

## К вопросу о безотрывном движении шара на гладкой плоскости: II

**В. В. Васькин, О. С. Наймушина**

Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1  
vaskin@udsu.ru, osn@rcd.ru

*Получено 26 ноября 2010 г.*

В работе рассмотрено безотрывное движение конкретной модели неоднородного шара на гладкой плоскости и проанализирована зависимость области безотрывного движения в пространстве интегралов движения от величины смещения центра масс.

Ключевые слова: твердое тело, безотрывное движение по гладкой плоскости

**V. V. Vaskin, O. S. Naymushina**

### **On the motion of a ball without bouncing on a smooth plane: II**

The motion without bouncing (i.e. in constant contact) of a certain model of a non-homogeneous ball on a smooth plane is considered. The dependance of the domains of such motion on the shift of the center mass in the space of integrals of motion is analyzed.

Keywords: rigid body, motion without bouncing on a smooth plane  
MSC 2010: 37N15

В последнее время большой интерес проявляется к разработке повозок нетрадиционных конструкций, например, в виде шара [1, 2], приводящегося в движение за счет динамики внутренних масс. В связи с этим изучение динамики неоднородного шара на гладкой и шероховатой поверхности в отрывном и безотрывном режиме представляет несомненный интерес.

В предыдущей работе [3] нами был рассмотрен случай безотрывного движения осесимметричного шара со смещенным центром масс, однако рассмотрение было слишком общим.

В этой заметке хотелось бы дополнить результаты работы [3], применив их к конкретной механической модели. В качестве такой модели возьмем модель однородной сферической оболочки радиуса  $R$  и массы  $m_1$ , с помещенной внутри сосредоточенной массой  $m_2$ , находящейся на расстоянии  $r$  от центра шара ( $r < R$ ).

Моменты инерции такого шара относительно центра масс равны

$$A = \frac{2}{3}m_1R^2 + r^2 \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad C = \frac{2}{3}m_1R^2, \quad (1)$$

центр масс находится на расстоянии

$$b = r \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \left( b \leq R \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (2)$$

от центра шара.

Следующим важным шагом в исследовании является выбор основных единиц измерения: длины, времени, массы. В работе [3] за единицу длины было выбрано расстояние от центра шара до центра масс, однако в данной постановке такой выбор является неудачным, так как затрудняет исследование движения в зависимости от этого параметра.

Выберем за единицу длины радиус шара  $R$ , за единицу времени  $\sqrt{\frac{R}{g}}$ , за единицу массы — полную массу шара  $m$ . Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \tau = t \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \frac{b}{R} = d, \\ \frac{E}{mgR} = e, \quad \frac{p_\varphi}{mR\sqrt{gR}} = p, \quad \frac{p_\psi}{mR\sqrt{gR}}, \\ \frac{A}{mR^2} = a, \quad \frac{C}{mR^2} = c. \end{aligned} \quad (3)$$

Для  $a$  и  $c$  получаем выражения

$$a = \frac{2}{3}\mu + d^2 \frac{\mu}{1 - \mu}, \quad c = \frac{2}{3}\mu, \quad d \leq 1 - \mu, \quad (4)$$

где  $\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$  — относительная масса оболочки;  $d$  — безразмерное расстояние до центра масс.

Таким образом, мы добавили параметр  $d$ , от которого зависит задача и который можно независимо менять. Зависимость  $a$  и  $c$  от  $d$  при разных значениях  $\mu$  приведена на рисунке 1. Из графиков видно, что  $a$  всегда больше  $c$ . Приведенный в [3] пример с  $a = 1, c = 2$  соответствовал тяжелой пластине, помещенной в невесомую сферическую оболочку.

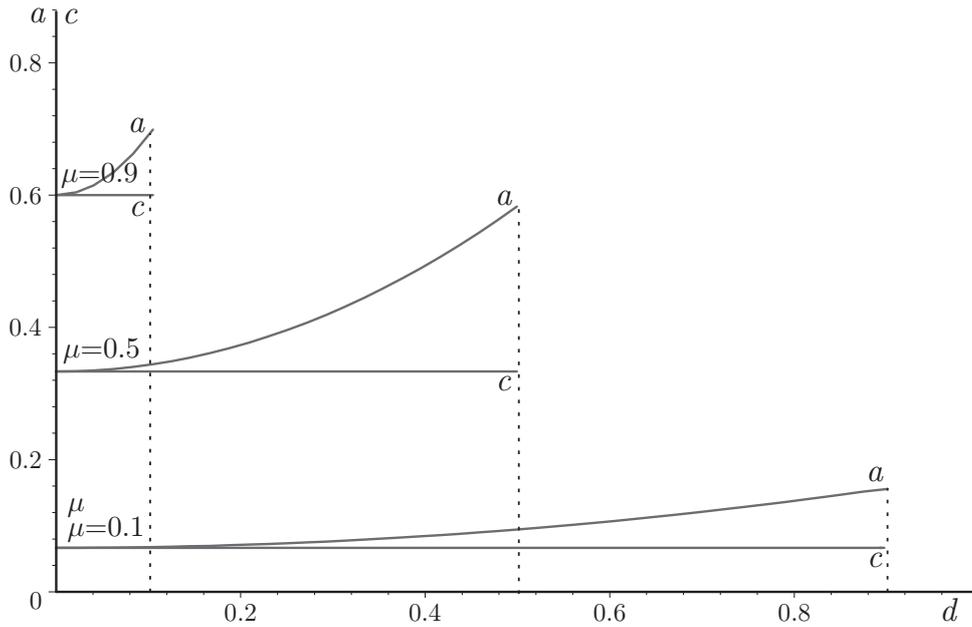


Рис. 1. Зависимости  $a$  и  $c$  от параметров  $d$  и  $\mu$  ( $k=2/3$ ).

В обозначениях (3), по сравнению с [3] правая часть принимает вид:

$$F(u) = \frac{(e - q^2/2c - du)(1 - u^2) - (p - uq)^2/2a}{a + d^2(1 - u^2)}, \tag{5}$$

где  $u = \cos \theta$ .

Область возможного движения (ОВД) определяется условием

$$F_1(u) = \left( e - \frac{q^2}{2c} - du \right) (1 - u^2) - \frac{(p - uq)^2}{2a} \geq 0. \tag{6}$$

Условие безотрывности движения (сила реакции положительна):

$$N_1(u) = cd^2(a^2 + dpq)u^2 - d(a^2(2ec - q^2) + cq^2(a + d^2) + d^2cp^2)u + c(a + d^2)(a^2 + dpq) \geq 0. \tag{7}$$

Граница области возможного движения (режим регулярной прецессии) определяется функцией  $F_2(u)$ :

$$F_2(u) = \frac{dF_1(u)}{du} = 3du^2 + \left( q^2 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) - 2e \right) u - d + \frac{pq}{a}. \tag{8}$$

Уравнения  $F_1(u) = 0$  и  $F_2(u) = 0$  параметризуют границу области безотрывного движения — поверхность регулярной прецессии:

$$\begin{aligned} p &= p_1(t, s) = \sqrt{da} ((1 + \cos t) \operatorname{ch} s + (1 - \cos t) \operatorname{sh} s), \\ q &= q_1(t, s) = \sqrt{da} ((1 + \cos t) \operatorname{ch} s - (1 - \cos t) \operatorname{sh} s), \\ e &= e_1(t, s) = -\frac{d}{2c} [(a - c)(\operatorname{sh} 2s \sin^2 t - \operatorname{ch} 2s \cos^2 t) - \\ &\quad - (a + c)(\operatorname{ch} 2s + 2 \cos t)], \\ &0 \leq t \leq \pi, \quad -\infty < s < \infty. \end{aligned} \tag{9}$$



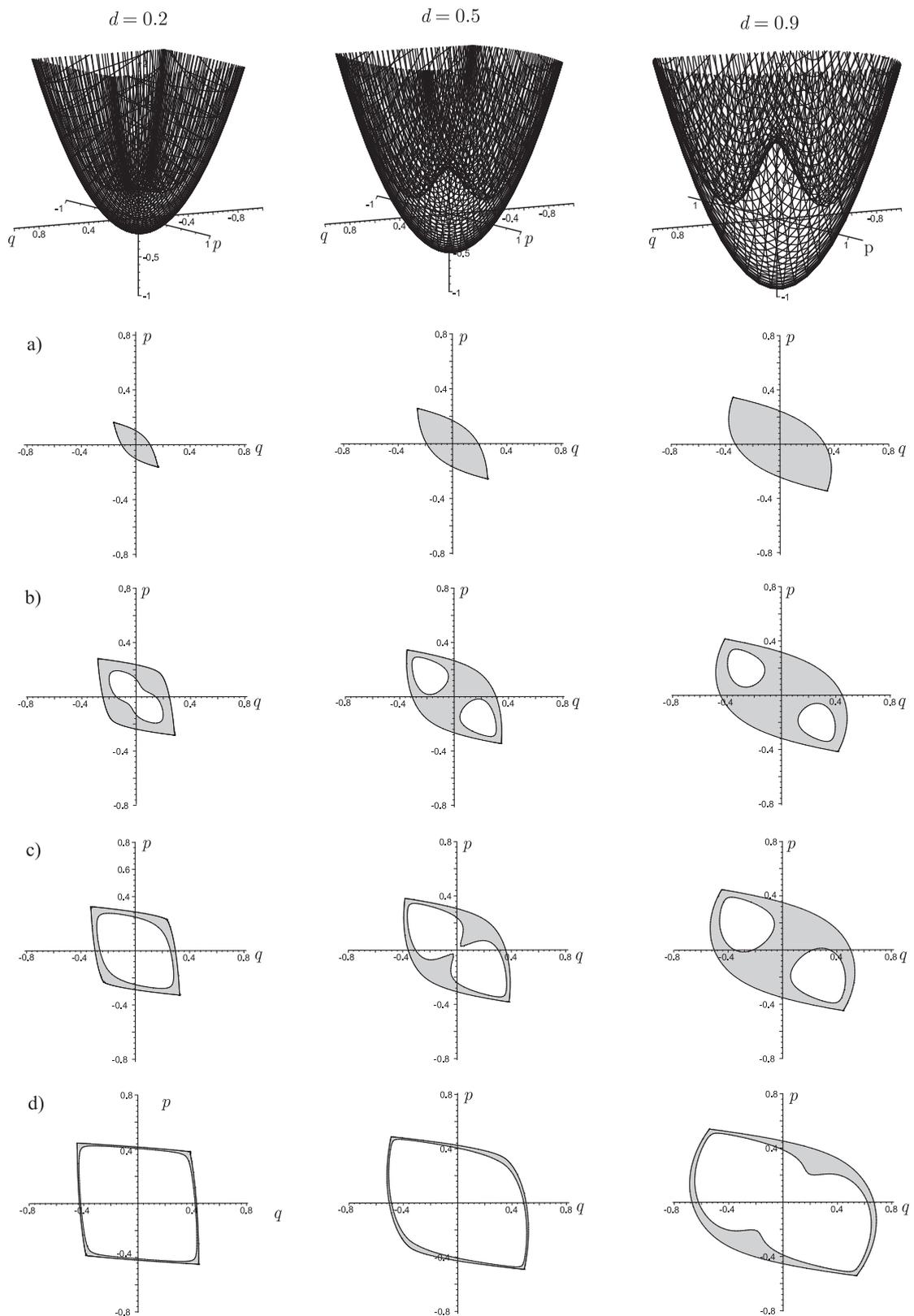


Рис. 2. Общий вид ограничивающих поверхностей (9) и (10) и их сечения при различных уровнях энергии: а)  $e = 0$ , б)  $e = 0.4$ , в)  $e = 0.6$ , г)  $e = 1.3$ .

Уравнения  $F_1(u) = 0$  и  $N_1(u) = 0$  параметризуют границу безотрывного движения со стороны отрыва:

$$\begin{aligned} p &= p_2(t, s) = \frac{a}{\sqrt{d}} \frac{((1 + \cos t) \operatorname{sh} s + (1 - \cos t) \operatorname{ch} s)}{\sin t}, \\ q &= q_2(t, s) = \frac{a}{\sqrt{d}} \frac{((1 + \cos t) \operatorname{sh} s - (1 - \cos t) \operatorname{ch} s)}{\sin t}, \\ e &= e_2(t, s) = -\frac{1}{2cd \sin^2 t} [(a - c)(a \operatorname{sh} 2s \sin^2 t - a \operatorname{ch} 2s \cos^2 t) - \\ &\quad - (a + c)a \operatorname{ch}(2s) + 2 \cos t (a^2 - cd \sin^2 t)], \\ &0 \leq t \leq \pi, \quad -\infty < s < \infty. \end{aligned} \tag{10}$$

Полученные в явном аналитическом виде параметрические уравнения поверхностей (6) и (7) позволяют легко анализировать зависимости их от различных параметров.

Здесь в качестве примера мы рассмотрим шаровую оболочку с  $\mu = 0.1$ , а 0.9 общей массы сосредоточено на расстоянии  $r = \frac{d}{1 - \mu}$  от центра шара. С изменением  $d$  момент  $c = \frac{1}{15}$  не меняется, а момент инерции  $a = \frac{1}{15} + \frac{d^2}{9}$ .

На рисунке 2 приведены общий вид ограничивающих поверхностей в пространстве интегралов движения  $(p, q, e)$ . Внешняя поверхность есть граница ОВД (поверхность параметров регулярной прецессии), внутренняя граница — поверхность параметров отрыва для разных значений ( $d = 0.2, 0.5, 0.9$ ). Ниже приведены сечения этих поверхностей плоскостями постоянной энергии  $e$ , серая область соответствует областям безотрывного движения.

Качественно вид этих поверхностей совпадает с приведенными в работе [3] при значениях параметров в новых единицах измерения  $a = 0.8$ ,  $c = 1.6$  и  $d = 0.447$ , что соответствовало тяжелой тонкой пластине в невесомой сферической оболочке.

Довольно очевидно, что при малых  $d$  (смещение центра масс мало) поверхность отрыва находится высоко и область безотрывного движения определяется границей ОВД. Минимальная энергия, при которой начинается отрыв шара от плоскости, находится при  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$ , то есть шар катится без вращений (как диск). С увеличением  $d$  минимальная энергия отрыва понижается и находится при  $d > \frac{a}{2\sqrt{c}}$  в точке  $p_0 = -q_0 = \pm \sqrt{\frac{a(2d\sqrt{c} - a)}{d}}$  и равна  $e_0 = -d + \frac{a}{2d} \left(1 - \frac{a}{c}\right) + \frac{2a}{\sqrt{c}}$ .

С увеличением энергии область безотрывного движения располагается вблизи границы ОВД (вблизи режима регулярной прецессии). Это является довольно очевидным фактом, так как при регулярной прецессии центр масс находится на постоянной высоте.

## Дискуссия

В недавно вышедшей книге [4] также рассматривается вопрос о безотрывном движении твердых тел на гладкой плоскости, но, к сожалению, анализ сводится к рассмотрению только осесимметричного шара со смещенным центром масс. Сделаем несколько замечаний по этой работе. Анализ характера движения от интегралов движения подменяется анализом от начальных условий, что является неполным и требует проведения дополнительного анализа. Многочисленные леммы, утверждения и теоремы, имеющие иногда тривиальный

характер, не облегчают, а только усложняют понимание. Связанная с анализом начальных условий некорректная классификация областей (например, «обнуление и отрыв в начальный момент», «обнуление и отрыв не в начальный момент») вызывает некоторое недоумение и находится в противоречии с теоремой о непрерывной зависимости решений от начальных условий.

Работа выполнена при поддержке гранта «Ведущие научные школы» (грант НШ-8784.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.740.11.0195), гранта правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУВПО (№ 11.G34.31.0039).

## Список литературы

- [1] Crossley V. A. A literature review on the design of spherical rolling robots. Pittsburgh, PA, 2006, 6 p.
- [2] Laplante J.-F., Masson P., Michaud F. Analytical longitudinal and lateral models of a spherical rolling robot. Technical report, Laborius, Department of Electrical and Computer Engineering, Universite de Shebroke, Canada. 2007. 6 p.
- [3] Васькин В. В., Наймушина О. С. К вопросу о безотрывном движении шара на гладкой плоскости // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 625–632.
- [4] Розенблат Г. М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: Либроком, 2010. 208 с.