

## Обратные стохастические бифуркации циклов дискретных систем

И. А. Башкирцева<sup>1</sup>, Л. Б. Ряшко<sup>2</sup>, С. П. Федотов<sup>3</sup>, И. Н. Цветков<sup>4</sup>

<sup>1,2,4</sup> Уральский государственный университет  
620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51

<sup>3</sup> School of Mathematics, University of Manchester  
UK, Manchester, Oxford Road, M13, 9PL

<sup>1</sup> irina.bashkirtseva@usu.ru, <sup>2</sup> lev.ryashko@usu.ru, <sup>3</sup> sergei.fedotov@manchester.ac.uk, <sup>4</sup> itsvetkov@eastwind.ru

*Получено 19 февраля 2010 г.*

В работе рассматриваются стохастически возмущенные предельные циклы дискретных динамических систем в зоне удвоения периода. Исследуется явление обратных стохастических бифуркаций (ОСБ) — уменьшения кратности цикла при увеличении интенсивности шума. Предлагается метод анализа ОСБ на основе техники функции стохастической чувствительности. Конструктивные возможности данного метода демонстрируются на примере анализа ОСБ стохастических циклов систем Ферхюльста и Риккера.

Ключевые слова: бифуркации, дискретные системы, модель Ферхюльста, стохастическая чувствительность

**I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko, S. P. Fedotov, I. N. Tsvetkov**

**Backward stochastic bifurcations of the discrete system cycles**

We study stochastically forced limit cycles of discrete dynamical systems in a period-doubling bifurcation zone. A phenomenon of a decreasing of the stochastic cycle multiplicity with a noise intensity growth is investigated. We call it by a backward stochastic bifurcation (BSB). In this paper, for the BSB analysis we suggest a stochastic sensitivity function technique. As a result, a method for the estimation of critical values of noise intensity corresponding to BSB is proposed. The constructive possibilities of this general method for the detailed BSB analysis of the multiple stochastic cycles of the forced Verhulst and Ricker systems are demonstrated.

Keywords: stochastic discrete systems, bifurcations, Verhulst system, Ricker system

MSC 2010: 37H20, 65P30

## § 1. Введение

Функционирование большинства реальных систем сопровождается воздействием неконтролируемых случайных возмущений. Присутствие даже малых случайных возмущений может привести к существенным изменениям в динамике системы [1, 2, 3, 4]. Известен широкий круг явлений, связанных с воздействием случайных помех: стохастический резонанс [5, 6], индуцированные шумами переходы [2], порождаемый шумами порядок [7, 8] и хаос [9]. Хорошо известно, что фазовый портрет нелинейной системы может быть существенно изменен под воздействием шума [10, 11, 12]. Эффекты, связанные с присутствием шума, значительно усиливаются вблизи точек бифуркации. Благодаря высокой чувствительности аттракторов в зонах бифуркаций даже весьма малые шумы могут порождать качественные изменения динамики. Анализ стохастической чувствительности аттракторов нелинейных систем, находящихся под воздействием случайных возмущений, позволяет вести конструктивное исследование подобных изменений [13, 14].

В настоящее время исследования явлений, связанных с воздействием шумов, проводятся в рамках теории стохастических бифуркаций [15]. Изучение перехода «равновесие–цикл» в динамических системах со случайными возмущениями привлекает внимание многих исследователей. Так, например, стохастические бифуркации Хопфа рассматривались в [16, 17, 18, 19] для брюсселятора, в [20, 21] для осциллятора Дуффинга–Ван-дер-Поля, в [22] для осциллятора Ван-дер-Поля, в [23] — для системы Хопфа. Анализ скейлинга для дискретных отображений с шумом при переходе к хаосу посвящены работы [24, 25, 26, 27].

Под влиянием шума тонкая структура стохастических аттракторов нелинейных систем размывается. При увеличении интенсивности шума происходит слияние пиков функции плотности распределения [10]. В результате такого слияния форма стохастических аттракторов упрощается: 2-цикл трансформируется в 1-цикл, 4-цикл — в 2-цикл, и т. д. Такое явление уменьшения кратности стохастических циклов (обратная стохастическая бифуркация) для модели Ресслера изучалось в [28]. В данной работе исследуются стохастически возмущенные циклы нелинейной дискретной динамической системы в зоне удвоения периода.

Целью работы является анализ обратных стохастических бифуркаций на основе метода функций стохастической чувствительности (ФСЧ). Техника ФСЧ была введена ранее в работах [13, 29, 30, 31], где с ее помощью исследовались стохастические циклы нелинейных систем с непрерывным временем. Конструктивные возможности данного подхода продемонстрированы в [31] для задачи возбуждения и подавления хаоса и в [32] для задачи анализа индуцированных шумом переходов между периодическими аттракторами стохастической системы Лоренца.

В § 2 приводится содержательное описание явления обратной стохастической бифуркации (ОСБ) и дается формальный критерий определения ОСБ по виду графика плотности вероятности распределения состояний стохастического цикла. Для построения плотности вероятности представлены два подхода. В § 3 плотность определяется эмпирически в результате длительного компьютерного моделирования. Возможности эмпирического подхода иллюстрируются для ОСБ циклов системы Ферхюльста. В § 4 для аппроксимации плотности вероятности используется аппарат функций стохастической чувствительности. В § 4.1 дается описание ФСЧ для стохастических  $k$ -циклов, а в § 4.2 на основе ФСЧ проводится анализ ОСБ в системе Ферхюльста. В § 5 приведены результаты разработанной методики анализа ОСБ для популяционной модели Риккера.

## § 2. Формализация явления ОСБ

Рассмотрим дискретную стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (2.1)$$

где  $f(x)$  — достаточно гладкая функция, а  $\xi_t$  — некоррелированный случайный процесс с параметрами

$$E\xi_t = 0, \quad E\xi_t^2 = 1, \quad E\xi_t \xi_k = 0 \quad (t \neq k),$$

$E$  — знак математического ожидания. Функция  $\sigma(x)$  позволяет учесть зависимость интенсивности помех от состояния системы.

Будем рассматривать случай, когда детерминированная система (2.1) (при  $\varepsilon = 0$ ) имеет  $k$ -цикл  $\Gamma$  — множество точек  $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ , связанных соотношениями:

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Считаем, что последовательность  $\bar{x}_t$  определена при всех  $t$  с условием периодичности  $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$ . Предполагается, что цикл  $\Gamma$  является экспоненциально устойчивым [33].

Присутствие в системе (2.1) случайных возмущений приводит к тому, что фазовая траектория покидает детерминированный предельный цикл  $\Gamma$  и формирует вокруг его элементов множество случайных состояний. При малом значении интенсивности шума отклонения случайных состояний от  $\Gamma$  малы. Области рассеивания, соответствующие различным точкам детерминированного цикла, не пересекаются. С ростом  $\varepsilon$  величина отклонений растет и становится сравнима с расстоянием между соседними точками аттрактора. В результате соседние области рассеивания начинают пересекаться между собой. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  после некоторого критического значения происходит полное слияние соседних областей. Например, при малых шумах, вокруг двух состояний детерминированного 2-цикла наблюдаются две непересекающиеся области рассеивания. При увеличении шума эти области начнут пересекаться и при соответствующем уровне интенсивности возмущений сольются в одну — стохастический 2-цикл перейдет в стохастическое равновесие. Такое качественное изменение фазового портрета системы — уменьшение кратности стохастического цикла при увеличении интенсивности шума — будем называть *обратной стохастической бифуркацией (ОСБ)*. После первой ОСБ при дальнейшем увеличении интенсивности шума для многократных циклов наблюдается серия *старших ОСБ* последовательного уменьшения кратности — вплоть до образования 1-цикла (равновесия).

Для детального анализа ОСБ в данной работе будем использовать функцию плотности вероятности случайных состояний. Эта функция позволяет описывать важные детали слияния соседних областей рассеивания при увеличении шума. Пусть в детерминированном случае ( $\varepsilon = 0$ ) система (2.1) имеет устойчивый предельный 2-цикл  $\Gamma$ . Тогда при малом значении  $\varepsilon$  график плотности  $p(x, \varepsilon)$  имеет два узких всплеска (рис. 1а). При увеличении  $\varepsilon$  ширина всплесков растет. Начинается процесс слияния всплесков — значение  $p(x^*, \varepsilon)$  в точке локального минимума  $x^*$  увеличивается (рис. 1б, в). Форма графика при этом остается бимодальной, а общее количество точек локального экстремума равно трем. При некотором значении  $\varepsilon$  происходит бифуркация — качественное изменение формы графика — она становится унимодальной (рис. 1д). Соседние всплески сливаются в один, и остается только одна точка локального экстремума. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  наблюдается один четко выраженный всплеск (рис. 1е, ф). Такое качественное изменение формы графика плотности описывает ОСБ — переход стохастического 2-цикла в 1-цикл. Бифуркационное значение

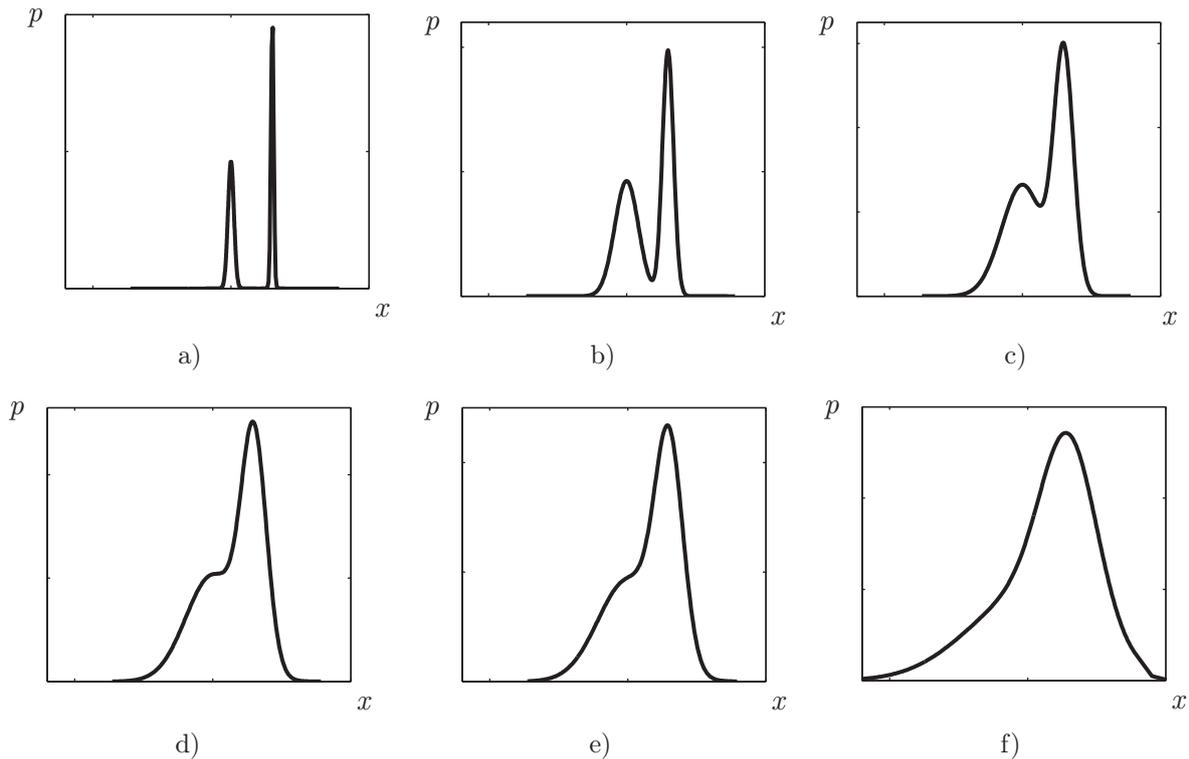


Рис. 1. Плотность вероятности при увеличении интенсивности шума.

интенсивности шума, при котором происходит качественное изменение графика плотности  $p(x, \varepsilon)$  — переход от бимодальной формы к унимодальной, — будем называть *критическим значением шума*. Таким образом, точка бифуркации соответствует моменту слияния двух соседних максимумов.

В случае, когда в детерминированной системе (2.1) наблюдается устойчивый  $2^k$ -цикл, критическим значением первой ОСБ будем называть значение интенсивности, при котором график плотности  $p(x, \varepsilon)$  переходит от  $2^k$ -модальной формы к  $2^{k-1}$ -модальной. Старшие ОСБ рассмотрим на примере 4-цикла. На рисунке 2 представлены графики плотности  $p(x, \varepsilon)$  при нескольких различных уровнях интенсивности шума. Как следует из приведенного рисунка, при малом шуме на графике  $p(x, \varepsilon)$  выделяются 4 всплеска (рис. 2а), группируемые в две пары. При некотором значении  $\varepsilon = \varepsilon^*$  происходит первая ОСБ: два всплеска в каждой паре сливаются в один (рис. 2б), и остается всего одна пара всплесков. При некотором  $\varepsilon = \varepsilon_2^* > \varepsilon^*$  наблюдается слияние уже этой пары всплесков (рис. 2с). Это соответствует второй ОСБ перехода уже стохастического 2-цикла в 1-цикл.

Задача определения модальности графика плотности вероятности эквивалентна задаче нахождения точек локального максимума функции. Для определения количества локальных максимумов и минимумов при заданном уровне шума вычислим количество корней уравнения

$$\frac{dp}{dx} = 0. \quad (2.2)$$

Из описанного поведения графика функции  $p(x, \varepsilon)$  для 2-цикла следует, что найдется  $\varepsilon^*$ , такое, что при  $\varepsilon < \varepsilon^*$  уравнение (2.2) имеет три различных корня, при  $\varepsilon = \varepsilon^*$  уравнение (2.2) имеет два корня, один из которых кратный, а при  $\varepsilon > \varepsilon^*$  уравнение (2.2) имеет

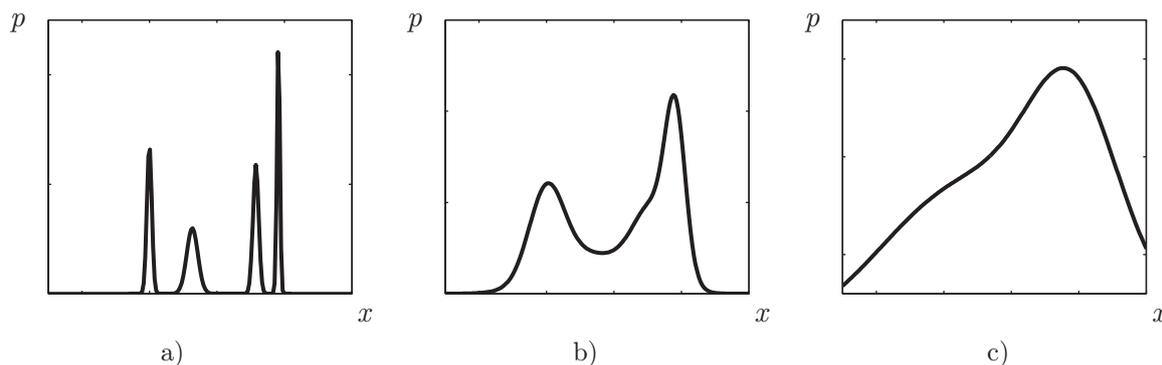


Рис. 2. Иллюстрация старших ОСБ. Плотность вероятности при увеличении интенсивности шума.

только один корень. Значение  $\varepsilon^*$  является точкой обратной стохастической бифуркации, соответствующей переходу 2-цикла в 1-цикл. Аналогичным образом в терминах корней уравнения (2.2) можно сформулировать условия для критических значений старших ОСБ.

Аналогичными рассуждениями можно сформулировать условие для обнаружения критических значений старших ОСБ в терминах корней уравнения (2.2).

Таким образом, для анализа ОСБ необходимо знать плотности вероятности при различной интенсивности шума. Для построения плотности предлагается использовать два подхода: эмпирический и аналитический.

Эмпирический подход к изучению ОСБ опирается на численное моделирование случайной траектории процесса (2.1). В результате длительного итерационного процесса мы получаем статистический набор данных, по которому строится гистограмма. Для построения эмпирической статистики важным параметром является количество итераций  $N$ . Значение данного параметра непосредственно влияет на затраты времени, расходуемого на численное моделирование. При малом количестве итераций гистограмма, аппроксимирующая плотность вероятности, содержит значительную шумовую составляющую (рис. 3а). Данный факт значительно осложняет применение какого-либо формального критерия, позволяющего по экстремумам судить о качественных изменениях формы графика, сопровождающего ОСБ. Сглаживание графика  $p(x, \varepsilon)$  может быть достигнуто либо за счет значительного увеличения времени эмпирического моделирования, либо за счет применения специальной процедуры сглаживания (рис. 3б).

Аналитический подход опирается на построение аппроксимации плотности вероятности с помощью аппарата функций стохастической чувствительности.

### § 3. Эмпирический анализ ОСБ циклов системы Ферхюльста

Продemonстрируем эмпирический подход на примере стохастической системы Ферхюльста

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t) + \varepsilon \xi_t, \quad (3.1)$$

где  $\xi_t$  — независимые гауссовские случайные величины,  $E\xi_t = 0$ ,  $E\xi_t^2 = 1$ , а  $\varepsilon$  — интенсивность шумов.

При отсутствии случайных возмущений ( $\varepsilon = 0$ ) детерминированная модель Ферхюльста (3.1) имеет на интервале  $0 \leq \mu \leq 4$  различные типы динамики. Зоны порядка чередуются с зонами хаоса. На интервале  $I = (1, \mu_\infty)$ , где наблюдаются бифуркации удвоения

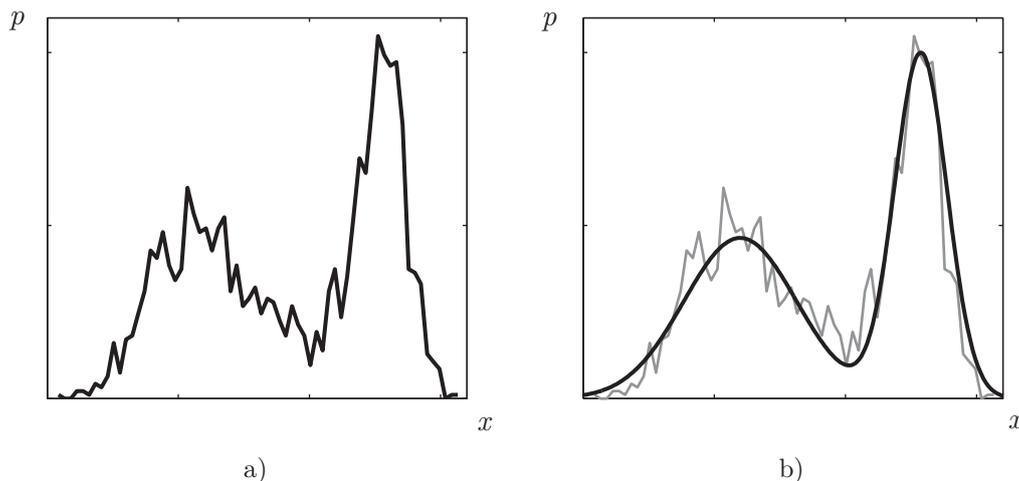


Рис. 3. Эмпирическая плотность вероятности.

периода, можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов, разделенные точками бифуркаций — интервалы  $I_0, I_1, \dots$ . На интервале  $I_n$  наблюдаются  $2^n$ -циклы с состояниями  $\bar{x}_{n,i}(\mu)$  ( $i = 1, \dots, 2^n$ ). С ростом параметра  $\mu$  точки бифуркации накапливаются к значению  $\mu_\infty = 3.5699\dots$

Проиллюстрируем общую картину ОСБ циклов системы Ферхюльста (3.1) с помощью стохастических бифуркационных диаграмм. На рисунке 4 представлены диаграммы, полученные при нескольких значениях интенсивности шума  $\varepsilon$ .

При  $\varepsilon = 0.003$  на диаграмме (рис. 4а) наблюдаются только два первых расщепления ветвей графика. Остальные тонкие детали структуры размыты. При большем уровне шума  $\varepsilon = 0.03$  (рис. 4б) четко наблюдается только первое расщепление. Область второго расщепления, выделявшаяся при меньшем шуме, размыта. Данное изменение бифуркационной диаграммы иллюстрирует ОСБ, произошедшую в системе (3.1) при увеличении интенсивности шума  $\varepsilon$  от значения 0.003 до 0.03. При  $\varepsilon = 0.1$  размывается уже и область первого расщепления графика, где остается только одна «зашумленная» ветвь (рис. 4с). Это соответствует следующей (последней) ОСБ.

Представленные здесь бифуркационные диаграммы позволяют лишь достаточно грубо оценить зоны параметров наблюдаемых ОСБ. Локализация точек бифуркаций требует привлечения более детальной информации, задаваемой плотностями вероятности  $p(x, \varepsilon, \mu)$ . В рамках рассматриваемого эмпирического подхода требуется хорошая аппроксимация этих функций при помощи гистограмм, которая может быть достигнута в результате достаточно продолжительного численного эксперимента.

Для 2-цикла ( $\mu = 3.03$ ) подробно проследим особенности изменения графиков плотности вероятности  $p(x, \varepsilon)$  при увеличении интенсивности  $\varepsilon$ . При малом шуме у графика  $p(x, \varepsilon)$  наблюдаются два отдельных узких всплеска (рис. 5а). При увеличении  $\varepsilon$  ширина пиков возрастает (рис. 5б, с) и начинается их слияние (рис. 5д, е, ф). После некоторого критического значения  $\varepsilon^*$  график имеет только один всплеск (рис. 5г). При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  у данного графика исчезают и следы бимодальности (рис. 5h, i). Отметим, что при добифуркационном уровне шума ( $\varepsilon < \varepsilon^*$ ) график  $p(x, \varepsilon)$  имеет три точки локального экстремума (рис. 5а–ф), а при  $\varepsilon > \varepsilon^*$  — уже только одну (рис. 5г, h, i).

На рис. 6 для 4-цикла ( $\mu = 3.46$ ) представлены графики эмпирической плотности вероятности  $p(x, \varepsilon)$  при трех значениях интенсивности шума  $\varepsilon$ . Как видно из данных рисунков,

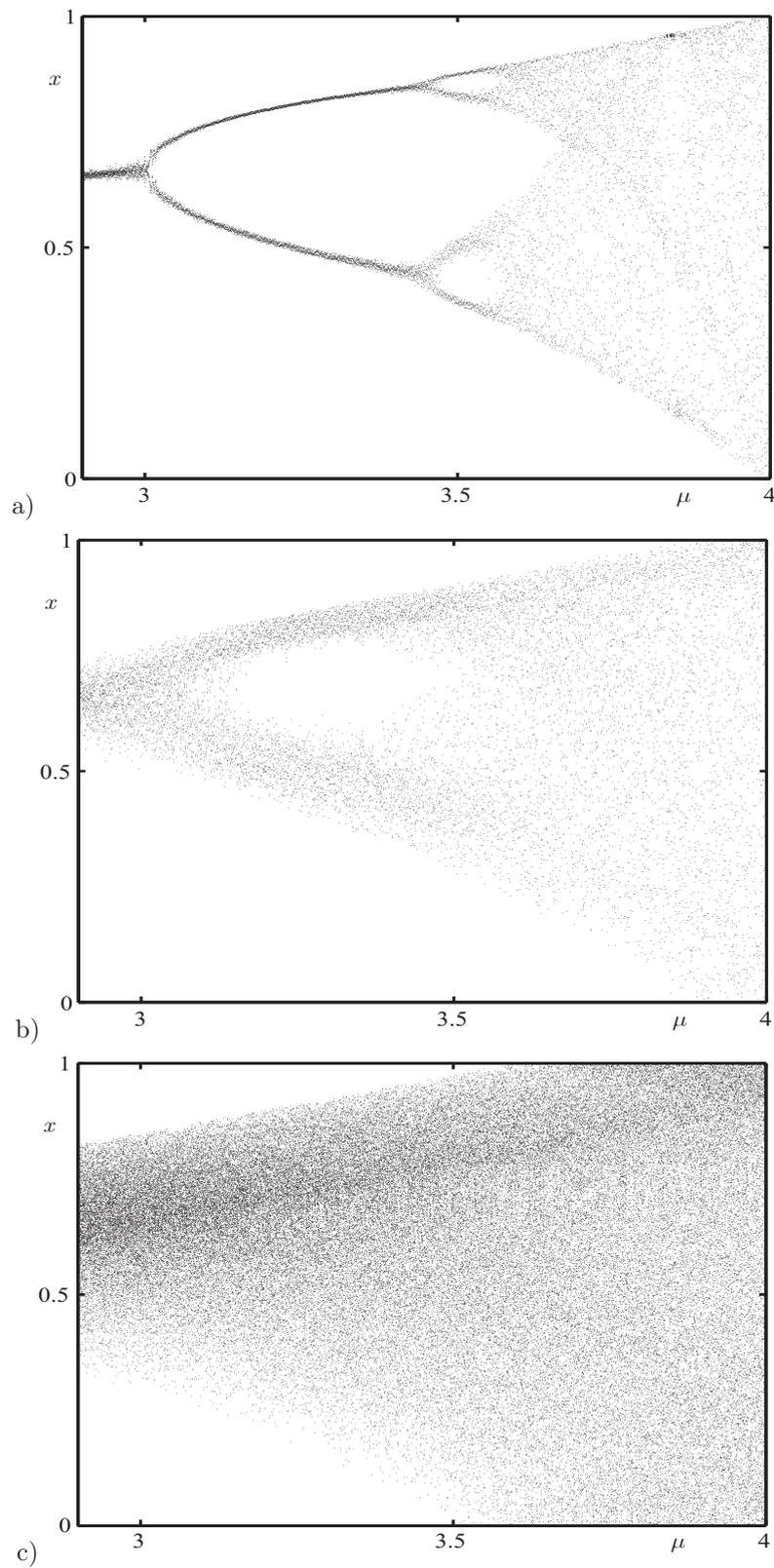


Рис. 4. Стохастическая бифуркационная диаграмма системы Ферхюльста при  $\varepsilon = 0.003$  (a),  $\varepsilon = 0.03$  (b),  $\varepsilon = 0.1$  (c).

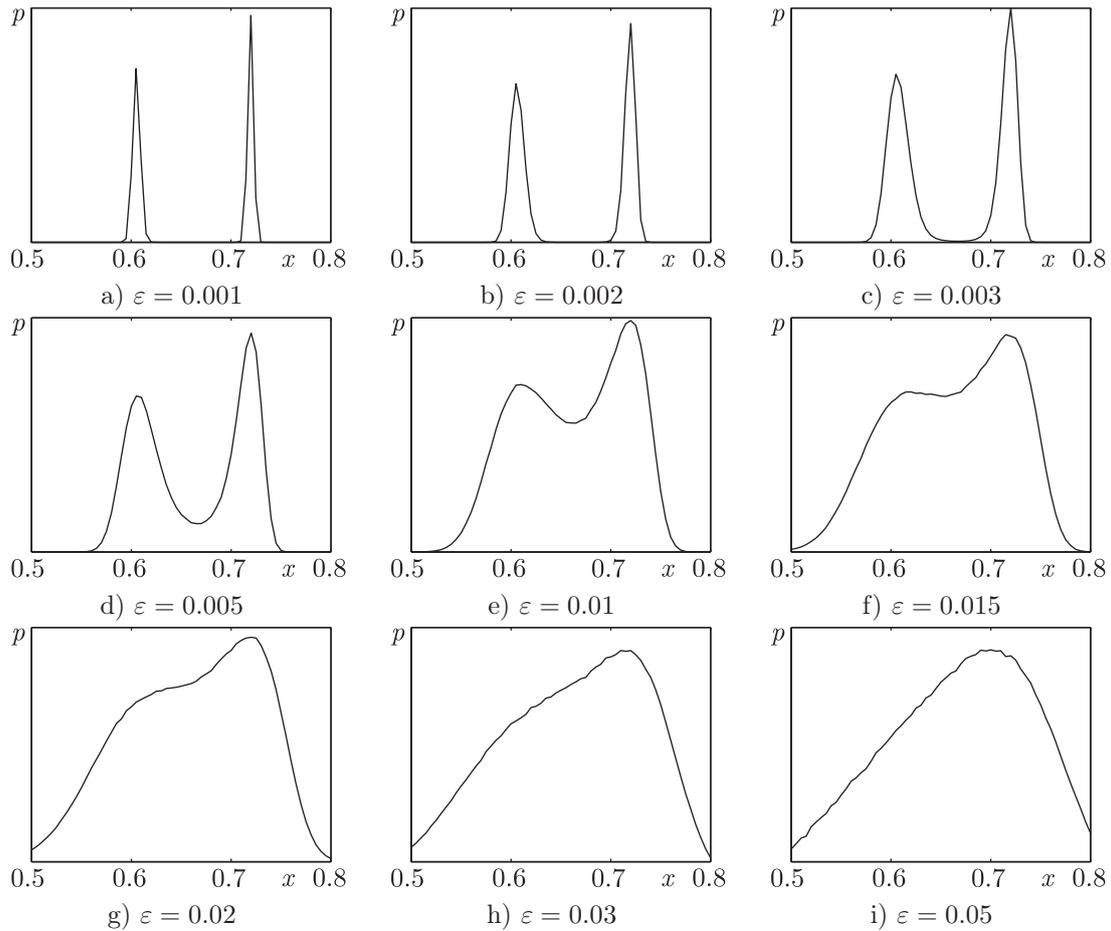


Рис. 5. График плотности вероятности  $p(x, \varepsilon)$  стохастического 2-цикла для  $\mu = 3.03$  при различных значениях интенсивности шума  $\varepsilon$ .

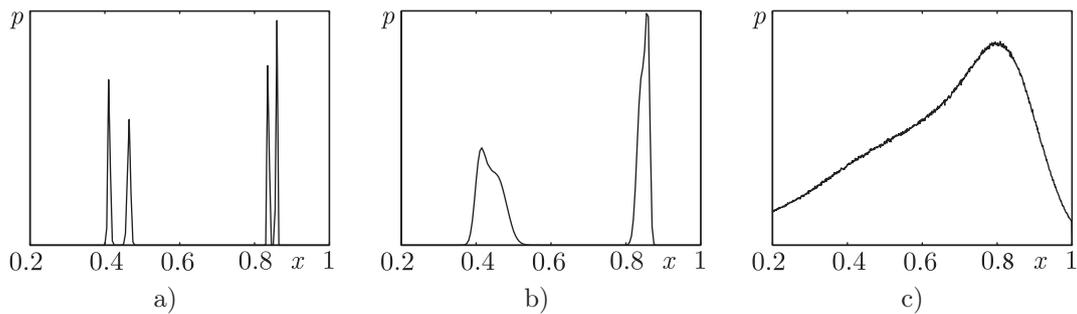


Рис. 6. Эмпирическая плотность вероятности для  $\mu = 3.46$  при  $\varepsilon = 0.0005$  (a), при  $\varepsilon = 0.004$  (b), при  $\varepsilon = 0.08$  (c).

при  $\varepsilon = 0.0005$  график  $p(x, \varepsilon)$  имеет четырехмодальную форму, при  $\varepsilon = 0.004$  — бимодальную, а при  $\varepsilon = 0.08$  — уже унимодальную. Это свидетельствует о том, что при изменении  $\varepsilon$  на интервале  $(0.0005; 0.004)$  происходит ОСБ перехода стохастического 4-цикла в 2-цикл и на интервале  $(0.004; 0.08)$  происходит старшая ОСБ перехода стохастического 2-цикла в 1-цикл.

Полученная зависимость бифуркационного значения  $\varepsilon^*$  первой ОСБ от параметра  $\mu$  на интервалах  $I_1, I_2, I_3$  представлена на рисунке 7. На каждом интервале структурной устойчивости функция  $\varepsilon^*(\mu)$  возрастает и быстро стабилизируется. Хорошо прослеживается самоподобие графика на интервалах структурной устойчивости: сохраняя общий вид, функция  $\varepsilon^*(\mu)$  пропорционально уменьшается.

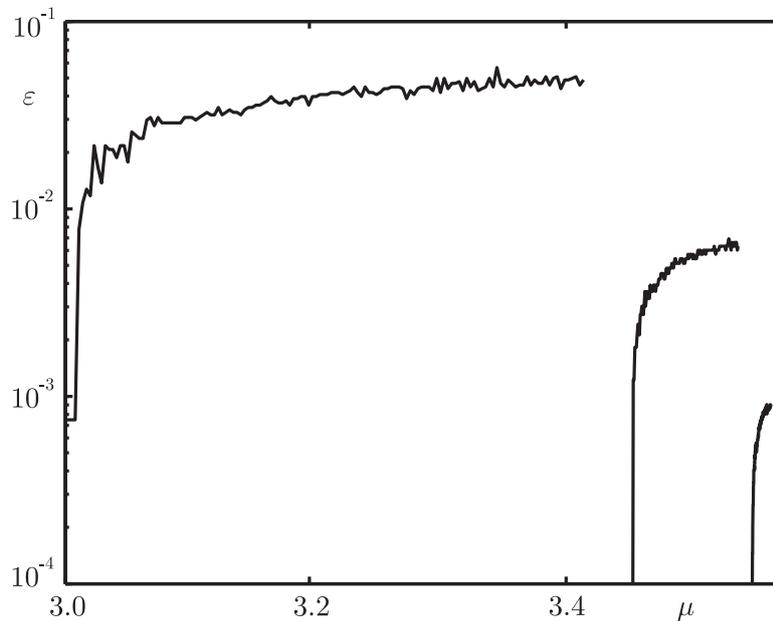


Рис. 7. Критические значения шума для системы Ферхюльста.

#### § 4. Анализ ОСБ с использованием аппарата функции стохастической чувствительности

Перейдем к теоретическому анализу ОСБ, позволяющему избежать больших затрат времени, связанных с численным моделированием.

##### 4.1. Аппарат функции стохастической чувствительности

Будем рассматривать случай, когда детерминированная система (2.1) при  $\varepsilon = 0$  имеет  $k$ -цикл  $\Gamma$ . Рассмотрим решение  $x_t^\varepsilon$  стохастической системы (2.1) с начальным условием  $x^\varepsilon = \bar{x}_0 + \varepsilon \xi_0$ . При малых  $\varepsilon$  чувствительность детерминированного решения  $\bar{x}_t$  к случайным возмущениям определяется величиной

$$v_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon}.$$

Для  $v_t$  справедлива система

$$v_{t+1} = a_t v_t + \sigma_t \xi_t, \quad (4.1)$$

где  $a_t = \frac{df}{dx}(\bar{x}_t)$ ,  $\sigma_t = \sigma(\bar{x}_t)$ ,  $v_0 = \xi_0$ . Стохастическая динамика последовательности  $v_t$  определяется изменением первых моментов  $m_t = E v_t$ ,  $V_t = E v_t^2$ . Для  $m_t$  и  $V_t$  справедливы

следующие уравнения:

$$m_{t+1} = a_t m_t, \quad (4.2)$$

$$V_{t+1} = a_t^2 V_t + \sigma_t^2 \quad (4.3)$$

с начальным условием  $m_0 = E\xi_0$ ,  $V_0 = E\xi_0^2$ .

Системы (4.1)–(4.3) имеют периодические коэффициенты:

$$a_{t+k} = a_t, \quad \sigma_{t+k} = \sigma_t.$$

Рассмотрим величину  $a = a_1 a_2 \dots a_k$ . Неравенство  $|a| < 1$  является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла  $\Gamma$ . При этом последовательность  $m_t$  стремится к нулю, а последовательность  $V_t$  сходится к периодической последовательности  $w_t$  ( $w_{t+k} = w_t$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (V_t - w_t) = 0.$$

Элементы последовательности  $w_t$  могут быть найдены [34] следующим образом. Вычисляется величина  $w_1$  по явной формуле

$$w_1 = \frac{q}{1 - a^2}, \quad q = \sigma_k^2 + a_k^2 \sigma_{k-1}^2 + \dots + (a_k \cdot \dots \cdot a_2)^2 \sigma_1^2,$$

а остальные  $w_i$  находятся рекуррентно

$$w_i = a_{i-1}^2 w_{i-1} + \sigma_{i-1}^2 \quad (i = 2 \dots k).$$

Условие  $|a| < 1$  гарантирует у системы (2.1) при малых шумах существование стационарно распределенного решения. Величины  $\varepsilon^2 w_t$  являются первым приближением дисперсии этого стационарно распределенного решения в окрестности точки  $\bar{x}_t$  цикла  $\Gamma$ .

Значения  $w_1, \dots, w_k$  для  $k$ -периодичной функции  $w_t$  характеризуют реакцию точек  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  цикла  $\Gamma$  на малые случайные воздействия системы (2.1). Функцию  $w_t$  будем называть *функцией стохастической чувствительности цикла*.

Для каждой точки  $\bar{x}_i$  функция стохастической чувствительности может быть найдена по явной формуле:

$$w_i = \frac{\sigma_{k+i-1}^2 + \sigma_{k+i-2}^2 a_{k+i-1}^2 + \dots + \sigma_i^2 \prod_{j=1; j \neq i}^k a_j^2}{1 - \prod_{j=1}^k a_j^2}. \quad (4.4)$$

На рисунке 8 представлено поведение функций стохастической чувствительности для системы Ферхюльста при  $\varepsilon = 0.0001$ . Сплошными линиями изображены значения чувствительности, полученные по формулам (4.4), а звездочками — данные численного моделирования. Следует отметить хорошее соответствие между теоретическим и эмпирическим описанием чувствительности.

## 4.2. Анализ ОСБ циклов системы Ферхюльста

Используем полученные значения  $w_i$  функции стохастической чувствительности для построения плотности вероятности. Будем аппроксимировать плотность вероятности



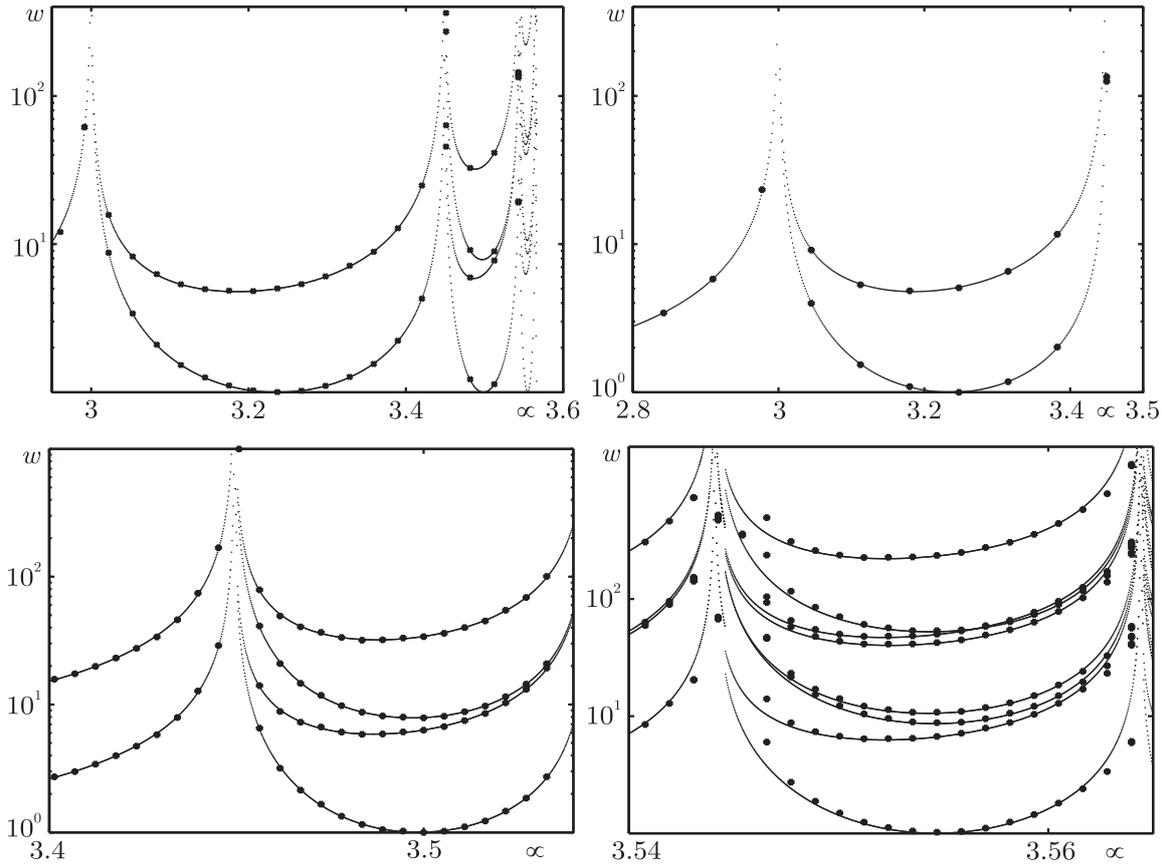


Рис. 8. Ветви функции стохастической чувствительности для различных интервалов структурной устойчивости системы Ферхюльста при  $\varepsilon = 0.0001$ .

стохастического  $k$ -цикла  $\Gamma$  системы (3.1) вокруг детерминированных состояний  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$  в виде линейной комбинации плотностей нормальных распределений:

$$p(x, \varepsilon) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\pi w_i}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2w_i \varepsilon^2}\right), \quad (4.5)$$

где  $w_i$  — значения функции чувствительности в точках детерминированного цикла. Эксперименты показали, что в случае малых гауссовых шумов, когда случайные состояния стохастического цикла концентрируются вблизи состояний детерминированного цикла, плотность вероятности соответствующих локальных (условных) распределений хорошо аппроксимируется нормальными распределениями. При этом средние значения этих условных распределений практически совпадают с состояниями детерминированного цикла  $\{\bar{x}_i\}$ , а дисперсии определяются значениями  $w_i$  функции стохастической чувствительности. В итоге, результирующая плотность равна среднему арифметическому этих локальных.

Для 2-цикла системы Ферхюльста ( $\mu = 3.03$ ) на рисунке 9 приведены графики плотности  $p(x, \varepsilon)$ , полученные с использованием (4.5) при значениях интенсивности шума  $\varepsilon = 0.016$ ,  $\varepsilon = 0.017$ . Функция  $p(x, \varepsilon)$  на рисунке 9а имеет три локальных экстремума, а ее график — бимодальную форму. Функция  $p(x, \varepsilon)$  на рисунке 9б имеет один экстремум, а ее график — унимодальную форму. Таким образом, точка обратной бифуркации принадлежит интервалу (0.016; 0.017). Механизм данной ОСБ наглядно представлен на рисунке 10, черным

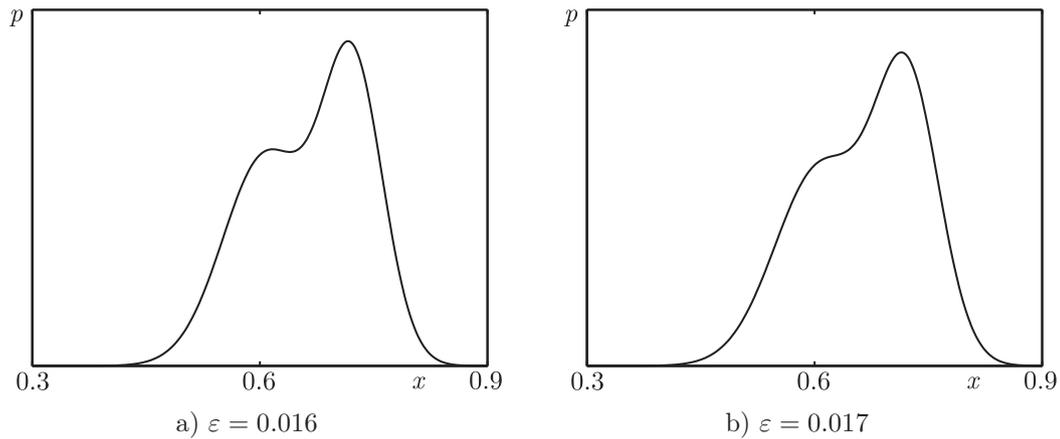


Рис. 9. Качественное изменение формы плотности вероятности  $p(x, \varepsilon)$  для стохастического 2-цикла ( $\mu = 3.03$ ).

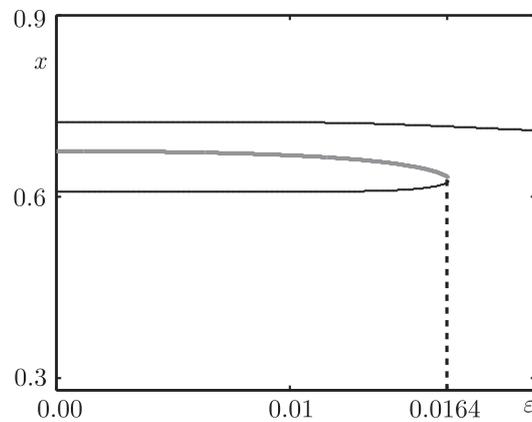


Рис. 10. Диаграмма обратной бифуркации 2-цикла ( $\mu = 3.03$ ) системы Ферхюльста.

цветом на диаграмме указаны  $x$ -координаты максимумов, а серым цветом —  $x$ -координата локального минимума. При значении  $\varepsilon^* = 0.0164$  локальный минимум сливается с одним из локальных максимумов, что и определяет точку бифуркации. При  $\varepsilon > 0.0164$  на диаграмме существует уже только одна точка локального максимума.

На рисунке 11 изображены графики аппроксимации плотности  $p(x)$  для  $\mu = 3.46$  при нескольких значениях интенсивности шума  $\varepsilon$ . На графике  $p(x)$  при  $\varepsilon = 0.001$  (рис. 11а) наблюдаются четко выраженные четыре всплеска. При  $\varepsilon = 0.004$  всплески в каждой из пар начинают сливаться (рис. 11б). При  $\varepsilon = 0.02$  наблюдаются лишь два всплеска (рис. 11с). Дальнейшее увеличение  $\varepsilon$  приводит к тому, что форма графика  $p(x)$  становится унимодальной — на рисунке 11д при  $\varepsilon = 0.08$  наблюдается только один всплеск. Такое поведение аппроксимации плотности вероятности соответствует ОСБ перехода исходного 4-цикла в 2-цикл и далее в 1-цикл при увеличении интенсивности шума  $\varepsilon$ .

Пусть  $\bar{\varepsilon}(\mu)$  — критическое значение интенсивности шума, отвечающее первой ОСБ, найденное с помощью ФСЧ. Функция  $\bar{\varepsilon}(\mu)$  является теоретической оценкой для  $\varepsilon^*(\mu)$ . Рассмотрим поведение функции  $\bar{\varepsilon}$  на интервале  $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ . На рисунке 12 график  $\bar{\varepsilon}(\mu)$  представлен черным цветом, а  $\varepsilon^*(\mu)$  — серым. Как видно из данного рисунка, график  $\bar{\varepsilon}(\mu)$  демонстрирует

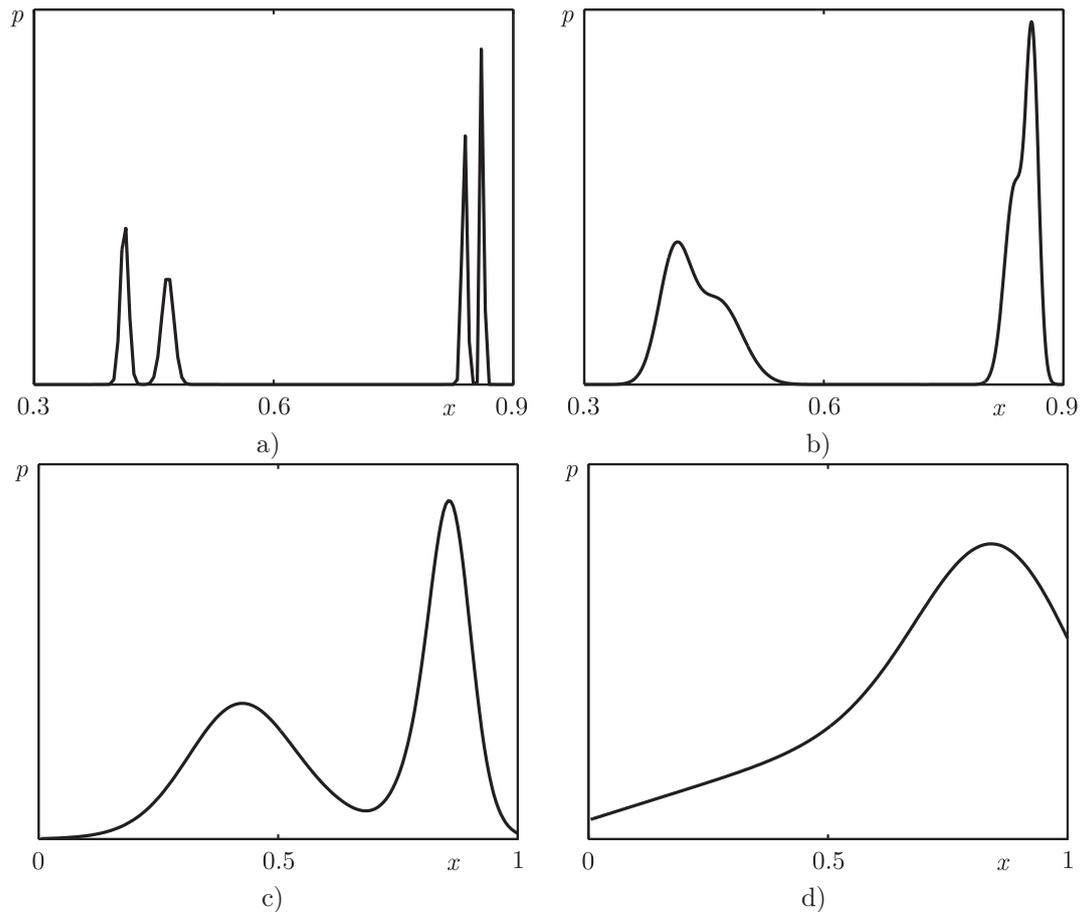


Рис. 11. Теоретическая аппроксимация плотности вероятности 4-цикла ( $\mu = 3.46$ ) при нескольких значениях интенсивности шума:  $\varepsilon = 0.001$  (a),  $\varepsilon = 0.004$  (b),  $\varepsilon = 0.02$  (c),  $\varepsilon = 0.08$  (d).

самоподобие на интервалах  $I_k$  ( $k = 1, \dots, \infty$ ). На каждом из этих интервалов функция  $\bar{\varepsilon}(\mu)$  сначала возрастает, а затем убывает.

Сравнивая поведение  $\bar{\varepsilon}(\mu)$  и  $\varepsilon^*(\mu)$ , можно сделать следующий вывод. Метод, основанный на функциях стохастической чувствительности, позволяет достаточно точно найти бифуркационные значения, отвечающие первой ОСБ на левых концах интервалов структурной устойчивости. На правой части интервалов наблюдается расхождение между эмпирической  $\varepsilon^*(\mu)$  и теоретической  $\bar{\varepsilon}(\mu)$  кривыми. Это расхождение вызвано возрастанием расстояния между соседними точками детерминированного цикла  $\Gamma$ , что приводит к ухудшению аппроксимации плотности вероятности, даваемой аппаратом функций стохастической чувствительности, изначально введенным для малой окрестности аттрактора в предположении малых возмущений.

## § 5. Модель Риккера

Рассмотрим модель популяционной динамики, предложенную У. Е. Риккером в 1954 году. Стохастическая система Риккера может быть представлена в следующем виде:

$$x_{t+1} = x_t e^{\mu(1-x_t)} + \varepsilon \xi_t, \quad (5.1)$$

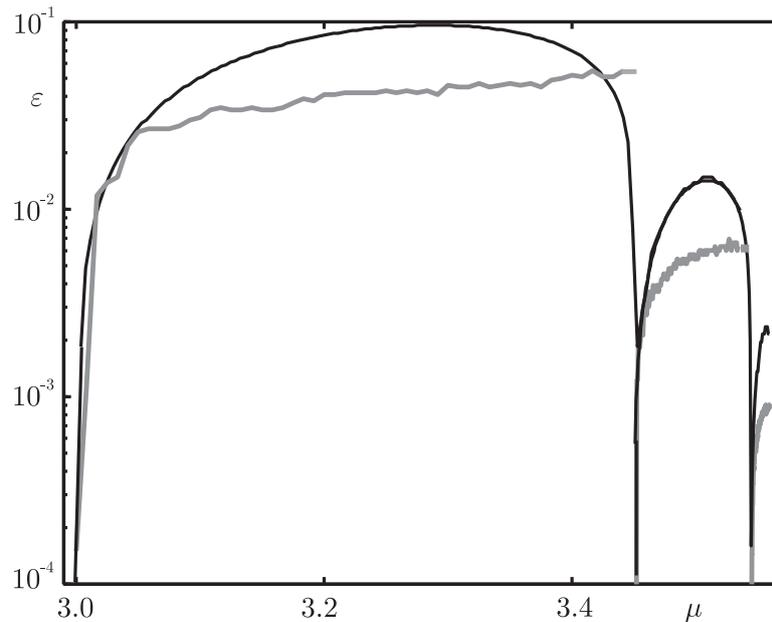


Рис. 12. Диаграмма первой ОСБ системы Ферхюльста: эмпирическая оценка (серый цвет), теоретическая оценка (черный цвет).

где  $\xi_t$  — независимые гауссовы случайные величины,  $E\xi_t = 0$ ,  $E\xi_t^2 = 1$ , а  $\varepsilon$  — интенсивность шумов.

При изменении параметра  $\mu$  от 1.6 до 3 детерминированная система (5.1) ( $\varepsilon = 0$ ) демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода. На интервале  $I_0 = (1.6; 2)$  в системе имеется одна устойчивая точка покоя  $\bar{x} = 1$ . На интервале структурной устойчивости  $I_1 \approx (2; 2.526)$  реализуется 2-цикл, на  $I_2 \approx (2.526; 2.656)$  система имеет 4-цикл, и т. д.

На рисунке 13 показано влияние возмущения разной интенсивности на аттракторы системы (5.1).

Используя технику анализа ОСБ, базирующуюся на применении аппарата функций стохастической чувствительности, для системы Риккера была получена диаграмма критических значений интенсивности ОСБ для первых трех интервалов структурной устойчивости (см. рис. 14).

На данном рисунке изображены как значения интенсивности первых, так и интенсивности старших ОСБ для циклов кратности 4 и 8. Следует отметить, что критические интенсивности, полученные для системы Риккера, схожи по своему поведению с результатами по системе Ферхюльста: в точках бифуркации достаточно малого шума для уменьшения кратности цикла, а в середине интервала, где детерминированная система более устойчива, необходима большая интенсивность возмущений.

## § 6. Заключение

В данной статье рассматриваются циклы дискретных нелинейных динамических систем в присутствии случайных возмущений. Под воздействием случайных возмущений система покидает детерминированный цикл и формирует вокруг его состояний некоторое вероятностное распределение. При малых шумах пики этого распределения имеют дельта-

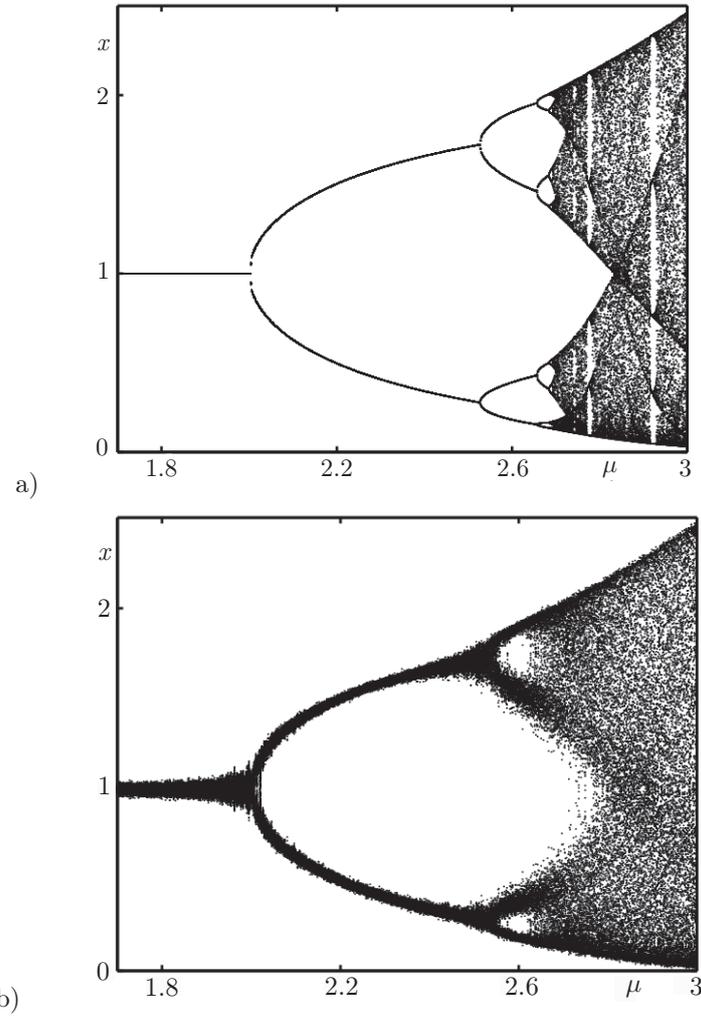


Рис. 13. Стохастическая бифуркационная диаграмма системы Риккера при  $\varepsilon = 0.00001$  (a),  $\varepsilon = 0.01$  (b).

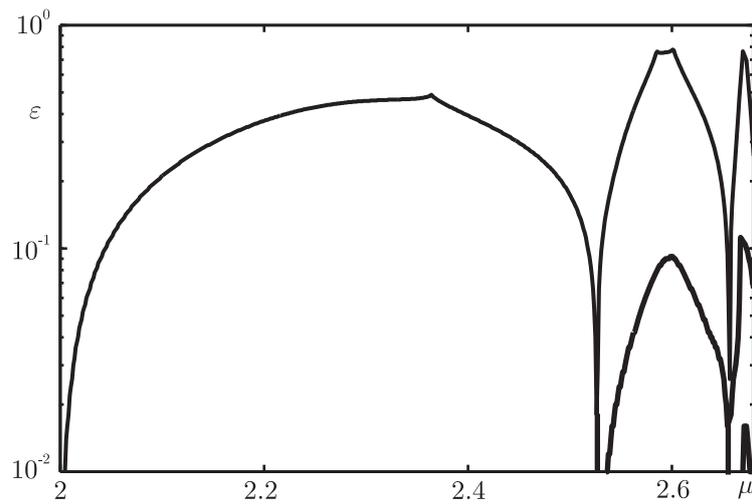


Рис. 14. Диаграмма ОСБ циклов системы Риккера.

образную форму и имеют максимумы вблизи соответствующих состояний детерминированного цикла. С ростом шума ширина пиков увеличивается, и при некотором бифуркационном значении интенсивности шума соседние пики сливаются в один — происходит обратная стохастическая бифуркация. В работе предлагается способ оценки бифуркационных значений соответствующих ОСБ, основанный на некоторой аппроксимации плотности распределения. Эта аппроксимация строится с помощью описанной в работе техники функции стохастической чувствительности. Конструктивные возможности и универсальный характер предложенного метода анализа ОСБ иллюстрируются на примере стохастических моделей Ферхюльста и Риккера.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ N 09-01-00026, N 09-08-00048, 10-01-96022урал, Федерального агентства по образованию N 2.1.1/2571, ФЦП 2009-1.1-112-049-028.

## Список литературы

- [1] Stratonovich R. L. Topics in the theory of random noise: Vol. 1. New York–London: Gordon and Breach, 1963. 292 p.
- [2] Horsthemke W., Lefever R. Noise-induced transitions. Berlin: Springer, 1984. 318 p.
- [3] Landa P. S., McClintock P. V. E. Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Phys. Rep., 2000, vol. 323, no. 1, pp. 1–80.
- [4] Lindner B., García-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // Phys. Rep., 2004, vol. 392, pp. 321–424.
- [5] Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance // Rev. Mod. Phys., 1998, vol. 70, pp. 223–287.
- [6] McDonnell M. D., Stocks N. G., Pearce C. E. M., Abbott D. Stochastic resonance: From supra-threshold stochastic resonance to stochastic signal quantization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. 448 p.
- [7] Matsumoto K., Tsuda I. Noise-induced order // J. Stat. Phys., 1983, vol. 33, pp. 757.
- [8] Gassmann F. Noise-induced chaos-order transitions // Phys. Rev. E, 1997, vol. 55, pp. 2215–2221.
- [9] Gao J. B., Hwang S. K., Liu J. M. When can noise induce chaos? // Phys. Rev. Lett., 1999, vol. 82, pp. 1132–1136.
- [10] Mayer-Kress G., Haken H. The influence of noise on the logistic model // J. Stat. Phys., 1981, vol. 29, pp. 149–171.
- [11] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [12] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. 544 с.
- [13] Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // Phys. A, 2000, vol. 278, pp. 126–139.
- [14] Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic dynamo model for subcritical transition // Phys. Rev. E, 2006, vol. 73, 066307, 5 p.
- [15] Arnold L. Random dynamical systems. Berlin: Springer, 1998. 586 p.



- [16] Lefever R., Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // *Fluctuations and sensitivity in nonequilibrium systems* (Austin, Tex., 1984) / W. Horsthemke and D. K. Kondepudi (Eds.). (Springer Proc. Phys., vol. 1.) Berlin: Springer, 1984. P. 143–149.
- [17] Lefever R., Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, pp. 1631–1634.
- [18] Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F. Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. A.*, 1987, vol. 36, pp. 834–841.
- [19] Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K. The stochastic Brusselator: Parametric noise destroys Hopf bifurcation // *Stochastic Dynamics* (Bremen, 1997) / H. Crauel and M. Gundlach (Eds.). New York: Springer, 1999. P. 71–92.
- [20] Namachchivaya N. Sri. Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // *J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 110, pp. 923–930.
- [21] Schenk-Hoppe K. R. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear Dynam.*, 1996, vol. 11, no. 3, pp. 255–274.
- [22] Leung H. K. Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model // *Phys. A*, 1998, vol. 254, pp. 146–155.
- [23] Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H. Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos Solitons Fractals*, 2009, vol. 39, pp. 72–82.
- [24] Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J. Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.*, 1981, vol. 46, pp. 933–935.
- [25] Crutchfield J. P., Farmer J., Huberman B. A. Fluctuation and simple chaotic dynamics // *Phys. Rep.*, 1982, vol. 92, pp. 45–82.
- [26] Кузнецов А. П., Капустина Ю. В. Свойство скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2000, т. 8, № 6, с. 78–87.
- [27] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Седова Ю. В. О свойствах скейлинга при воздействии шума в отображении окружности с числом вращения, заданным золотым средним // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2005, т. 13, № 5, с. 56–76.
- [28] Ряшко Л. Б., Стихин П. В. Обратные бифуркации в стохастической системе Ресслера // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2005, т. 13, № 4, с. 20–36.
- [29] Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynam. Systems Appl.*, 2002, vol. 11, pp. 293–310.
- [30] Ryagin M., Ryashko L. The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua’s circuit // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2004, vol. 14, pp. 3981–3987.
- [31] Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // *Chaos Solitons Fractals*, 2005, vol. 26, pp. 1437–1451.
- [32] Bashkirtseva I., Ryashko L. Constructive analysis of noise-induced transitions for coexisting periodic attractors of Lorenz model // *Phys. Rev. E*, 2009, vol. 79, 041106, 9 p.
- [33] Elaydi S. N. An introduction to difference equations. 2nd ed. Berlin: Springer, 1999. 427 p.
- [34] Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б., Цветков И. Н. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2009, т. 17, № 6, с. 74–85.