УДК 531.01

Лагранжева механика и сухое трение

В. В. Козлов
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8
kozlov@pran.ru

Получено 29 октября 2010 г.

Сформулирован обобщенный закон сухого трения Амонтона для общих лагранжевых систем со связями. При заменах обобщенных координат компоненты силы сухого трения преобразуются по ковариантному закону, а сама сила удовлетворяет условию Пенлеве. В частности, давление системы на связь не зависит от тензора анизотропного трения. Такой подход проясняет парадоксы сухого трения Пенлеве. В качестве примера получены общие формулы для силы трения скольжения, а также моментов трения качения и верчения твердого тела, соприкасающегося с поверхностью.

Ключевые слова: лагранжева система, анизотропное трение, условие Пенлеве

V. V. Kozlov

Lagrangian mechanics and dry friction

A generalization of Amantons' law of dry friction for constrained Lagrangian systems is formulated. Under a change of generalized coordinates the components of the dry-friction force transform according to the *covariant rule* and the force itself satisfies the Painlevé condition. In particular, the pressure of the system on a constraint is independent of the anisotropic-friction tensor. Such an approach provides an insight into the Painlevé dry-friction paradoxes. As an example, the general formulas for the sliding friction force and torque and the rotation friction torque on a body contacting with a surface are obtained.

Keywords: Lagrangian system, anisotropic friction, Painlevé condition
MSC 2010: 70F40

§ 1. Введение

Законы сухого трения можно считать твердо установленными в случае скольжения твердых тел. Согласно Амонтону, сила трения равна

$$-\mu|N|\frac{v}{|v|}, \tag{1.1}$$

где v — скорость, N — давление, μ — коэффициент трения. Если же тело вначале покоилось, а приложенная сила не превосходит $\mu|N|$, то тело останется в покое.

Более общо, трение может быть анизотропным (то есть зависеть от направления скорости). В этом случае (1.1) заменяется более общим выражением

$$-|N|\frac{\Phi v}{|v|}, \tag{1.2}$$

где Φ — оператор трения — неотрицательно определен: $(\Phi v,\, v) \geqslant 0$ для всех v (см. [1]). В общем случае оператор Φ, конечно, зависит еще и от положения скользящего тела.

Законы сухого трения при произвольном движении твердого тела (когда присутствуют качение и верчение тела) еще в полной мере не установлены. Имеется только продвинутый анализ трения верчения, находящийся в качественном согласии с экспериментом [2].

Считается, что при описании движения твердых тел с учетом односторонних связей и сил сухого трения возможны парадоксальные ситуации, когда соответствующая задача Коши не имеет решений. Эти парадоксы открыты Пенлеве и изложены в его книге [3] (относительно современного состояния вопроса см. [4]). Попытки разрешения парадоксов Пенлеве привели к новым важным идеям в теории реализации связей в механике (см. [5, 6]). На наш взгляд, парадоксы Пенлеве связаны в том числе и с неточным использованием законов сухого трения при описании динамики систем со многими степенями свободы и неудерживающими связями.

Предлагается посмотреть на законы сухого трения с более общей точки зрения лагранжевой механики. С одной стороны, это представляет самостоятельный интерес, а с другой — позволит уточнить закон Амонтона при описании динамики твердых тел с односторонними связями. При таком подходе существенное значение имеет свойство ковариантности выражения для силы сухого трения, характерное для уравнений динамики в лагранжевом формализме.

§ 2. Обобщенный закон Амонтона

Пусть $x = (x^1,\, \ldots,\, x^n)$ — обобщенные координаты механической системы, $T(\dot{x},\, x,\, t)$ — ее кинетическая энергия, $Q(\dot{x},\, x,\, t)$ — внешняя (активная) сила, действующая на систему, $f(x) \geqslant 0$ — односторонняя связь. Все эти функции считаются гладкими. Кроме того, матрица вторых производных

$$A = \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^j} \right\| \tag{2.1}$$

положительно определена, а функция f не имеет критических точек на гиперповерхности связи $\{x\colon f(x) = 0\}$. Совокупность величин (2.1) образует дважды ковариантный тензор — «тензор инерции», который можно рассматривать как *метрический тензор* в точке x в момент времени t.

Считая поверхность $\{f(x)=0\}$ «шероховатой», запишем уравнения движения со множителем связи:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + F. \tag{2.2}$$

Здесь F — сила сухого трения, которую следует еще доопределить. При движении по поверхности к дифференциальному уравнению (2.2) следует добавить алгебраическое соотношение

$$f(x) = 0. \tag{2.3}$$

Замечание. Большинство авторов включают силу трения в реакцию связи, считая тем самым связи неидеальными: работа реакций на возможных перемещениях системы, вообще говоря, отлична от нуля. Но тогда при выводе уравнений движения уже нельзя использовать принцип Даламбера–Лагранжа, справедливый только для систем с идеальными связями. Наша точка зрения состоит в том, что связи по-прежнему следует считать «идеальными» (то есть справедлив принцип Даламбера–Лагранжа), а силу трения надо отнести к «активным» силам, доопределив их в соответствии с физической природой трения.

Слагаемое $R=\{R_i\}$, где

$$R_i = \lambda\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{2.4}$$

— реакция связи. Ее величина $|R|$ равна давлению, которое оказывает система на связь (2.3). Однако эта величина нуждается в строгом определении. Сила (2.4) — ковектор, и величина $|R|$ зависит от выбора метрики в линейном кокасательном пространстве в точке x и в момент времени t. Имея естественную метрику (2.1), мы можем положить

$$|R|^2 = \lambda^2\left(\frac{\partial f}{\partial x},\, A^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{2.5}$$

Скобка обозначает свертку ковектора и вектора (или, на более инвариантном языке, значение ковектора на векторе). Отметим, что компоненты одновалентного тензора

$$A^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}$$

при заменах переменных преобразуются по контрвариантному закону.

Теперь мы можем определить закон сухого трения:

$$F = -|R|\frac{\Phi\dot{x}}{|\dot{x}|}, \tag{2.6}$$

где $|\dot{x}|^2 = (A\dot{x},\, \dot{x})$, а $\Phi = \|\Phi_{ij}\|$ — тензор сухого трения. Ясно, что наборы чисел

$$\Phi_{ij}\dot{x}^j$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование) образуют ковектор; этому условию и должны удовлетворять компоненты силы как ковектора. Тензор Φ, конечно, может зависеть от точки конфигурационного пространства x и времени. Таким образом, закон (2.6) задает *анизотропное* сухое трение. Забегая немного вперед, заметим, что изотропное трение отвечает случаю, когда

$$\Phi = kA, \tag{2.7}$$

где k — «приведенный» коэффициент сухого трения.

Оператор трения Φ должен удовлетворять еще двум важным условиям. Во-первых,

$$(\Phi\dot{x},\, \dot{x}) \geqslant 0 \tag{2.8}$$

для всех скоростей $\dot{x}$ (при всех значениях x и t). Это естественное свойство отвечает условию рассеяния энергии при добавлении трения. Неравенство (2.8) эквивалентно условию неотрицательности всех главных диагональных миноров симметричной матрицы $\Phi + \Phi^T$ (критерий Сильвестра). Символ «T» означает транспонирование матрицы.

Во-вторых,

$$(\Phi^T A^{-1})\frac{\partial f}{\partial x} = \rho\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.9}$$

при некотором $\rho \in \mathbb{R}$. Это условие также должно выполняться для всех x и t. Соотношение (2.9) заведомо выполнено для изотропного трения (2.7), если положить $\rho = k$.

Механический смысл условия (2.9) мы обсудим в § 4. А сейчас покажем, что при его выполнении из системы уравнений (2.2) и (2.3) можно однозначно найти множитель Лагранжа как функцию от $\dot{x}$, x и t. Более того, множитель λ не будет зависеть от компонент тензора трения. Таким образом, не решая уравнений движения, мы находим реакцию R как функцию состояния системы и времени и тем самым уже окончательно задаем закон сухого трения (2.6).

Действительно, при $\dot{x} \neq 0$ уравнение (2.2) можно представить в виде

$$A\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \nu\Phi\dot{x}, \tag{2.10}$$

где X — известная вектор-функция от состояния $\dot{x}$, x и времени t, а ν — пока неизвестный скалярный коэффициент. При движении на связи $\lambda > 0$. Следовательно, согласно (2.5), $\nu = \lambda\psi$, где ψ — известный скалярный множитель. Из (2.10) имеем

$$\ddot{x} = A^{-1}X + \lambda A^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \psi\Phi\dot{x}\right). \tag{2.11}$$

С другой стороны, дважды дифференцируя (2.3) по t, получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\, \ddot{x}\right) = Z, \tag{2.12}$$

где Z — известная функция от $\dot{x}$, x и t.

Подставляя (2.11) в (2.12), получаем алгебраическое уравнение относительно множителя Лагранжа:

$$\lambda\left(A^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \psi\Phi\dot{x}\right],\, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = Z - \left(\frac{\partial f}{\partial x},\, A^{-1}X\right). \tag{2.13}$$

Далее, по условию (2.9),

$$\left(A^{-1}\Phi\dot{x},\, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\Phi^T A^{-1}\frac{\partial f}{\partial x},\, \dot{x}\right) = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial x},\, \dot{x}\right) = 0$$

согласно уравнению связи. Остается заметить, что

$$\left(A^{-1}\frac{\partial f}{\partial x},\, \frac{\partial f}{\partial x}\right) > 0$$

ввиду положительной определенности оператора инерции и предположения о регулярности связи. Согласно (2.13), множитель Лагранжа λ становится известной функцией от состояния системы и времени. Но тогда однозначно определяется и сила трения:

$$F = \lambda\psi\Phi\dot{x}, \quad \psi^2 = \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\, A^{-1}\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{(\dot{x},\, A\dot{x})}.$$

§ 3. Принципы покоя и движения

Пусть в некоторый момент времени t_0 система покоится ($x = x_0$, $\dot{x} = 0$). В каком случае она начнет движение при $t > t_0$? Можно сформулировать различные принципы покоя и движения систем с сухим трением. Поскольку сила сухого трения имеет сингулярность при $\dot{x} = 0$, то эти принципы не вытекают непосредственно из уравнений движения. Их следует считать неотъемлемой частью закона Амонтона.

Обычно исходят из следующего принципа: сила трения покоя по величине не превосходит возможной силы трения того же направления при движении системы (см., например, [7, 8, 4]). В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x} = V, \quad \dot{V} = f - \frac{\Phi v}{|v|}, \quad x,\, v \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

которая описывает движение системы в евклидовом пространстве с сухим трением. В равновесном состоянии $f = -F$, где F — сила трения покоя. Возможная сила трения при движении определяется из равенства

$$\frac{\Phi v}{|v|} = \mu F, \quad v \neq 0,$$

где $\mu > 0$ — некоторый вещественный множитель. Отсюда

$$v = \mu|v|\Phi^{-1}F.$$

Следовательно, соответствующая сила сухого трения при движении равна

$$\frac{\Phi v}{|v|} = \frac{F}{\sqrt{(\Phi^{-1}F,\, \Phi^{-1}F)}}.$$

Учитывая соотношение $F = -f$, приходим к следующему утверждению: если

$$(\Phi^{-1}f,\, \Phi^{-1}f) \leqslant 1, \tag{3.2}$$

то система остается в покое, и если

$$(\Phi^{-1}f,\, \Phi^{-1}f) > 1, \tag{3.3}$$

то система с сухим трением приходит в движение. Эти условия установлены в [4, 7, 8] при $n = 2$.

Ниже формулируется другой принцип покоя и движения, применимый для систем самого общего вида. Перепишем уравнение (2.11) в более компактном виде:

$$\ddot{x} = q + \varphi\frac{\widetilde{\Phi}\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad \widetilde{\Phi} = A^{-1}\Phi. \tag{3.4}$$

Здесь q и φ — известные гладкие функции от $\dot{x}$, x и t. Представим уравнение второго порядка (3.4) в виде системы из $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = q + \varphi\frac{\widetilde{\Phi}v}{|v|} \tag{3.5}$$

и перейдем к новому времени τ, полагая

$$d\tau = dt/|v|.$$

Тогда система (3.5) будет иметь следующий вид:

$$x' = v|v|, \quad v' = q|v| + \varphi\widetilde{\Phi}v. \tag{3.6}$$

Ее правые части, очевидно, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица. Следовательно, для системы (3.6) справедлива теорема существования и единственности решений. Ясно, что каждое из состояний

$$x = x_0, \quad v = 0 \tag{3.7}$$

будет положением равновесия системы (3.6).

Предложим следующий *дополнительный* принцип, выражающий условия покоя и движения при сухом трении: если равновесие (3.7) системы (3.6) устойчиво по Ляпунову, то рассматриваемая система с сухим трением будет покоиться, а если это равновесие неустойчиво, то система придет в движение.

Для иллюстрации этого принципа сначала рассмотрим простейший пример одномерного скольжения, описываемый дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = f - \frac{\mu\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь f — постоянная внешняя сила, а $\mu > 0$ — коэффициент трения. Система (3.6) в этой задаче имеет вид

$$x' = v|v|, \quad v' = f|v| - \mu v = \begin{cases} -(\mu - f)v, & v > 0, \\ -(\mu + f)v, & v < 0. \end{cases}$$

Если $|f| < \mu$, то равновесие (3.7) устойчиво: скорость v экспоненциально быстро стремится к нулю, а значит, и координата x также получает малое приращение. Наоборот, при $|f| > \mu$ имеет место экспоненциальная неустойчивость, поэтому это неравенство выражает условие начала движения. Если $|f| = \mu$, то равновесие (3.7) снова неустойчиво (правда, не экспоненциально). Согласно нашему принципу, при $|f| = \mu$ система начинает движение, хотя обычно считается, что сохраняется состояние покоя. Впрочем, это различие не имеет никакого практического значения.

Больший интерес представляет применение нашего принципа к системе (3.1) с постоянной силой f. Будем искать решение второго уравнения соответствующей системы (3.6)

$$v' = f|v| - \Phi v \tag{3.8}$$

в виде экспоненты

$$v = \xi e^{\lambda\tau}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Вектор ξ удовлетворяет следующей нелинейной алгебраической системе уравнений

$$\Phi\xi + \lambda\xi = f|\xi|.$$

Полагая $\eta = \xi/|\xi|$, получим

$$(\Phi + \lambda I)\eta = f,$$

I — единичный оператор. Если оператор $\Phi + \lambda I$ обратим, то

$$\eta = (\Phi + \lambda I)^{-1} f,$$

причем «спектральный» параметр λ должен удовлетворять соотношению $(\eta, \eta) = 1$.

Если выполнено условие (3.3), то существует положительное λ и, следовательно, тривиальное решение системы (3.8) экспоненциально неустойчиво. Для доказательства положим

$$\zeta(\lambda) = ((\Phi + \lambda I)^{-1} f, (\Phi + \lambda I)^{-1} f).$$

Эта функция, очевидно, непрерывна при $\lambda \geqslant 0$, причем $\zeta(0) > 1$ согласно условию (3.3). С другой стороны, $\zeta(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. Следовательно, $\zeta(\lambda) = 1$ при некотором $\lambda > 0$. Что и требовалось.

Покажем, что если условие (3.2) заменить строгим неравенством, то система (3.1) останется в состоянии покоя в соответствии со сформулированным выше нашим принципом. Для этого надо сначала доказать устойчивость тривиального равновесия системы (3.8). Воспользуемся функцией Ляпунова

$$W = \frac{1}{2}(\Phi^{-1} v, v).$$

Она положительно определена, а ее производная в силу системы (3.8) равна

$$|v|[(v, a) - |v|], \tag{3.9}$$

где $a = \Phi^{-1} f$. Согласно неравенству Коши,

$$(v, a) \leqslant \sqrt{(v, v)}\sqrt{(a, a)}.$$

Следовательно, функция (3.9) не превосходит

$$(v, v)(|a| - 1),$$

что отрицательно при $v \neq 0$ согласно неравенству $(a, a) < 1$. Таким образом,

$$W' \leqslant -\rho(v, v), \quad \rho = 1 - |a| > 0.$$

Следовательно, по теореме Ляпунова, равновесие $v = 0$ системы (3.8) асимптотически устойчиво. Более того, функция $\tau \mapsto v(\tau)$ экспоненциально быстро стремится к нулю при $\tau \to +\infty$. Поскольку $x' = v|v|$, то при возмущении система мало отклоняется от своего начального положения.

§ 4. Трение по Пенлеве

Обсудим теперь смысл условия (2.9). Для этого перепишем уравнение движения в виде (2.11):

$$\ddot{x} = A^{-1}X + \lambda A^{-1}\frac{\partial f}{\partial x} + \nu A^{-1}\Phi\dot{x}.$$

Здесь λ и ν — скалярные функции. Если Q — сила (ковектор), то $A^{-1}Q$ будет уже вектором. Его условно можно назвать силой-вектором.

Условие (2.9) состоит в том, что сила-вектор сухого трения (2.6) лежит (как и вектор скорости $\dot{x}$) в касательной плоскости к поверхности связи $\{f = 0\}$.

Действительно,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\, A^{-1}\Phi\dot{x}\right) = \left(\Phi^T A^{-1}\frac{\partial f}{\partial x},\, \dot{x}\right) = 0$$

для всех $\dot{x}$ из касательной плоскости

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\, \dot{x}\right) = 0$$

тогда и только тогда, когда выполнено (2.9).

К условию (2.9) можно подойти по-другому, обобщая определение силы трения, данное Пенлеве для случая, когда конфигурационное пространство является евклидовым пространством [3]. С этой целью введем в фиксированный момент времени и в данном положении линейное пространство возможных перемещений (скоростей) $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\, \xi\right) = 0. \tag{4.1}$$

Пусть Λ — сумма силы реакции и неизвестной пока силы трения. Рассмотрим ее работу на возможных перемещениях: (Λ, ξ). Этот линейный функционал на пространстве всех возможных перемещений (4.1) не определяет однозначно силу Λ. Действительно, если

$$(\Lambda', \xi) = (\Lambda, \xi)$$

для всех ξ, удовлетворяющих (4.1), то

$$\Lambda' = \Lambda + \rho\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Среди сил (4.2) найдем минимальную по величине. Другими словами, найдем точку минимума квадратичной формы $(A^{-1}\Lambda', \Lambda')/2$:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{1}{2}(A^{-1}(\Lambda + \rho\eta),\, (\Lambda + \rho\eta)) = 0, \quad \eta = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Отсюда

$$(A^{-1}\Lambda, \eta) + \rho(A^{-1}\eta, \eta) = 0,$$

и, следовательно,

$$\rho = -\frac{(A^{-1}\Lambda,\, \eta)}{(A^{-1}\eta,\, \eta)}.$$

Итак,

$$F = \Lambda - \frac{(A^{-1}\Lambda,\, \eta)}{(A^{-1}\eta,\, \eta)}\eta \tag{4.3}$$

— сила трения по Пенлеве.

Эта сила удовлетворяет условию (2.9). Действительно, вектор $A^{-1}F$ является возможным перемещением системы, что сразу же следует из (4.3): $(A^{-1}F,\, \eta) = 0$. Для силы сухого трения (2.6) это равенство принимает вид $(A^{-1}\Phi\dot{x},\, \eta) = 0$ для всех возможных скоростей $\dot{x}$ или, что то же самое,

$$(\Phi^T A^{-1}\eta,\, \dot{x}) = 0.$$

Это равенство вместе с условием $(\eta,\, \dot{x})$, конечно, эквивалентно условию (2.9).

§ 5. Парадокс Пенлеве

Сказанное выше позволяет прояснить некоторые принципиальные моменты, связанные с известным парадоксом сухого трения, отмеченным впервые Пенлеве [3]. Рассмотрим классический пример — движение двух материальных точек с массами m_1 и m_2, соединенных невесомым твердым стержнем длины l, опирающимся одним концом на горизонтальную шероховатую ось. Изначально мы имеем систему с тремя степенями свободы; в качестве обобщенных координат возьмем декартовы координаты x, y массы m_1 и угол ϑ, образуемый отрезком с горизонтальной осью. Односторонняя связь задается неравенством $f = y \geqslant 0$.

Будем рассматривать движение системы с учетом связи $y = 0$ в избыточных координатах x, ϑ, y. Матрица оператора инерции в этих координатах имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 l \sin\vartheta & 0 \\ -m_2 l \sin\vartheta & m_2 l^2 & m_2 l \cos\vartheta \\ 0 & m_2 l \cos\vartheta & m_1 + m_2 \end{bmatrix}.$$

Она, конечно, положительно определена, но ее элементы зависят от положения системы.

Пенлеве рассматривает случай, когда сухое трение возникает лишь в точке контакта (в точке с массой m_1): оно описывается законом Амонтона с учетом давления стержня на горизонтальную ось. Тогда оператор трения имеет диагональный вид: $\Phi = \mathrm{diag}(\varkappa,\, 0,\, 0)$. Но, как легко проверить, при $\varkappa \neq 0$ соотношение (2.9) не выполняется. Следовательно, согласно § 4, такое взаимодействие стержня и горизонтальной оси нельзя назвать трением по Пенлеве. Кстати сказать, этот факт вытекает и из формулы для давления стержня на ось, в которую явно входит величина коэффициента трения. Напомним, что для трения по Пенлеве нормальная реакция не зависит от конкретного вида закона трения (см. [3]). Поэтому парадокс Пенлеве, возникающий в ходе анализа уравнений движения с односторонней связью, обусловлен нарушением условия (2.9): при достаточно больших значениях коэффициента трения давление стержня на ось определено не для всех положений стержня (ввиду наличия сингулярностей).

В рассматриваемой задаче условие (2.9) выполнено лишь в тех случаях, когда сухое трение описывается оператором

$$\Phi = A\Omega^T, \tag{5.1}$$

причем последний столбец матрицы Ω имеет вид

$$(0,\, 0,\, \nu)^T. \tag{5.2}$$

При этом условии движение системы с анизотропным сухим трением однозначно и корректно определено на всей оси времени. В частности, сила трения зависит от наклона стержня, а также зависит не только от линейной скорости $\dot{x}$, но и от угловой скорости отрезка $\dot{\vartheta}$.

Отметим, что условия (5.1) и (5.2) заведомо выполнены для изотропного трения (2.7). В этом случае матрица Ω имеет диагональный вид с равными элементами по диагонали.

§ 6. Задача о качении твердого тела

Применим общую теорию сухого трения к классической задаче о качении твердого тела по неподвижной поверхности. Эта динамическая система имеет пять степеней свободы. Положение твердого тела можно задать шестью избыточными координатами: например, тремя декартовыми координатами его центра масс и тремя углами Эйлера, определяющими ориентацию тела в пространстве. Функция f в (2.3), задающая связь — условие контакта тела и поверхности, зависит от вида этой поверхности и формы тела.

Чтобы задать обобщенный закон сухого трения Амонтона, надо определить входящие в формулу (2.6) величины. Пусть O — центр масс тела, ρ — радиус-вектор точки контакта с началом в точке O, N — реакция связи. Более точно, сила N вычисляется в задаче о скольжении тела по поверхности без трения. Формулу для N можно найти, например, в [9].

Надо иметь в виду, что реакция связи R, фигурирующая в (2.6), это ковектор с шестью компонентами. Но эти компоненты выражаются через компоненты силы N в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть w — скорость центра масс, ω — угловая скорость тела (w и ω — векторы в подвижном пространстве), m — масса тела, а J_0 — его тензор инерции относительно точки O. Кинетическая энергия — внутренняя метрика — это положительно определенная квадратичная форма

$$\frac{m}{2}(w,\, w) + \frac{1}{2}(J_0\omega,\, \omega). \tag{6.1}$$

Ее матрица вторых производных имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} mI_3 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix},$$

где I_3 — единичная матрица третьего порядка. Матрицу A легко обратить:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}I_3 & 0 \\ 0 & J_0^{-1} \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Динамические уравнения имеют следующий вид:

$$m\dot{w} = \ldots + N, \quad J_0\dot{\omega} = \ldots + \rho \times N.$$

Здесь выписаны только слагаемые, существенные для нашего анализа. Следовательно, векторы N и $\rho \times N$ составляют «полную» реакцию связи R. С помощью формул (2.4), (2.5) и (6.2) вычисляется квадрат ее длины во внутренней метрике:

$$|R|^2 = \frac{1}{m}(N,\, N) + (J_0^{-1}(\rho \times N),\, \rho \times N).$$

Если в каждый момент времени векторы ρ и N коллинеарны, то

$$|R| = \frac{1}{\sqrt{m}}|N|.$$

Это условие заведомо выполняется, если тело имеет форму шара, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром. В частности, в задаче о качении тяжелого однородного шара по горизонтальной плоскости

$$|R| = \sqrt{m}g, \tag{6.3}$$

где g — ускорение свободного падения.

Величина скорости $|\dot{x}|$ в знаменателе (2.6) определяется как $\sqrt{2T}$, где T задана формулой (6.1). Остается задать тензор анизотропного трения Φ, который должен удовлетворять неравенству (2.8) и условию (2.9). В нашем случае компоненты ковектора $\partial f/\partial x$ пропорциональны компонентам векторов

$$n \quad \text{и} \quad \rho \times n, \tag{6.4}$$

где n — нормаль к поверхности в точке контакта.

Все это выглядит особенно просто в задаче о качении тяжелого однородного шара по горизонтальной плоскости. Пусть r — радиус этого шара, v — скорость точки контакта шара с неподвижной плоскостью. Воспользуемся естественным разложением $\omega = \Omega + \omega'$, где Ω — вертикальный вектор — угловая скорость верчения, а ω' — горизонтальный вектор — угловая скорость качения шара. В этих обозначениях

$$|\dot{x}|^2 = m(v + \omega' \times r)^2 + \frac{2}{5}mr^2(\Omega^2 + \omega'^2),$$

а оператор инерции принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mr & 0 \\ 0 & m & 0 & -mr & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -mr & 0 & J & 0 & 0 \\ mr & 0 & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}, \quad J = \frac{2}{5}mr^2.$$

Укажем простое семейство тензоров анизотропного трения

$$\Phi = \mathrm{diag}(m\mu_1,\, m\mu_1,\, m\mu_1,\, mr^2\mu_2,\, mr^2\mu_2,\, mr^2\mu_3), \quad m_j \geqslant 0.$$

Безразмерные величины μ_j интерпретируются как коэффициенты трения. Этот тензор удовлетворяет условию (2.9), поскольку (согласно (6.4)) компоненты ковектора $\partial f/\partial x$ пропорциональны 0, 0, 1, 0, 0, 0.

Если $\mu_2 = \mu_3 = 0$, то имеем только сухое трение скольжения:

$$F = -mg\mu_1\frac{v}{D}, \quad D = \left[(v + \omega' \times r)^2 + \frac{2}{5}mr^2(\Omega^2 + \omega'^2)\right]^{1/2}. \tag{6.5}$$

В отличие от распространенной точки зрения, сила сухого трения скольжения зависит от угловых скоростей верчения и качения.

Пусть $\mu_3 = 0$. Тогда кроме трения скольжения будем иметь трение верчения, момент которого определяется формулой

$$M = -mgr^2\mu_2\frac{\Omega}{D}, \tag{6.6}$$

схожей с формулой (6.5). Из (6.5) и (6.6) вытекает, что сила трения и момент уменьшаются с увеличением угловой скорости качения. В принципиальном плане этот эффект допускает экспериментальную проверку.

В самом общем случае, когда $\mu_3 \neq 0$, возникает еще дополнительный момент сухого трения качения, формула для которого схожа с (6.6). Если же оператор анизотропного трения Φ не диагональный, то в числителе формул (6.5) и (6.6) будут фигурировать линейные формы по v, Ω и ω'. Отметим еще, что если все коэффициенты μ_j положительны, то без воздействия дополнительных сил шар прекращает свое движение за *конечное* время. Этот же вывод справедлив и в общем случае, когда оператор трения положительно определен.

Сделаем несколько замечаний. Формулы (6.5) и (6.6) стоит сравнить с формулами В. Ф. Журавлёва [2], которые аппроксимируют более сложные формулы Контенсу для сухого трения скольжения и верчения. Вместо нашей функции D в знаменателе (6.5) и (6.6), однородно зависящей от скоростей, в [2] фигурируют линейные функции $\alpha|v|+\beta|\Omega|$; α, $\beta = \mathrm{const} > 0$. Стоит иметь в виду, что исходная теория Контенсу основана на огрублении физического механизма взаимодействия катящегося шара и плоскости: соответствующая контактная задача упругого взаимодействия рассматривается как *статическая*. Добавим еще хорошо известный факт, что на самом деле коэффициент трения «чистого» скольжения зависит от скорости и убывает с ее ростом (см., например, [10]). Аналогичные замечания относятся и к более полному анализу, основанному на тех же идеях и учитывающему трение качения [11]. Было бы интересным уточнить теорию Контенсу–Журавлёва, заменяя статические контактные задачи *стационарными* контактными задачами, когда тело движется с постоянной линейной и угловой скоростью. В нашем подходе структура тензора анизотропного трения Φ должна определяться в ходе решения задачи идентификации неизвестных параметров — элементов матрицы Φ при обработке данных эксперимента.

§ 7. Некоторые обобщения

Развиваемый подход к теории сухого трения просто обобщается на случай, когда на систему наложено несколько связей. Пусть они представляются уравнениями

$$f_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x) = 0; \quad p < n. \tag{7.1}$$

Эти уравнения предполагаются независимыми: в каждой точке конфигурационного пространства $\{x\}$ ковекторы

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_p}{\partial x} \tag{7.2}$$

линейно независимы. Как и в случае одной связи ($p = 1$), обобщенные координаты $x_1, \ldots, x_n$ будут избыточными.

И в этом более общем случае закон сухого трения Амонтона имеет тот же вид (2.6). При этом реакция R вычисляется с учетом нескольких связей (7.1). Как и при $p = 1$, формула R как вектор-функции состояния системы вычисляется без учета трения.

Оператор анизотропного трения Φ снова должен удовлетворять двум условиям. Во-первых,

$$(\Phi\dot{x}, \dot{x}) \geqslant 0$$

для всех возможных скоростей $\dot{x}$, удовлетворяющих уравнениям связей

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \dot{x}\right) = \ldots = \left(\frac{\partial f_p}{\partial x}, \dot{x}\right) = 0. \tag{7.3}$$

Во-вторых,

$$(\Phi^T A^{-1})\frac{\partial f_i}{\partial x} = \sum \lambda_{ij}\frac{\partial f_j}{\partial x} \tag{7.4}$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant p$ и некоторых $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$. Это условие обобщает условие (2.9) при $p=1$. Другими словами, линейное пространство размерности p, порождаемое линейными комбинациями ковекторов (7.2), должно быть инвариантным подпространством линейного оператора $\Phi^T A^{-1}$. Условие (7.4) вместе с условием положительной определенности оператора инерции A гарантирует, что множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ можно однозначно найти как функции состояния системы. В частности, реакция связей

$$R = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

не зависит от тензора трения Φ. Отметим, что условие (7.3) заведомо выполняется в случае анизотропного трения (2.7).

Имеется еще одна возможность обобщения, носящая, впрочем, несколько формальный характер. Речь идет о замене внутренней метрики, в которой вычисляются величины $|R|$ и $|\dot{x}|$ в формуле (2.6), на какую-то другую риманову метрику. При таком обобщении возникают новые параметры, подлежащие определению при решении задачи идентификации. По-видимому, такое обобщение на самом деле не вносит ничего принципиально нового в закон сухого трения Амонтона для общих лагранжевых систем.

Наконец, вся эта теория легко распространяется на случай, когда связи зависят от времени: $f_j(x, t) = 0$. Только соответствующие формулы выглядят более громоздко. Виртуальные перемещения по-прежнему удовлетворяют уравнению (4.1), а уравнения для действительных скоростей (7.3) усложняются:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x}, \dot{x}\right) = 0; \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Список литературы

[1] Аргатов И. И., Дмитриев Н. Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.

[2] Журавлёв В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, вып. 5, с. 762–767.

[3] Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895 [Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.].

[4] Иванов А. П. Основы теории систем с трением. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2011. 304 с.

[5] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.

[6] Козлов В. В., Трещев Д. В. Биллиарды: Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: МГУ, 1991. 168 с.

[7] Ванторин В. Д. Движение по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ в машинах, 1962, т. 16, с. 81–120.

[8] Дмитриев Н. Н. Начало движения тел по плоскости с ортотропным трением // Динамика и устойчивость механических систем. СПб.: СПбГУ, 1995. С. 14–20.

[9] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.

[10] Sommerfeld A. Vorlesungen über theoretische Physik: Bd. 1: Mechanik. 2. Aufl. Leipzig: Akad. Verl., 1944 [Зоммерфельд А. Механика. М.: ИЛ. 1947. 391 с.].

[11] Карапетян А. В. О моделировании сил трения в динамике шара на плоскости // ПММ, 2010, т. 74, вып. 4, с. 531–535.