiodicity and transition to chaos // *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, pp. 6521–6526.

- [23] Ashwin P., King G. P., Swift J. W. Three identical oscillators with symmetric coupling // *Nonlinearity*, 1990, no. 3, pp. 581–601.
- [24] Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators // *Phys. D*, 2008, vol. 237, pp. 454–466.
- [25] Karabacak O., Ashwin P. Heteroclinic ratchets in a system in networks of coupled oscillators // *J. Nonlinear Sci.*, 2010, vol. 20, no. 1, pp. 105–129.
- [26] Buskirk R. V., Jeffries C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*, 1985, vol. 31, pp. 3332–3357.
- [27] Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Chaos*, 2008, vol. 18, 037123, 7 p.
- [28] Anishchenko V., Nikolaev S. Transition to chaos from quasiperiodic motions on the four-dimensional torus perturbed by external noise // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 2733–2741.
- [29] Anishchenko V. S., Nikolaev S. M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, 046216, 4 p.
- [30] Anishchenko V., Astakhov V., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhys. Lett.*, 2009, vol. 86, 30003.
- [31] Анищенко В. С., Астахов С. В., Вадивасова Т. Е., Феоктистов А. В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, с. 237–252.
- [32] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // *Письма в ЖТФ*, 2010, т. 36, № 10, с. 73–80.
- [33] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 368 с.
- [34] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Конференция молодых ученых (6–12 марта 2010 г., Нижний Новгород): Тезисы докладов*. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2010. С. 126–127.