# Ответ на замечания А. Т. Фоменко

**А. В. Борисов, И. С. Мамаев**

Институт компьютерных исследований
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Вне всякого сомнения мы считаем теорию Фоменко связанной с нашей работой самым непосредственным образом, о чем совершенно недвусмысленно написано во введении к нашей работе. Наши результаты основаны на тех же простых принципах и фактах, которые активно использовались в теории топологической классификации А. Т. Фоменко, но были, разумеется, известны и ранее (достаточно указать, например, работы М. П. Харламова [1–3] и Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского [4, 5]). Пользуясь случаем, кратко их упомянем:

— при изучении интегрируемых систем и анализе их динамики важную роль играют слоение фазового пространства на торы Лиувилля и особенности этого слоения;

— наиболее важные и интересные с динамической точки зрения траектории лежат на особом множестве, где интегралы становятся зависимыми;

— в интегрируемых гамильтоновых системах есть два основных типа критических траекторий: эллиптические и гиперболические; первые из них устойчивы, вторые — нет.

Атомы и молекулы в нашей работе не упомянуты совершенно сознательно, поскольку они не имеют отношения к обсуждаемой проблеме. Они описывают бифуркации лиувиллевских торов и их взаимное расположение, т. е. являются полулокальными и глобальными инвариантами слоения. Устойчивость же является локальным феноменом, и для ее анализа требуются инварианты другого сорта.

Нашу работу можно, пожалуй, упрекнуть в том, что предложенная нами схема очень проста (атомы и молекулы для нее не нужны) и почти очевидна для специалистов по теории топологической классификации. Об этом мы прямо написали во введении. Но простота и естественность схемы представляются нам не недостатком, а преимуществом. В этом мы и видели свою главную задачу при написании статьи.

Предложенный нами метод отнюдь не является переформулировкой готовых результатов, уже доказанных ранее в теории Фоменко или где-то еще. Помимо использования общей топологической точки зрения на изучаемый объект, он основан на доказанных в нашей работе четырех новых и вполне содержательных результатах (теоремы 4, 6, 7, 8). Без них схема не работает. Если мы ошибаемся и эти результаты уже были получены кем-то ранее, мы были бы очень благодарны за указанные ссылки.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА, 2010, Т. 6, № 4, с. 893–895

В наших будущих публикациях мы непременно сошлемся на работы А. Т. Фоменко [6,7], где обсуждается бифуркационный комплекс. Прокомментируем, однако, нашу точку зрения на этот объект. С общематематической точки зрения он является абсолютно стандартным топологическим понятием, представляя собой базу слоения Лиувилля и потому, очевидно, являясь его инвариантом. Природа слоения при этом совершенно несущественна. Кстати сказать, в нашей следующей работе мы предполагаем показать, как бифуркационный комплекс можно использовать для анализа устойчивости в случае неинтегрируемых систем, который никакого отношения к теории Фоменко не имеет.

Важен не сам факт существования этого комплекса, а его свойства. Некоторые из них хорошо известны и были получены до создания теории Фоменко. Например, в классической работе Дюистермаата [8] показано, что регулярная часть комплекса снабжена естественной целочисленной аффинной структурой, а знаменитая теорема Атьи [9], Гийемина и Стернберга [10] говорит о том, что в случае, когда на симплектическом многообразии $M^{2n}$ действует тор $T^n$, этот комплекс представляет собой выпуклый многогранник, позволяющий, как было затем показано Дельзантом [11], полностью реконструировать структуру слоения на торы Лиувилля.

Что касается отмеченного А. Т. Фоменко свойства независимости бифуркационного комплекса от выбора интегралов системы, то для «нашего» бифуркационного комплекса это свойство не выполняется. Например, если заменить $f_1, f_2$ на $\tilde{f}_1 = f_1$, $\tilde{f}_2 = f_1 f_2$, то изменится, очевидно, как изучаемое нами слоение, так и его база, т. е. бифуркационный комплекс. Таким образом, для описания нужных нам свойств интегралы необходимо фиксировать.

Мы внимательно ознакомились с обеими работами [6, 7], указанными в комментарии А. Т. Фоменко. В первой из них комплекс лишь упоминается как удобный объект для интерпретации инварианта Фоменко $I(H,Q)$ и формулируется вопрос В. И. Арнольда об изучении особенностей этого комплекса. Детальная конструкция, представленная в [7], не связана с изучаемыми нами проблемами устойчивости и, кроме того, относится лишь к той части комплекса, которая получается удалением из него всех вырожденных особенностей. Наши результаты относятся ко всему комплексу, причем именно вырожденные особенности в этом контексте представляют наибольший интерес, поскольку анализ устойчивости тех периодических траекторий, для которых проверка невырожденности уже произведена, труда не составляет. Свойство бифуркационного комплекса, которое позволяет использовать его в качества полезного инструмента в теории устойчивости (см. теорему 8 нашей работы), было доказано впервые нами.

Мы очень рады, что А. Ю. Москвину, с которым мы сотрудничали в течение двух последних лет, удалось продемонстрировать на конкретных примерах, как работает предложенная нами схема, и решить с ее помощью ряд нетривиальных задач. Было приятно увидеть в его работах [12, 13] (по-видимому, одну из них имеет в виду А. Т. Фоменко) выраженную нам благодарность за постановку задач и полезные обсуждения в ходе работы над статьями, а также отдельную благодарность нашему соавтору А. В. Болсинову за неоценимые замечания.

В заключение, выражая А. Т. Фоменко признательность за проявленное внимание, отметим, что основная цель нашей работы состояла отнюдь не в том, чтобы зафиксировать за собой приоритеты. Мы хотели (и будем продолжать работать в этом направлении) соединить усилия специалистов по механике и топологии, чтобы объяснить широкому кругу исследователей некоторые простые идеи и довести их до доступных технологий, чего ранее никем сделано не было. Насколько нам это удалось — судить читателям нашей статьи. Мы надеемся, что она будет полезной.

## Список литературы


[1] Харламов М. П. Фазовая топология одного интегрируемого случая движения твердого тела // МТТ, 1979, вып. 11, с. 50–64.

[2] Харламов М. П. Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела // Докл. АН СССР, 1983, т. 273, вып. 6, с. 1322–1325.

[3] Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: ЛГУ, 1988. 200 с.

[4] Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Структура пуассоновского действия $\mathbb{R}^2$ на четырехмерном симплектическом многообразии: Деп.в ВИНИТИ 10.07.81, № 3427-81. Горький: ГГУ, 1981. 51 с. [Selecta Math. Sovietica, 1987, vol. 6, no. 4, pp. 365–396].

[5] Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Структура пуассоновского действия $\mathbb{R}^2$ на четырехмерном симплектическом многообразии: II // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. трудов / Е. А. Леонтович-Андронова. Горький: ГГУ, 1982. С. 3–19 [Selecta Math. Sovietica, 1988, vol. 7, no. 1, pp. 39–48].

[6] Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил., 1988, т. 22, вып. 4, с. 38–51.

[7] Fomenko A. T. The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom // Topological classification of integrable systems / A. T. Fomenko. (Advances in Soviet Mathematics, vol. 6.) Providence, RI: AMS, 1991. P. 1–35.

[8] Duistermaat J. J. On global action-angle variables // Comm. Pure Appl. Math., 1980, vol. 33, pp. 687–706.

[9] Atiyah M. F. Convexity and commuting Hamiltonians // Bull. London Math. Soc., 1982, vol. 14, no. 1, pp. 1—15.

[10] Guillemin V., Sternberg S. Convexity properties of the moment mapping // Invent. Math., 1982, vol. 67, no. 3, pp. 491–513.

[11] Delzant T. Hamiltoniens périodiques et images convexe de l'application moment // Bull. Soc. Math. France, 1988, vol. 116, pp. 315–339.

[12] Москвин А. Ю. Шар Чаплыгина с гиростатом: Особые решения // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 345–356.

[13] Москвин А. Ю. Резиновый шар на плоскости: Критические решения // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 2, с. 345–358.


*21 декабря 2010 г.*