



УДК: 551.465:551.511

MSC 2010: 76B70, 76E05, 76E20, 76E30

Резонансное трехволновое взаимодействие волн, имеющих общий критический слой

С. М. Чурилов

В рамках слабонелинейного подхода наибольший нелинейный вклад в развитие неустойчивых возмущений в сдвиговых течениях должно давать резонансное трехволновое взаимодействие, т. е. взаимодействие троек волн, которые имеют общий критический слой (КС), а их волновые векторы образуют треугольник. Как ни странно, на сегодня фактически изучено только одно такое взаимодействие — субгармонический резонанс. Причина заключается в том, что во многих случаях требование наличия общего КС приводит к слишком жесткому отбору волн, могущих участвовать во взаимодействии. В статье показано, что в широком спектральном диапазоне волны Холмбо в резко стратифицированных сдвиговых течениях могут иметь общий КС, и изучена эволюция небольших ансамблей, состоящих из взаимосвязанных триад этих волн. Для этого выведены эволюционные уравнения, которые описывают трехволновое взаимодействие и имеют вид нелинейных интегральных уравнений. Асимптотическими и численными методами исследованы их решения в различных случаях и показано, что на нелинейной стадии развития возмущение растёт, как правило, взрывным образом.

Ключевые слова: сдвиговое течение, резкая стратификация плотности, трехволновое взаимодействие, критический слой

1. Введение

В теории гидродинамической устойчивости плоско-параллельных сдвиговых течений $v_x = U(z)$ с большими числами Рейнольдса важную роль играет так называемый критический слой (КС) (см., напр., [1]) — узкая окрестность критического уровня $z = z_c$,

Получено 12 мая 2011 года
После доработки 20 мая 2011 года

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 16, Программы ОФН РАН № 15, грантов РФФИ № 09-02-00082-а и № 10-05-00094-а.

Чурилов Семен Михайлович
churilov@iszf.irk.ru
Институт солнечно-земной физики СО РАН
664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 126а



на котором скорость течения равна фазовой скорости возмущения.¹ Внутри КС жидкие частицы движутся вместе с волной и длительное время взаимодействуют с одним и тем же ее участком, что приводит к резонансу, т. е. интенсивному обмену энергией и импульсом между индивидуальными (жидкие частицы внутри КС) и коллективными (волна) степенями свободы [2–5]. С динамической точки зрения резонанс волна–частица приводит к тому, что даже при малой амплитуде волны движение жидких частиц внутри КС существенно перестраивается, влияя при этом на развитие самой волны. В частности, именно с резонансным взаимодействием связана, как правило, потеря устойчивости волной (а следовательно, и течением) в линейном приближении [6, 7].

В линейной теории возмущение рассматривается как суперпозиция независимых собственных колебаний, каждое из которых имеет свою фазовую скорость и, при выполнении условия резонанса волны с течением, свой КС. По мере роста амплитуд в результате неустойчивости это приближение перестает быть корректным, и начинается слабонелинейная стадия эволюции, на которой возмущение еще можно представить в виде ансамбля колебаний, устроенных почти так же, как и в линейном приближении, но пренебрегать их взаимодействием уже нельзя. А самое интенсивное взаимодействие происходит как раз внутри КС, где, благодаря резонансной перестройке течения, фактическая величина (магнитуда) возмущений скорости, плотности и давления намного больше, чем вне него. Поэтому на слабонелинейной стадии основной вклад в развитие возмущения вносит взаимодействие волн, имеющих общий КС, т. е. одинаковые или достаточно близкие фазовые скорости.

В слабонелинейной теории взаимодействие волн учитывается методом последовательных приближений, и выводимые с его помощью нелинейные эволюционные уравнения (НЭУ) имеют, как правило, вид разложений по степеням амплитуд взаимодействующих волн (см., напр., [8]). Пока амплитуды малы, главный (квадратичный по амплитудам) нелинейный вклад в НЭУ вносит, в общем случае, резонансное взаимодействие троек волн, у которых волновые векторы удовлетворяют условию треугольника,

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad (1)$$

а расстройка частот, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$, равна нулю (или достаточно мала). В следующий порядок разложения (кубический по амплитудам) вклад дают четырехволновые процессы ($\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 \pm \mathbf{k}_4$ при условии малости соответствующей расстройки частот) и т. д. В случае сдвиговых течений соотношения между волновыми векторами остаются прежними, а условие малости $\Delta\omega$ заменяется требованием, чтобы все участвующие во взаимодействии волны имели общий КС.²

Это требование с очевидностью выполняется для монохроматической (или квазимонохроматической) волны, и, видимо, поэтому нелинейное самодействие такой волны является наиболее хорошо изученным на сегодня процессом. Его теория применительно к различным течениям и типам волн активно разрабатывается и уже приобрела вполне определенные очертания. В частности, изучены и классифицированы основные сценарии эволюции неустойчивого возмущения и соответствующие им режимы развития структуры КС, а также установлена связь между поведением собственных функций линейного приближения на критическом уровне и типом сценария (см., напр., [9]).

В отличие от самодействия (которое относится к четырехволновым процессам), более сильное трехволновое взаимодействие изучено в сдвиговых течениях пока мало. Причина

¹Точнее, ее вещественной части, $U_c \equiv U(z_c) = c_r = \text{Re } c$.

²Заметим, что при этом $|\Delta\omega| = O(U_c L/\Lambda^2)$, где L — толщина КС, а Λ — масштаб изменения скорости.

этого, видимо, в том, что во многих случаях требование общности КС приводит к жесткой селекции волн, которые могут участвовать в таком взаимодействии. Например, волны Толлмина–Шлихтинга (ТШ-волны) в однородном пограничном слое имеют общий КС только в случае равенства по модулю их волновых векторов. При этом волновой вектор наиболее неустойчивой волны направлен (в силу теоремы Сквайра [10]) вдоль течения, так что единственным эффективным трехволновым процессом оказывается субгармонический резонанс (см., напр., [11]).

Тем более интересно рассмотреть такие течения и волны в них, которые допускают большое разнообразие трехволновых взаимодействий. Легко понять, что эти волны должны обладать слабой дисперсией, т. е. иметь фазовую скорость, мало меняющуюся в достаточно широком спектральном диапазоне. Таковы, например, волны Холмбо [12], играющие важную роль в динамике резко стратифицированных сдвиговых течений. Подчеркнем, что они обладают слабой дисперсией как в традиционно рассматриваемых течениях типа слоя смещения (см. рис. 1а в статье [13]), так и в более простых для анализа течениях типа пограничного слоя, изучением которых мы и займемся.

Рассмотрим класс течений идеальной несжимаемой жидкости, похожих на пограничный слой с погруженным в него тонким пикноклином. В таких течениях скорость $U(z)$ монотонно растет вверх (без точек перегиба) от нуля на дне ($z = 0$) до некоторого U_0 при $z \rightarrow \infty$, а плотность $\rho_0(z)$ монотонно убывает от ρ_1 до ρ_2 в переходном слое толщины $\ell \ll \Lambda$ (рис. 1). Линейная теория устойчивости этих течений разработана достаточно подроб-

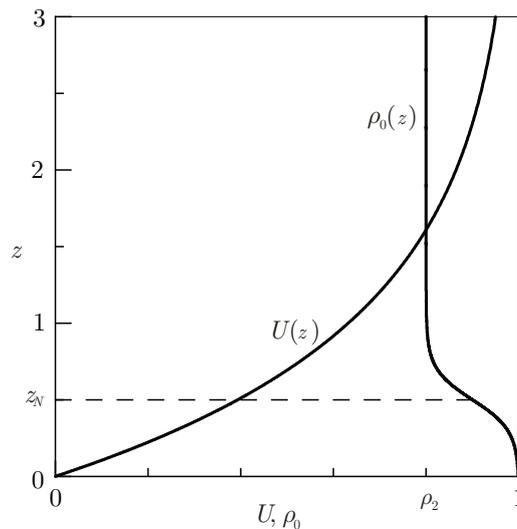


Рис. 1. Схематические профили скорости и плотности ($\Lambda = 1$, $U_0 = 1$, $\rho_1 = 1$).

но (см. [14–17]), поэтому мы лишь кратко остановимся на основных ее результатах, введя для удобства безразмерные переменные, в которых (штрих обозначает производную по z)

$$U(0) = 0, \quad U(\infty) = U_0 = 1, \quad U'(0) = 1, \quad \rho_0(0) = \rho_1 = 1,$$

и разделив «уровень» и «высотный профиль» стратификации таким образом, что квадрат частоты плавучести $\Omega^2(z) \equiv -g\rho'_0/\rho_0 = Jn(z)$, где g — ускорение силы тяжести, J — глобальное число Ричардсона, а нормированный «профиль плавучести» $n(z)$ локализован

в слое толщины $O(\ell)$ с центром в $z_N = O(1)$,

$$z_N = \int_0^\infty dz z n(z), \quad \int_0^\infty dz n(z) = 1, \quad (2)$$

и имеет единственный максимум. Обозначим также $U_N = U(z_N)$.

По сути, такое течение представляет собой горизонтальный волновод, а его собственные колебания — это волноводные моды. Волны, обгоняющие течение, т. е. имеющие фазовую скорость $c_r = \operatorname{Re} c \geq 1$, нейтрально устойчивы ($\operatorname{Im} c = 0$) и различаются, кроме длины волны (точнее, волнового вектора $\mathbf{k} = (K \cos \theta, K \sin \theta, 0)$), числом $m = 0, 1, 2 \dots$ узлов по вертикали. Заметим, что все узлы расположены внутри пикноклина (см. рис. 5 в [16]), поэтому моды с $m > 0$ имеют мелкомасштабную структуру по z независимо от длины волны. С учетом теоремы Сквайра [10, 18] дисперсионное уравнение волн, принадлежащих m -й моде, можно представить в виде $J = J_m(K, \theta; c) \equiv J_m(K, 0; c) \cos^2 \theta$, где $J_m(K, 0; c)$ — монотонно растущая функция K , c и m .

Если уменьшать c (при данных m и \mathbf{k} и, очевидно, уменьшающемся J), то после пересечения границы $c = 1$ волна вступает в резонансное взаимодействие с течением и формируется КС. Это происходит на дальней периферии течения, где стратификации фактически нет, а знак градиента завихренности таков ($U'' < 0$), что волна теряет устойчивость (см., напр., [4]). При дальнейшем уменьшении c_r (вместе с J) и приближении критического уровня к верхней границе пикноклина в игру вступает стратификация, оказывающая стабилизирующее действие на волну [16]. Так формируются частные (m -е) области неустойчивости, $0 < J < J_m^{(+)}(K) = J_m(K, 0; 1)$. Легко показать, что $J_0^{(+)}(K) = O(1)$ и $J_m^{(+)}(K) = O(m^2/\ell)$ при $m \geq 1$, поэтому полная область неустойчивости течения, объединяющая в себе все частные, целиком заполняет первый квадрант плоскости (K, J) . Ниже мы будем рассматривать только колебания, принадлежащие основной моде ($m = 0$), как наиболее неустойчивые.

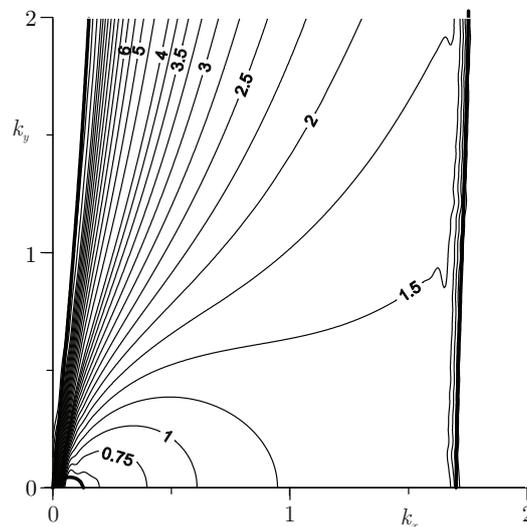


Рис. 2. Изолинии отклонения $(c_r - U_N)/\ell$ фазовой скорости собственных колебаний течения (3) от U_N (тонкие линии). Границы области неустойчивости показаны жирными линиями (ср. с рис. 3).

Завершая экскурс в линейную теорию, обратим внимание на то, что при не слишком сильной стратификации ($J < \ell^{3/2}$), во-первых, течение слабонеустойчивое, в нем наиболь-

шие скорости роста не превосходят $\ell^{1/2}$ и принадлежат трехмерным ($\theta \neq 0$) возмущениям [16, 17],³ и, во-вторых, в широком диапазоне длин волн ($\ell^{1/2} < K < \ell^{-1/2}$) критические уровни неустойчивых возмущений лежат внутри пикноклина или вблизи его верхнего края, т. е. их фазовые скорости совпадают с точностью $O(\ell)$ (см. рис. 2).

Последнее свойство играет особо важную роль в нашем исследовании. При слабой вязкости толщина L индивидуального (т. е. «принадлежащего» одной волне) КС на линейной стадии развития возмущения равна нестационарному масштабу [9], $L = L_t \equiv |B^{-1} d|B|/dt|$ (где B – амплитуда волны, t – время). Поскольку в ходе эволюции L может только возрастать, индивидуальные КС сольются в один общий, если характерные инкременты неустойчивых колебаний будут порядка $O(\ell)$, что достигается уже при уровне стратификации $J = O(\ell^2)$ [17]. В таком случае пикноклин оказывается фактически погруженным внутрь КС и составляет с ним единое целое (именуемое далее для краткости КС), а это создает благоприятные условия для богатого разнообразия трехволновых взаимодействий, изучаемых в настоящей статье.

В § 2 сформулирована постановка задачи, приведены основные уравнения и описаны методы их решения. Эволюционные уравнения получены в § 3, а § 4 посвящен анализу их решений в различных случаях. Результаты обсуждаются в § 5. Некоторые вспомогательные выкладки и пояснения вынесены в приложения.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть число Ричардсона $J = \ell^2 \tilde{J} = O(\ell^2)$, а число Рейнольдса настолько велико ($Re \gg \ell^{-3}$), что влиянием диссипации можно пренебречь. Рассмотрим задачу о трехволновом взаимодействии колебаний, принадлежащих наиболее неустойчивой при таком уровне стратификации моде $m = 0$. Тот факт, что основные нелинейные процессы протекают внутри КС (который во всех течениях устроен примерно одинаково), позволяет нам не конкретизировать $U(z)$ и $\rho_0(z)$ и провести анализ в общем виде. Полученные результаты будем иллюстрировать численными расчетами для модельного течения

$$U(z) = \text{th } z, \quad n(z) = \frac{1 + \exp(-2z_N/\ell)}{2\ell \text{ch}^2[(z - z_N)/\ell]}; \quad z_N = 0.5, \quad \ell = 0.04, \quad J = 0.01. \quad (3)$$

Так как фазовые скорости интересующих нас волн близки и с точностью $O(\ell)$ равны «средней» скорости течения в пикноклине U_N , удобно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью U_N , в которой как распространение возмущений с фазовой скоростью, так и изменение их амплитуд можно описать на языке медленного времени $\tau = \ell t$. Решение будем строить методом сращиваемых асимптотических разложений, т. е. найдем решения внутри КС и во внешних областях течения, а затем, сшивая их в пограничных областях ($\ell \ll |z - z_N| \ll 1$), получим НЭУ как условия сшивки.

Исключая давление, запишем уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска [7] в системе отсчета, движущейся со скоростью U_N :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \Delta w - U'' \frac{\partial w}{\partial x} + J \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) = -\Delta \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (4a)$$

³Впервые такую возможность продемонстрировали Смит и Пелтье [18] на примере волн Холмбо в вязком (с числом Рейнольдса $Re < 500$) стратифицированном слое смешения с $\Lambda/\ell = 3$.

$$\frac{D}{Dt} \rho - n(z)w = - \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad (4b)$$

$$\frac{D}{Dt} G + U' \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (4c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial w}{\partial z}, \quad G = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4d, e)$$

где $D/Dt = \ell \partial/\partial \tau + (U - U_N) \partial/\partial x$, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ и ρ — возмущения скорости и плотности, Δ — лапласиан. Решение уравнений (4) представляется как сумма волн, входящих в триаду,

$$w = w_1(\tau, z) e^{i(k_1 x + q_1 y)} + w_2(\tau, z) e^{i(k_2 x + q_2 y)} + w_3(\tau, z) e^{i(k_3 x + q_3 y)} + \dots + \text{с.с.}, \quad (5)$$

где волновые векторы $\mathbf{k}_n = (k_n, q_n, 0)$ составляют треугольник (1), причем все $k_n > 0$.

Внутри КС удобно ввести новые переменные

$$Z = (z - z_N)/\ell, \quad N(Z) = \ell n(z); \quad w = W, \quad (u, v, \rho, G) = \ell^{-1}(\mathcal{U}, V, P, \Gamma), \quad (6)$$

так что (с точностью до экспоненциально малых членов, ср. с (2))

$$\int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dZ Z N(Z) = 0, \quad (7)$$

а уравнения (4) примут вид (сохраняем только необходимые для дальнейшего анализа вклады; производные по переменным τ, x, y, Z обозначаем соответствующими нижними индексами, $f_N \equiv f(z_N)$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + U'_N Z \frac{\partial}{\partial x} \right) W_{ZZ} = -\ell \tilde{J}(P_{xx} + P_{yy}) + \ell U''_N W_x - \frac{\ell U''_N}{2} Z^2 W_{ZZx} + \ell^{-2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[\mathcal{U}_x^2 + V_y^2 + W_Z^2 + 2\mathcal{U}_y V_x + 2\mathcal{U}_Z W_x + 2V_Z W_y - \frac{\partial}{\partial Z} (\mathcal{U} W_x + V W_y + W W_Z) \right], \quad (8a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + U'_N Z \frac{\partial}{\partial x} \right) P - N(Z)W = -\frac{\ell U''_N}{2} Z^2 P_x - \ell^{-2} (\mathcal{U} P_x + V P_y + W P_Z), \quad (8b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + U'_N Z \frac{\partial}{\partial x} \right) \Gamma + U'_N W_y = -\ell U''_N Z W_y - \frac{\ell U''_N}{2} Z^2 \Gamma_x + \ell^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{U} V_x + V V_y + W V_Z) - \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{U} \mathcal{U}_x + V \mathcal{U}_y + W \mathcal{U}_Z) \right], \quad (8c)$$

$$\mathcal{U}_x + V_y = -W_Z, \quad \Gamma = \mathcal{U}_y - V_x. \quad (8d, e)$$

Поскольку амплитуды B_n взаимодействующих волн могут, вообще говоря, иметь (или приобрести в процессе эволюции) разные порядки величины, следует приписать им разные амплитудные параметры $0 < \varepsilon_n \ll 1$ так, что $B_n(t) = \varepsilon_n A_n(\tau)$ и $|A_n(\tau)| = O(1)$. При этом решения уравнений (4) и (8) строятся в виде разложений по ε_n и ℓ , в частности,

$$w_n = \varepsilon_n w_n^{(1)} + \ell \varepsilon_n w_n^{(2)} + \dots, \quad W_n = \varepsilon_n W_n^{(1)} + \ell \varepsilon_n W_n^{(2)} + \dots$$



3. Вывод эволюционных уравнений

3.1. Внешнее решение и скейлинг

Во внешних областях течения ($|z - z_N| \gg \ell$) стратификация и нелинейность дают лишь незначительные поправки к решению. В главном для n -й волны порядке ($O(\varepsilon_n)$) представим (см. (5)) $w_{n\pm}^{(1)} = -ik_n A_n(\tau) g_{\pm}(z; K_n)$ (индекс $+/-$ соответствует области над/под z_N), где $K_n^2 = k_n^2 + q_n^2$, а $g_{\pm}(z; K)$ удовлетворяют уравнению Рэлея с граничными условиями

$$\frac{d^2 g_{\pm}}{dz^2} - \left(\frac{U''(z)}{U(z) - U_N} + K^2 \right) g_{\pm} = 0; \quad (9)$$

$$g_-(0) = 0, \quad |g_+(\infty)| < \infty.$$

Собственные функции колебаний основной моды ($m = 0$) внутри КС изменяются незначительно, поэтому в главном порядке $g_+(z_N + 0; K) = g_-(z_N - 0; K) = g_*(K)$. Полагая $g_*(K) = 1$, получаем при $|z - z_N| \equiv \ell|Z| \ll 1$ разложение (см. [6])

$$w_{n\pm}^{(1)} = -ik_n A_n(\tau) \left[1 + \ell \left(\frac{U''_N}{U'_N} \ln |\ell Z| + a_{\pm}(K_n) \right) Z + O(\ell^2 |Z| \ln |\ell Z|) \right]. \quad (10)$$

Коэффициенты $a_+(K_n)$ и $a_-(K_n)$ вещественны и могут быть найдены только в результате решения задачи (9). Подчеркнем, что при любом K_n функции g_+ и g_- — *разные* решения уравнения Рэлея, так как по теореме Рэлея [6, 7] в однородном течении с $U''(z) < 0$ собственных колебаний нет.⁴ Поэтому, будучи аналитически продолжены в нижнюю полуплоскость комплексного z , функции $g_{n\pm}(z) \equiv g_{\pm}(z; K_n)$ линейно независимы, и их вронскиан

$$a_*(K_n) = g_{n+}(z) g'_{n-}(z) - g'_{n+}(z) g_{n-}(z) = a_-(K_n) - a_+(K_n) + i\pi U''_N / U'_N \neq 0. \quad (11)$$

Далее, из уравнений (4c,d,e) находим, что

$$u_{n\pm}^{(1)} = \left(\frac{k_n^2}{K_n^2} \frac{dg_{n\pm}}{dz} + \frac{q_n^2 U' g_{n\pm}}{K_n^2 (U - U_N)} \right) A_n \xrightarrow{z \rightarrow z_N} \left[\frac{q_n^2}{\ell K_n^2 Z} + O(\ln |\ell Z|) \right] A_n, \quad (12)$$

$$v_{n\pm}^{(1)} = \frac{ik_n q_n}{K_n^2} \left(\frac{dg_{n\pm}}{dz} - \frac{U' g_{n\pm}}{U - U_N} \right) A_n \xrightarrow{z \rightarrow z_N} \left[\frac{-k_n q_n}{\ell K_n^2 Z} + O(\ln |\ell Z|) \right] A_n.$$

Вернемся теперь к вертикальной компоненте скорости. Приравнивая последовательно при $n = 1, 2, 3$ скачок производной w_n через КС изменению в порядке $O(\ell \varepsilon_n)$ производной соответствующей компоненты W_n внутреннего решения, приходим к условиям сшивки

$$\varepsilon_n [a_+(K_n) - a_-(K_n)] A_n(\tau) = \frac{2i}{k_n \ell} \int dZ W_{nZZ}, \quad \int dZ(\dots) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dZ(\dots), \quad (13)$$

которые и дают НЭУ. Ограничимся пока случаем, когда амплитуды волн одного порядка, т. е. все $\varepsilon_n = \varepsilon$. Тогда, как легко убедиться, обусловленные внутренним решением нелинейные (квадратичные по $A_n(\tau)$) вклады войдут в НЭУ равноправно с линейными, если

$$\varepsilon = \ell^3. \quad (14)$$

⁴За исключением непрерывного спектра так называемых мод Ван Кампена–Кейза, см. [2, 3, 5].

3.2. Внутреннее решение

В соответствии с (5) представляем внутреннее решение в виде суммы волн, а каждую волну — в виде разложения по малым параметрам ℓ и ε/ℓ^2 ($n = 1, 2, 3$):

$$(\mathcal{U}_n, V_n, W_n, P_n, \Gamma_n) = \varepsilon (\mathcal{U}_n^{(1)}, V_n^{(1)}, W_n^{(1)}, P_n^{(1)}, \Gamma_n^{(1)}) + \ell \varepsilon (\mathcal{U}_n^{(2)}, V_n^{(2)}, W_n^{(2)}, P_n^{(2)}, \Gamma_n^{(2)}) + \dots$$

1. $O(\varepsilon)$. Уравнение (8a) приводит к соотношениям

$$\widehat{L}_n W_n^{(1)} = 0, \quad \widehat{L}_n = \frac{\partial}{\partial \tau} + ik_n U'_N Z.$$

Интегрируя их с «начальным» условием $W_n(\tau, Z) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$, получаем $W_n^{(1)} = 0$. Наконец, сшивка с внешним решением (10) дает

$$W_n^{(1)} = -ik_n A_n(\tau). \quad (15)$$

Подставляя в (8b), находим

$$\widehat{L}_n P_n^{(1)} = N(Z) W_n^{(1)} = -ik_n N(Z) A_n(\tau) \quad \text{и} \quad P_n^{(1)} = -ik_n N(Z) \mathcal{A}_n(\tau, Z),$$

где введены обозначения

$$\mathcal{A}_n^{(m)}(\tau, Z) = \int_0^\infty ds s^m A_n(\tau - s) \exp(-ik_n U'_N Z s), \quad \mathcal{A}_n(\tau, Z) \equiv \mathcal{A}_n^{(0)}(\tau, Z).$$

Наконец, из (8c)–(8e) находим выражения для горизонтальных компонент скорости,

$$\mathcal{U}_n^{(1)} = \frac{ik_n q_n^2}{K_n^2} U'_N \mathcal{A}_n, \quad V_n^{(1)} = -\frac{ik_n^2 q_n}{K_n^2} U'_N \mathcal{A}_n, \quad (16)$$

которые, как легко убедиться, автоматически сшиваются с (12).

2. $O(\ell\varepsilon)$. С учетом (14), в этом порядке при каждом n есть два вклада — линейный и нелинейный, $W_n^{(2)} = W_n^{(2L)} + W_n^{(2N)}$. Линейные вклады удовлетворяют уравнениям

$$\widehat{L}_n W_n^{(2L)} = ik_n U''_N W_n^{(1)} + K_n^2 \widetilde{J} P_n^{(1)} = k_n^2 U''_N A_n(\tau) - ik_n K_n^2 \widetilde{J} N(Z) \mathcal{A}_n(\tau, Z),$$

учитывающим поправку на стратификацию. Их решения имеют вид

$$W_n^{(2L)} = k_n^2 U''_N \mathcal{A}_n - ik_n K_n^2 \widetilde{J} N(Z) \mathcal{A}_n^{(1)},$$

или, после несложных преобразований,

$$W_n^{(2L)} = -ik_n \left[\frac{U''_N}{U'_N Z} \left(A_n(\tau) - \frac{\partial \mathcal{A}_n}{\partial \tau} \right) + K_n^2 \widetilde{J} N(Z) \mathcal{A}_n^{(1)} \right].$$

Правая часть регулярна при $Z = 0$, поэтому интеграл от нее по Z не изменится, если эту точку обойти снизу. Поскольку в нижней полуплоскости Z член, содержащий $\partial \mathcal{A}_n / \partial \tau$, регу-

лярен и убывает как Z^{-2} при $|Z| \rightarrow \infty$, его вклад в интеграл равен нулю, и

$$\oint dZW_n^{(2L)} = -ik_n \left[\frac{i\pi U_N''}{U_N'} A_n(\tau) + K_n^2 \tilde{J} \int_{-\infty}^{\infty} dZN(Z) \int_0^{\infty} ds s A_n(\tau - s) \exp(-ik_n U_N' Zs) \right]. \quad (17)$$

Вычислим теперь главные нелинейные вклады $W_n^{(2N)}$. Из уравнения (8a) с помощью (1), (15) и (16) получаем (черта сверху обозначает комплексное сопряжение):

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1 W_1^{(2N)} &= ik_2 k_3 (k_2 q_3 - k_3 q_2) U_N'{}^3 \left[\frac{2q_2 q_3}{K_2^2 K_3^2} (k_2 q_3 - k_3 q_2) (k_2 \mathcal{A}_2^{(1)} \mathcal{A}_3 + k_3 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3^{(1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2^2 q_2}{K_2^2} \mathcal{A}_2^{(2)} \mathcal{A}_3 - \frac{k_3^2 q_3}{K_3^2} \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3^{(2)} \right], \\ \widehat{L}_2 W_2^{(2N)} &= ik_1 k_3 (k_1 q_3 - k_3 q_1) U_N'{}^3 \left[\frac{2q_1 q_3}{K_1^2 K_3^2} (k_1 q_3 - k_3 q_1) (k_1 \mathcal{A}_1^{(1)} \bar{\mathcal{A}}_3 - k_3 \mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_3^{(1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_1^2 q_1}{K_1^2} \mathcal{A}_1^{(2)} \bar{\mathcal{A}}_3 + \frac{k_3^2 q_3}{K_3^2} \mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_3^{(2)} \right], \\ \widehat{L}_3 W_3^{(2N)} &= ik_1 k_2 (k_1 q_2 - k_2 q_1) U_N'{}^3 \left[\frac{2q_1 q_2}{K_1^2 K_2^2} (k_1 q_2 - k_2 q_1) (k_1 \mathcal{A}_1^{(1)} \bar{\mathcal{A}}_2 - k_2 \mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_2^{(1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_1^2 q_1}{K_1^2} \mathcal{A}_1^{(2)} \bar{\mathcal{A}}_2 + \frac{k_2^2 q_2}{K_2^2} \mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_2^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и подставляя $W_n^{(2N)}$ в правые части (13), видим, что в данном порядке нелинейный вклад при $n = 1$ равен нулю, а

$$\begin{aligned} \oint dZW_2^{(2N)} &= \frac{2i\pi k_1^2 k_2 q_3}{K_1^2 K_3^2} (k_1 q_3 - k_3 q_1) (k_1 k_2 + q_1 q_2) U_N'{}^2 \int_0^{\infty} ds s^2 A_1(\tau - s) \bar{\mathcal{A}}_3 \left(\tau - \frac{k_1}{k_3} s \right), \\ \oint dZW_3^{(2N)} &= \frac{2i\pi k_1^2 k_3 q_2}{K_1^2 K_2^2} (k_1 q_2 - k_2 q_1) (k_1 k_3 + q_1 q_3) U_N'{}^2 \int_0^{\infty} ds s^2 A_1(\tau - s) \bar{\mathcal{A}}_2 \left(\tau - \frac{k_1}{k_2} s \right). \end{aligned}$$

Теперь, зная линейные (17) и нелинейные вклады внутреннего решения в правые части (13), получаем эволюционные уравнения для тройки волн (1). Их удобно записать, введя время $\tau' = U_N' \tau$ и обозначение $\tilde{R} = \tilde{J}/U_N'{}^2$ (штрих при τ далее опускаем):

$$a_*(K_1) A_1(\tau) + K_1^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZN(Z) \int_0^{\infty} dt t A_1(\tau - t) \exp(-ik_1 Zt) = 0, \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} a_*(K_2) A_2(\tau) + K_2^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZN(Z) \int_0^{\infty} dt t A_2(\tau - t) \exp(-ik_2 Zt) = \\ = V_{k_2 k_1 k_3} \int_0^{\infty} dt t^2 A_1(\tau - t) \bar{\mathcal{A}}_3 \left(\tau - \frac{k_1}{k_3} t \right), \end{aligned} \quad (18b)$$

$$\begin{aligned}
 a_*(K_3)A_3(\tau) + K_3^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) \int_0^{\infty} dt t A_3(\tau - t) \exp(-ik_3 Z t) = \\
 = V_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \int_0^{\infty} dt t^2 A_1(\tau - t) \bar{A}_2\left(\tau - \frac{k_1}{k_2} t\right),
 \end{aligned} \tag{18c}$$

где

$$V_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} = \frac{2\pi k_1^2 q_2}{K_1^2 K_2^2 U'_N} (\mathbf{k} \mathbf{k}_1) [\mathbf{k} \mathbf{k}_1]_z; \quad (\mathbf{k} \mathbf{k}_1) = k k_1 + q q_1, \quad [\mathbf{k} \mathbf{k}_1]_z = k q_1 - k_1 q. \tag{19}$$

Напомним, что уравнения (18) выведены в предположении $A_n(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$, которое при поиске их решений служит своеобразным «начальным условием».

С математической точки зрения уравнения (18) представляют собой интегральные уравнения типа свертки, в отличие от интегро-дифференциальных уравнений для триад волн в однородном пограничном слое (см., напр., § 6 в [11]) и обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих «стандартное» трехволновое взаимодействие [19]. С физической же точки зрения принципиальное отличие этих уравнений (равно как и аналогичных им, т.е. учитывающих только квадратичные по амплитудам вклады, уравнений для ТШ-волн и, по-видимому, любых волн с общим КС) от «стандартных» в том, что они описывают не «распад» ($\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$) и «слияние» ($\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}_1$) образующих триаду волн, а эволюцию волн \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 при каталитическом участии волны \mathbf{k}_1 (ср. с [20, 21]).

Мы будем изучать развитие возмущений, составленных из конечного числа волн. Поскольку все $k_n > 0$, волна с наибольшей продольной компонентой волнового вектора (k_1) в рамках принятого приближения выступает только в роли «катализатора», а ее амплитуда растет в соответствии с линейной теорией. Другие же волны, входящие в состав возмущения, могут играть в разных триадах различные роли. Интенсивность взаимодействия волн определяется коэффициентами (19), которые, в общем случае, следует считать порядка единицы и отличными от нуля. Необходимо, однако, иметь в виду, что $V_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$ обращается в нуль, когда \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 коллинеарны или ортогональны, а также если третья волна — «продольная», $q_2 = 0$. Кроме того, в конкретных случаях $V_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$ могут содержать большие числовые множители (см., напр., (30)).

4. Некоторые решения эволюционных уравнений

При выбранном уровне стратификации течение имеет широкую область неустойчивости [16, 17], $\ell^{1/2} < K < \ell^{-1/2}$, поэтому все участвующие во взаимодействии волны можно считать неустойчивыми. Их амплитуды растут экспоненциально,

$$A_n(\tau) = A_{n0} \exp[-ik_n(Z_n + i\Delta_n)\tau], \tag{20}$$

на начальной стадии, а амплитуда A_1 — в течение всего периода развития, описываемого НЭУ (18). Собственные значения $Z_n + i\Delta_n$ находятся из линейного закона дисперсии

$$a_{*n} \equiv a_*(K_n) = \frac{K_n^2 \tilde{R}}{k_n^2} \mathcal{N}(Z_n + i\Delta_n), \quad \mathcal{N}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dZ N(Z)}{(Z - X)^2} \quad (\text{Im}(X) > 0). \tag{21}$$

Когда $B_1(\tau) = \varepsilon_1 A_1(\tau)$ достигает уровня (14), в игру вступает взаимодействие волн, результат которого, как оказывается, принципиально зависит от «состава игроков».



4.1. Эволюция изолированной триады

Изолированная триада волн (1) развивается фактически так же, как и состоящая из ТШ-волн система гармоника–субгармоника на стадии параметрического взаимодействия (см. [11]). При известном (экспоненциальном) законе роста амплитуды $A_1(\tau)$ волны-катализатора можно построить (по аналогии с [22, 23]) точные аналитические решения уравнений (18 b), (18 c) для амплитуд A_2 и A_3 в виде рядов (см. приложение А). Их асимптотические разложения при $\tau \gg 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_2(\tau) &\approx A_{20} C_2^{(1)} T^{\alpha_2} \exp[6 T^{1/6} + k_2(\Delta_2 - iZ_2)\tau] + \\ &\quad + A_{10} \bar{A}_{30} C_2^{(2)} T^{\bar{\alpha}_3 - 1/2} \exp[6 T^{1/6} + k_2(\Delta_{2*} - iZ_{2*})\tau], \\ A_3(\tau) &\approx A_{30} C_3^{(1)} \bar{T}^{\alpha_3} \exp[6 \bar{T}^{1/6} + k_3(\Delta_3 - iZ_3)\tau] + \\ &\quad + A_{10} \bar{A}_{20} C_3^{(2)} \bar{T}^{\bar{\alpha}_2 - 1/2} \exp[6 \bar{T}^{1/6} + k_3(\Delta_{3*} - iZ_{3*})\tau], \end{aligned} \quad (22)$$

где коэффициенты $C_i^{(m)}$ выражаются через k_n , Δ_n , Z_n и

$$T = \frac{k_2^3 k_3^3 V_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}}{16(k_1^2 \Delta_1)^6 a_{*2} \bar{a}_{*3}} |A_{10}|^2 e^{2k_1 \Delta_1 \tau} = T_* |A_1(\tau)|^2,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{12} - \frac{k_n \Delta_n + ik_n(Z_1 - Z_n)}{2k_1 \Delta_1}, \quad n = 2, 3;$$

$$k_{2,3} \Delta_{2*,3*} = k_1 \Delta_1 + k_{3,2} \Delta_{3,2}, \quad k_{2,3} Z_{2*,3*} = k_1 Z_1 - k_{3,2} Z_{3,2}.$$

Поскольку «время» T растет с τ экспоненциально, пропорционально $|A_1(\tau)|^2$, легко видеть, что экспоненциальный в начале рост $A_2(\tau)$ и $A_3(\tau)$ под действием катализатора ускоряется и становится сверхэкспоненциальным, подобным росту субгармоники в однородных течениях [11, 22, 23]. Обратим внимание, что в (22) (см. также (A1)) правые части содержат по два слагаемых: первое описывает каталитическое ускорение собственного роста (20) волны, а второе — «вынужденную» (катализатором и другой волной) добавку к нему. Оба слагаемых растут сверхэкспоненциально, поэтому рост обеих волн остается сверхэкспоненциальным даже в том случае, если начальная амплитуда одной из них равна нулю.

4.2. Ансамбли, содержащие более трех волн

Рассмотрим все возможные триады, составленные из волн ансамбля. Особое место занимает волна (или несколько волн) с наибольшей x -компонентой k_0 волнового вектора. Это волна-катализатор (ВК), амплитуда которой растет экспоненциально, пока применимы НЭУ (18). Для других членов ансамбля уравнения (18) легко обобщить, включив в правую часть НЭУ для амплитуды $A_{\mathbf{k}}$ сумму вкладов всех триад, содержащих \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} a_*(K) A_{\mathbf{k}}(\tau) + K^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) \int_0^{\infty} dt t A_{\mathbf{k}}(\tau - t) \exp(-ikZt) = \\ = \sum_{\mathbf{k}_2, k_2 > 0} V_{\mathbf{k} \mathbf{k} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2} \int_0^{\infty} dt t^2 A_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_2}(\tau - t) \bar{A}_{\mathbf{k}_2} \left(\tau - t - \frac{k}{k_2} t \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Каждая из этих волн может, в принципе, «параметрически усиливаться» в одних триадах и служить катализатором в других, обеспечивая там рост волн, более быстрый, чем (22).

Опыт изучения развития возмущений при участии нелинейных взаимодействий более высокого порядка (четырёхволновых и т. д., см. [11, 24, 25]) подсказывает, что более быстрый

рост — это взрывной рост. «Примерим» его к НЭУ (23). Обозначим $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_2$, подставим

$$A_{\mathbf{k}}(\tau) = C_{\mathbf{k}}(\tau_* - \tau)^{-\alpha_{\mathbf{k}} + i\beta_{\mathbf{k}}}, \quad \alpha_{\mathbf{k}} > 0, \quad (24)$$

в НЭУ (23) и вычислим каждое из его слагаемых, обозначая их P_1 , P_2 и P_N соответственно. После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_*(K)C_{\mathbf{k}}(\tau_* - \tau)^{-\alpha_{\mathbf{k}} + i\beta_{\mathbf{k}}}, \\ P_2 &= K^2 \tilde{R}C_{\mathbf{k}}(\tau_* - \tau)^{2 - \alpha_{\mathbf{k}} + i\beta_{\mathbf{k}}} \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) \Psi\left(2, 3 - \alpha_{\mathbf{k}} + i\beta_{\mathbf{k}}; ikZ(\tau_* - \tau)\right), \\ P_N &= 2 \sum_{\mathbf{k}_2} \frac{\Gamma(\alpha_{\mathbf{k}_1} + \alpha_{\mathbf{k}_2} - 3 - i\beta_{\mathbf{k}_1} + i\beta_{\mathbf{k}_2})}{\Gamma(\alpha_{\mathbf{k}_1} + \alpha_{\mathbf{k}_2} - i\beta_{\mathbf{k}_1} + i\beta_{\mathbf{k}_2})} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^3 V_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} C_{\mathbf{k}_1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2} (\tau_* - \tau)^{3 - \alpha_{\mathbf{k}_1} - \alpha_{\mathbf{k}_2} + i\beta_{\mathbf{k}_1} - i\beta_{\mathbf{k}_2}} \times \\ &\quad \times F\left(\alpha_{\mathbf{k}_1} - i\beta_{\mathbf{k}_1}, 3; \alpha_{\mathbf{k}_1} + \alpha_{\mathbf{k}_2} - i(\beta_{\mathbf{k}_1} - \beta_{\mathbf{k}_2}); k/k_1\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция, а $\Psi(a, c; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [26]. Легко видеть, что когда $\tau \rightarrow \tau_* - 0$, $|P_2| \ll \ll |P_1|$, а P_1 и P_N имеют одинаковую зависимость от τ , если

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{k}_1} + \alpha_{\mathbf{k}_2} - 3 \quad \text{и} \quad \beta_{\mathbf{k}} = \beta_{\mathbf{k}_1} - \beta_{\mathbf{k}_2}. \quad (25)$$

Тогда, приравнявая P_1 и P_N , получим соотношения

$$a_*(K)C_{\mathbf{k}} = \frac{2\Gamma(\alpha_{\mathbf{k}} - i\beta_{\mathbf{k}})}{\Gamma(\alpha_{\mathbf{k}} - i\beta_{\mathbf{k}} + 3)} \sum_{\mathbf{k}_2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^3 V_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} C_{\mathbf{k}_1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2} F\left(\alpha_{\mathbf{k}_1} - i\beta_{\mathbf{k}_1}, 3; \alpha_{\mathbf{k}} - i\beta_{\mathbf{k}} + 3; k/k_1\right), \quad (26)$$

связывающие амплитуды взаимодействующих волн.

Условия (25) выполняются, например, когда $\alpha_{\mathbf{k}} = 3$ и $\beta_{\mathbf{k}} = (\mathbf{b} \mathbf{k})$ для всех \mathbf{k} , где \mathbf{b} — некоторый вектор. Это очень заманчивый сценарий эволюции, поскольку он описывает, в принципе, всю слабонелинейную стадию развития возмущений. Действительно, в случае его реализации толщина КС, $L = L_t = 3\ell/(\tau_* - \tau)$, и амплитуды волн, $|B_{\mathbf{k}}| = \varepsilon|C_{\mathbf{k}}|/(\tau_* - \tau)^3$, связаны соотношением $|B_{\mathbf{k}}| = O(L^3)$ (ср. с (14)), в силу которого КС останется нестационарным, а трехволновое взаимодействие будет играть главную роль вплоть до амплитуд $|B| = O(1)$. К сожалению, данный сценарий, предполагающий взрывной рост *всех волн* с единым показателем $\alpha = 3$, имеет один недостаток — в него не вписывается ВК. Действительно, она не только сама растет всего лишь экспоненциально, но и не может обеспечить нужный темп роста волнам, для которых служит единственным катализатором, а те, в свою очередь, недостаточно ускоряют рост других волн и т. д.

4.3. «Многоуровневые» ансамбли волн

Наложим (обычное при численном моделировании) условие периодичности возмущения с периодом $2\pi/k$ по x и $2\pi/q$ по y . Тогда ансамбль состоит из волн с волновыми векторами вида $(mk, pq, 0)$, где $m > 0$ и p — целые. В частности (равную нулю z -компоненту далее опускаем), у ВК $\mathbf{k}_0 = (Mk, p_0q)$, $M \geq 3$.⁵ Назовем такой ансамбль M -уровневым,

⁵В случае $M = 2$ получим изолированную триаду гармоника-субгармоники, которая растет не по взрывному закону, а сверхэкспоненциально, в соответствии с (22).

а уровни будем нумеровать числом m . Предположим, что асимптотически амплитуды волн всех уровней растут взрывным образом с показателями α_m , зависящими только от m , а ВК формально припишем показатель $\alpha_M = 0$. Заметим, кроме того, что первое условие (25) является достаточным, но не необходимым. Действительно, скорость роста P_N определяется, очевидно, наибольшей суммой показателей взаимодействующих волн, $\alpha_N = [\max_{\mathbf{k}_2}(\alpha_{\mathbf{k}_1} + \alpha_{\mathbf{k}_2}) - 3]$, поэтому P_1 и P_N будут расти в одном темпе, если $\alpha_{\mathbf{k}} = \alpha_N$. Применяя это условие к нашему ансамблю, находим, что

$$\begin{aligned} \alpha_{M-1} &= \alpha_1 - 3 > 0, & \alpha_{M-2} &= \alpha_{M-1} + \alpha_1 - 3 = 2(\alpha_1 - 3), & \dots, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 + \alpha_1 - 3 = (M-1)(\alpha_1 - 3) \end{aligned}$$

и

$$\alpha_1 = 3 \frac{M-1}{M-2} = 3 + \frac{3}{M-2} \equiv 3 + \Delta\alpha, \quad \alpha_2 = 3 \quad \text{и} \quad \alpha_m = 3 \frac{M-m}{M-2} = (M-m)\Delta\alpha. \quad (27)$$

Таким образом, наибольший показатель роста у волн первого уровня. Он превосходит «универсальное» значение 3 (см. выше), которое принадлежит (при всех M) волнам второго уровня. С дальнейшим ростом m α_m продолжает убывать (с шагом $\Delta\alpha$) до нуля при $m = M$. Амплитудные множители $C_{\mathbf{k}}$ по-прежнему связаны равенствами (26), но суммирование в них идет только по \mathbf{k}_2 , принадлежащим волнам первого уровня.

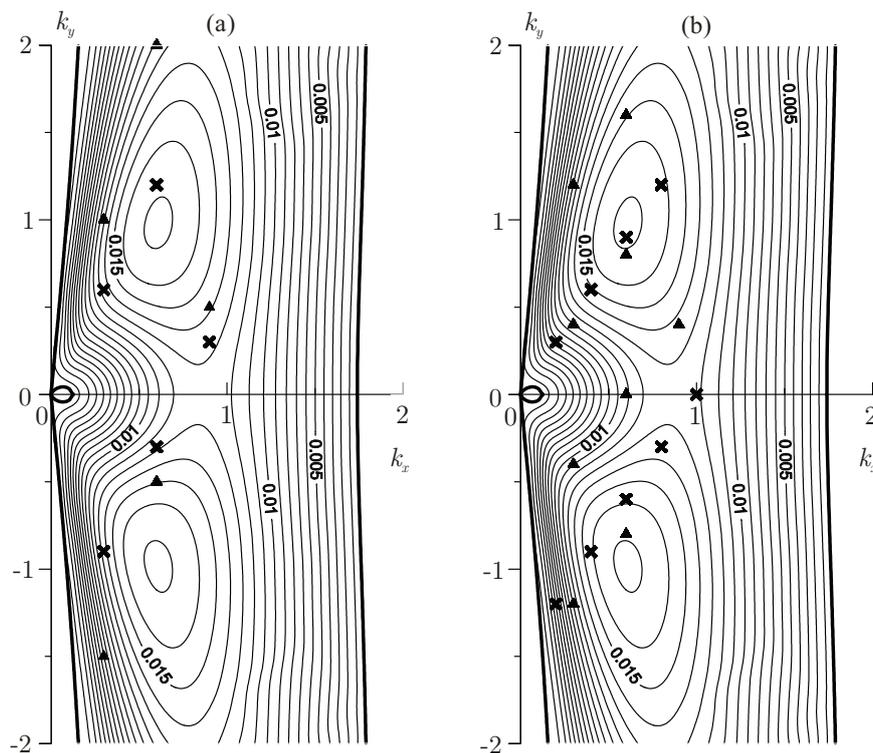


Рис. 3. Область неустойчивости течения (3) на плоскости (k_x, k_y) с изолиниями инкремента. Отмечены концы волновых векторов волн, входящих в состав (а) — ансамбля (28) в невырожденном ($k = 0.3$, $q = 0.5$, треугольники) и вырожденном ($k = q = 0.3$, крестики) случаях, (б) — ансамблей (31) (треугольники) и (32) (крестики).

Перейдем теперь к результатам численного решения НЭУ (23) для различных ансамблей волн. На рисунке 3 на плоскости (k_x, k_y) показана область неустойчивости течения (3) с изолиниями инкремента и отмечены концы волновых векторов тех ансамблей, эволюция которых рассчитывалась. Некоторые детали вычислений приведены в приложении В.

4.3.1. Ансамбли с тремя уровнями

Если $M = 3$, то в общем случае, согласно (27), волны первого уровня должны асимптотически расти с показателем роста $\alpha_1 = 6$, а волны второго уровня — с $\alpha_2 = 3$. Рассмотрим на конкретных примерах, как реализуется это предсказание. Начнем с «минимального» ансамбля, содержащего, наряду с ВК, по две волны первого и второго уровней:

$$\mathbf{k}_0 = (3k, q), \quad \mathbf{k}_{11} = (k, -3q), \quad \mathbf{k}_{12} = (k, 2q), \quad \mathbf{k}_{21} = (2k, -q), \quad \mathbf{k}_{22} = (2k, 4q). \quad (28)$$

Уравнения (23) для их амплитуд имеют вид (обозначения очевидны):

$$\begin{aligned} a_{*11}A_{11} + K_{11}^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) \int_0^{\infty} dt t A_{11}(\tau - t) e^{-ikZt} = \\ = V_{11}^{(0)} \int_0^{\infty} dt t^2 A_0(\tau - t) \bar{A}_{22} \left(\tau - \frac{3}{2}t \right) + V_{11}^{(1)} \int_0^{\infty} dt t^2 A_{21}(\tau - t) \bar{A}_{12}(\tau - 2t), \\ a_{*12}A_{12} + K_{12}^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) \int_0^{\infty} dt t A_{12}(\tau - t) e^{-ikZt} = \\ = V_{12}^{(0)} \int_0^{\infty} dt t^2 A_0(\tau - t) \bar{A}_{21} \left(\tau - \frac{3}{2}t \right) + V_{12}^{(1)} \int_0^{\infty} dt t^2 A_{21}(\tau - t) \bar{A}_{11}(\tau - 2t), \\ a_{*21}A_{21} + K_{21}^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) \int_0^{\infty} dt t A_{21}(\tau - t) e^{-2ikZt} = V_{21} \int_0^{\infty} dt t^2 A_0(\tau - t) \bar{A}_{12}(\tau - 3t), \\ a_{*22}A_{22} + K_{22}^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) \int_0^{\infty} dt t A_{22}(\tau - t) e^{-2ikZt} = V_{22} \int_0^{\infty} dt t^2 A_0(\tau - t) \bar{A}_{11}(\tau - 3t), \end{aligned} \quad (29)$$

где (см. (19))

$$\begin{aligned} V_{11}^{(0)} &= \frac{2160 \pi k^3 q^2}{K_0^2 K_{22}^2 U'_N} (k^2 - q^2), \quad V_{11}^{(1)} = \frac{80 \pi k^3 q^2}{K_{21}^2 K_{12}^2 U'_N} (2k^2 + 3q^2), \\ V_{12}^{(0)} &= \frac{90 \pi k^3 q^2}{K_0^2 K_{21}^2 U'_N} (3k^2 + 2q^2), \quad V_{12}^{(1)} = \frac{240 \pi k^3 q^2}{K_{21}^2 K_{11}^2 U'_N} (k^2 - q^2), \\ V_{21} &= \frac{180 \pi k^3 q^2}{K_0^2 K_{12}^2 U'_N} (6k^2 - q^2), \quad V_{22} = \frac{1080 \pi k^3 q^2}{K_0^2 K_{11}^2 U'_N} (3k^2 + 2q^2). \end{aligned} \quad (30)$$

На рисунке 4 показаны эволюция амплитуд волн (пунктир) и изменение «текущих» показателей их роста (сплошные линии) со временем при $k = 0.3$ и $q = 0.5$. В этом (невыврожденном) случае все коэффициенты взаимодействия (30) отличны от нуля, и рост амплитуд,



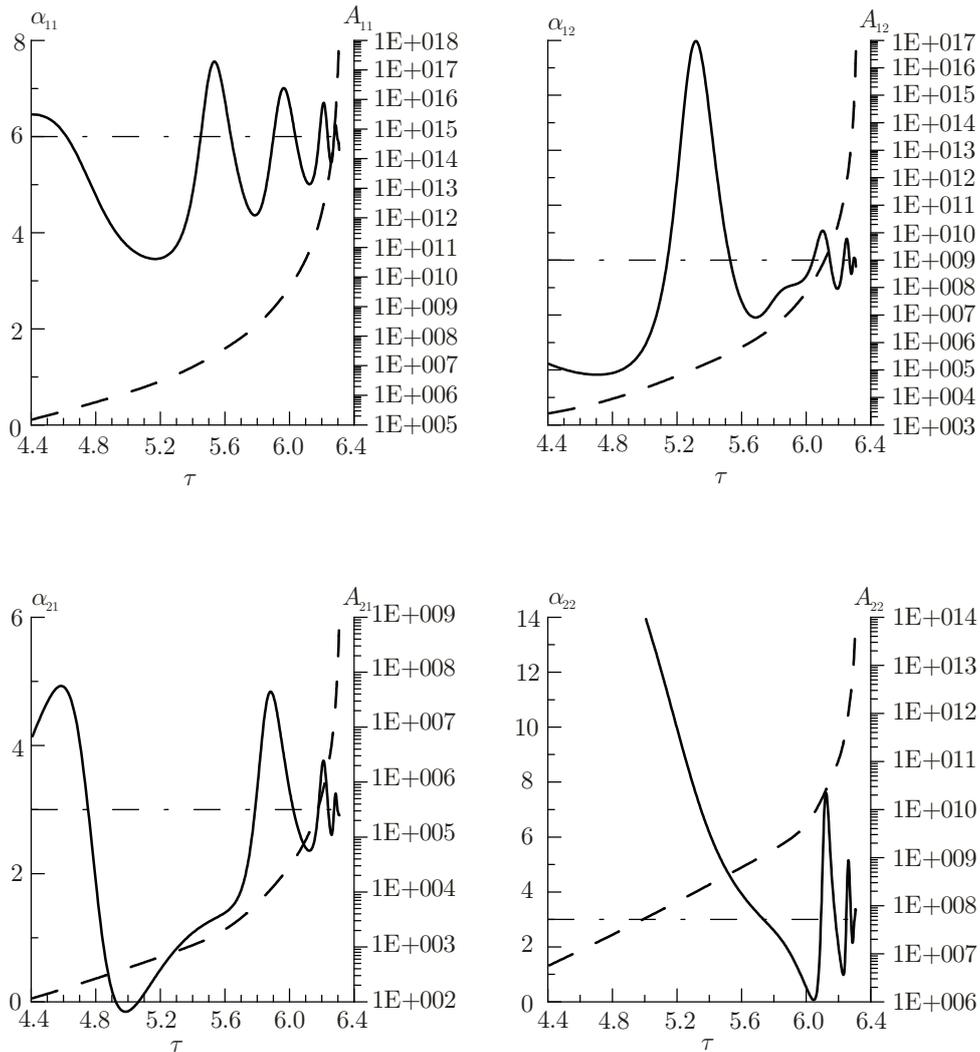


Рис. 4. Зависимость от τ амплитуд волн ансамбля (28) (пунктир) и «мгновенных» показателей их роста (сплошные линии) в невырожденном случае ($k = 0.3$, $q = 0.5$).

как и следовало ожидать, выходит в конце концов на взрывной режим, с показателями $\alpha_1 = 6$ у волн первого уровня и $\alpha_2 = 3$ у волн второго уровня.

Есть, кроме того, два вырожденных случая. В первом из них, при $q^2 = k^2$, в нуль обращаются $V_{11}^{(0)}$ и $V_{12}^{(1)}$, так что тройка волн \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_{12} и \mathbf{k}_{21} не испытывает действия других членов ансамбля, но влияет на их развитие. В результате A_{12} и A_{21} растут сверхэкспоненциально, в соответствии с (22), стимулируя пропорциональный их произведению (т. е. тоже сверхэкспоненциальный, но более быстрый) рост A_{11} и A_{22} (см. рис. 5). Рисунок 6 демонстрирует отличия взрывного и сверхэкспоненциального роста. Для большей наглядности на этих рисунках показаны зависимости от τ не A_n , а b_n ($A_n(\tau) = A_n b_n(\tau) \exp[(\gamma_n - i\omega_n)\tau]$, где $b_n(\tau) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow -\infty$, см. приложение В; $n = 11, 12, 21, 22$).

В другом вырожденном случае, при $q^2 = 6k^2$, $V_{21} = 0$, и в ансамбле появляется вторая волна-катализатор с экспоненциально растущей амплитудой $A_{21}(\tau)$. Амплитуды же остальных трех волн растут сверхэкспоненциально, по законам, похожим на (22), но имеющих более сложный вид из-за совместного действия двух катализаторов.

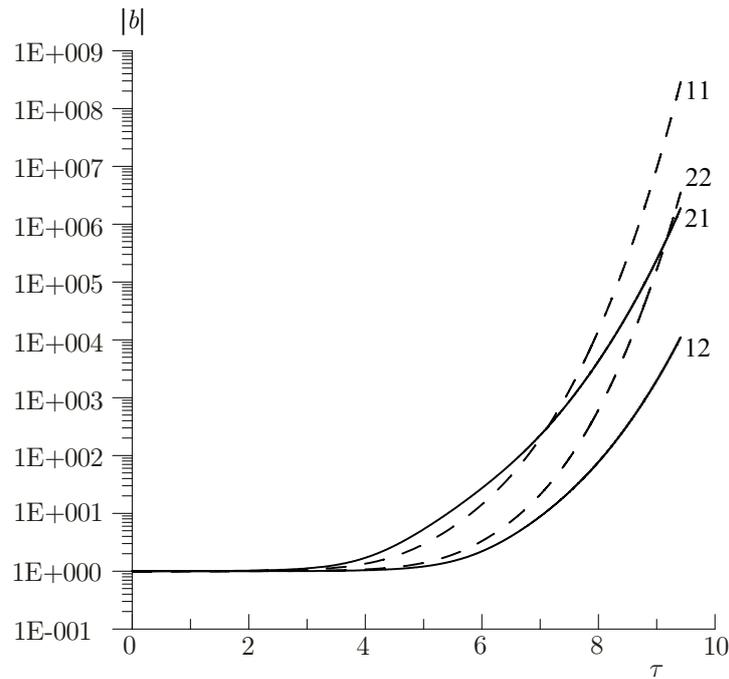


Рис. 5. Эволюция ансамбля (28) в вырожденном случае ($k = q = 0.3$). Гармоники 12 и 21, растущие в соответствии с (22), показаны сплошными линиями, а «стимулируемые» ими гармоники 11 и 22 — пунктиром.

Кроме ансамбля (28), рассчитывалась эволюция системы волн с «продольной» ВК (что характерно для однородных течений, см. [11, 20, 21]),

$$\mathbf{k}_0 = (3k, 0), \quad \mathbf{k}_{11} = (k, -2q), \quad \mathbf{k}_{12} = (k, q), \quad \mathbf{k}_{21} = (2k, -q), \quad \mathbf{k}_{22} = (2k, 2q),$$

а также «расширенного» ансамбля, содержащего, помимо ВК, по четыре волны первого и второго уровней,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= (3k, q), \quad \mathbf{k}_{11} = (k, -3q), \quad \mathbf{k}_{12} = (k, -q), \quad \mathbf{k}_{13} = (k, q), \quad \mathbf{k}_{14} = (k, 3q), \\ \mathbf{k}_{21} &= (2k, -2q), \quad \mathbf{k}_{22} = (2k, 0), \quad \mathbf{k}_{23} = (2k, 2q), \quad \mathbf{k}_{24} = (2k, 4q). \end{aligned} \quad (31)$$

Эти расчеты тоже продемонстрировали переход от экспоненциального (на начальном этапе) роста амплитуд к взрывному, с $\alpha_1 = 6$ и $\alpha_2 = 3$. Эволюция «расширенного» ансамбля волн показана на рисунке 7.

4.3.2. Ансамбль с пятью уровнями

В качестве примера была рассчитана эволюция «минимального» ансамбля, содержащего, кроме ВК, по две волны на всех уровнях с первого по четвертый,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= (5k, 0), \quad \mathbf{k}_{11} = (k, -4q), \quad \mathbf{k}_{12} = (k, q), \quad \mathbf{k}_{21} = (2k, -3q), \quad \mathbf{k}_{22} = (2k, 2q), \\ \mathbf{k}_{31} &= (3k, -2q), \quad \mathbf{k}_{32} = (3k, 3q), \quad \mathbf{k}_{41} = (4k, -q), \quad \mathbf{k}_{42} = (4k, 4q), \end{aligned} \quad (32)$$

при $k = 0.2$, $q = 0.3$. Результаты расчета, представленные на рисунке 8, показывают, что и в этом случае экспоненциальный рост амплитуд сменяется взрывным, но, как и должно быть, с другими показателями: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$ и $\alpha_4 = 1$ (см. (27), $M = 5$).

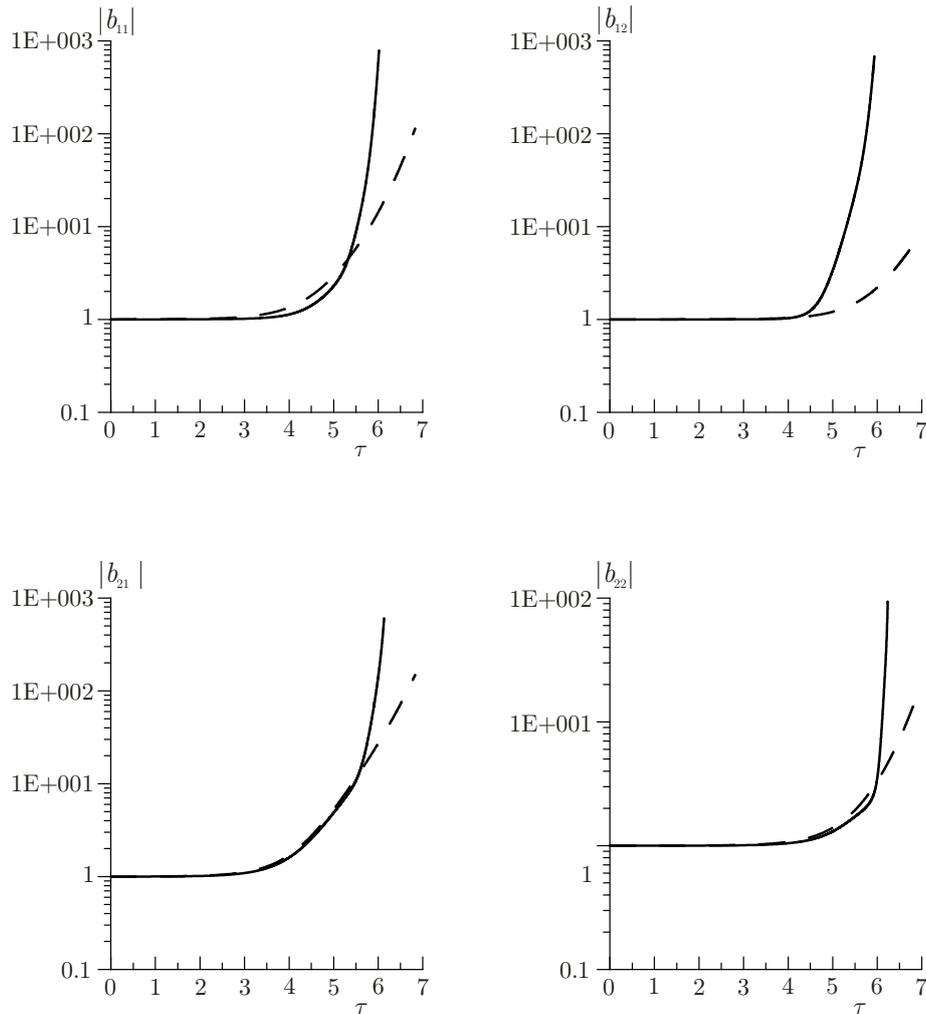


Рис. 6. Сопоставление роста гармоник ансамбля (28) в невырожденном ($k = 0.3, q = 0.5$, сплошные линии) и вырожденном ($k = q = 0.3$, пунктир) случаях.

5. Обсуждение результатов

Основной результат работы — эволюционные уравнения (18) (и их обобщение (23)), которые описывают трехволновое взаимодействие волн в резко стратифицированных сдвиговых течениях типа пограничного слоя с большими числами Рейнольдса. Их структура и свойства в значительной мере определяются двумя тонкими слоями, которым принадлежит ключевая роль в формировании и развитии возмущений, — критическим слоем и пикноклином. На линейной стадии эволюции эти слои совместно определяют дисперсионные свойства и устойчивость собственных колебаний течения, а с переходом на слабонелинейную стадию главную роль начинает играть КС, в котором протекают все основные нелинейные процессы. В рассматриваемой нами задаче пикноклин фактически погружен в нестационарный КС, структура течения внутри которого быстро меняется со временем. Поэтому и дисперсионные, и нелинейные члены эволюционных уравнений зависят от предыстории развития возмущения, и, как следствие, НЭУ представляют собой систему интегральных уравнений.

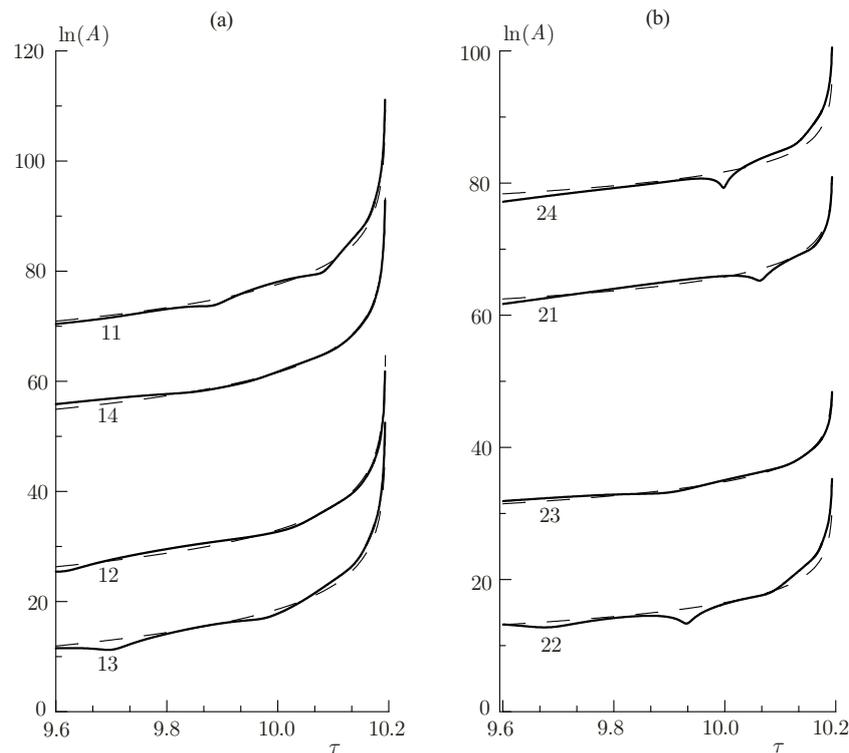


Рис. 7. Зависимость от времени амплитуд волн (сплошные линии) ансамбля (31) при $k = 0.3$, $q = 0.4$: (а) — волны первого уровня, (б) — волны второго уровня. Номера гармоник указаны цифрами, асимптотики (24) показаны пунктиром.

«Привязка» основных нелинейных процессов к КС в значительной мере определяет их свойства. Так, трехволновое взаимодействие внутри КС принципиально отличается от «стандартного» [19] тем, что здесь есть только процессы, аналогичные «распадам» (за них отвечают нелинейные члены уравнений (18b), (18c), но нет сопоставимых по интенсивности обратных им процессов «слияния» ($\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}_1$), о чем свидетельствует отсутствие нелинейного члена в уравнении (18a). Впервые эта особенность была обнаружена при изучении взаимодействия гармоники с субгармоникой в однородном пограничном слое [22] (см. также [11, 23]) — единственного в таких течениях эффективного трехволнового процесса. Проведенный выше анализ показывает, что то же самое происходит при взаимодействии внутри КС любых трех волн, удовлетворяющих условию треугольника (1). По этой причине трехволновое взаимодействие в сдвиговых течениях следует интерпретировать как каталитическое действие волны \mathbf{k}_1 на процесс развития волн \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 , отказавшись от традиционного представления о распадах и слияниях волн. Заметим, что волны \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 , вообще говоря, могут влиять на эволюцию волны \mathbf{k}_1 , но только через взаимодействия более высоких порядков (см., напр., [11]), которые здесь не рассматриваются, или через совместное с \mathbf{k}_1 участие в других триадах.

Следует подчеркнуть, что каталитическое действие каждой волны распространяется только вниз по спектру, на волны с меньшими k , и это оказывает существенное влияние на развитие возмущений. В самом деле, на линейной стадии спектр волн, составляющих возмущение, ограничен по k (хотя бы границами области неустойчивости, см. рис. 2). На стадии нелинейной эволюции границы спектра, как правило, меняются, но пока главным остается трехволновое взаимодействие, спектр может расширяться только в сторону меньших k ,

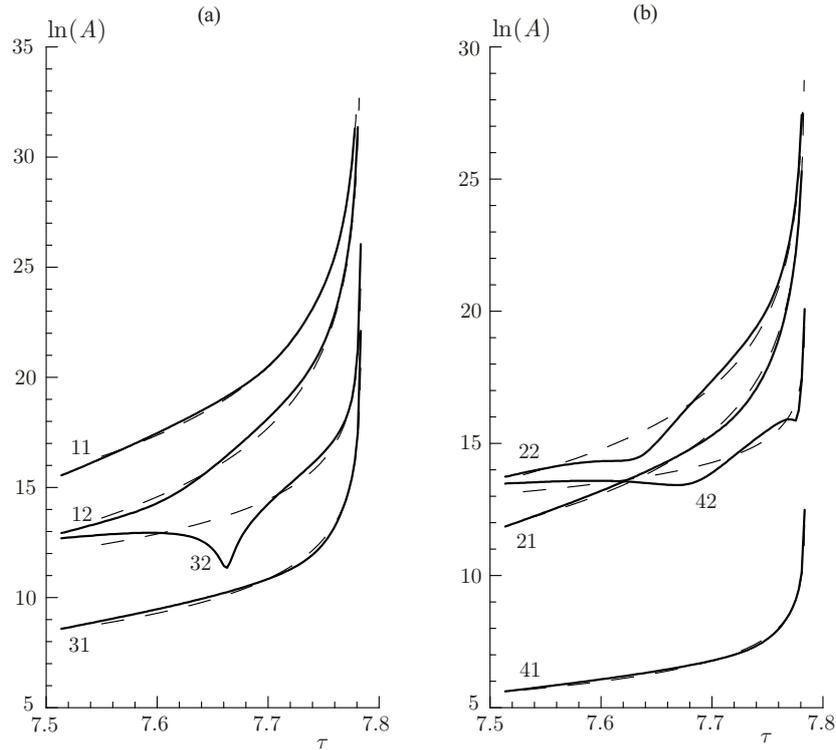


Рис. 8. Эволюция ансамбля (32) при $k = 0.2$, $q = 0.3$: (a) — волны первого и третьего уровней, (b) — волны второго и четвертого уровней (обозначения аналогичны используемым на рис. 7).

причем, как показывают расчеты, быстрее других растут как раз длинные волны. Характерное же для нелинейных процессов ускоренное развитие коротковолновой части спектра откладывается до вступления в игру взаимодействий более высоких порядков.

Согласно линейной теории, в достаточно широкой области спектра рассмотренные нами волны Холмбо (в отличие, например, от ТШ-волн) обладают слабой дисперсией, т. е. имеют очень близкие фазовые скорости. Вследствие этого индивидуальные КС многих волн сливаются в общий КС, что создает благоприятные условия для их эффективного и многообразного нелинейного взаимодействия. В частности, каждая волна может участвовать во многих резонансных триадах. Тогда, с одной стороны, ее эволюция будет определяться суммой вкладов от взаимодействий во всех таких триадах (см. (23)), а с другой — сама эта волна будет влиять на развитие множества своих «компаньонов». Как показано выше, трехволновые взаимодействия внутри ансамблей, содержащих несколько взаимосвязанных триад, приводят к взрывному росту (24), в отличие от более медленного роста (22), характерного для изолированной триады (см. рис. 6). Качественный анализ возможного поведения решений НЭУ (23) для таких ансамблей привел нас к идее «распределения» волн по уровням, а численные расчеты подтвердили ее обоснованность, по крайней мере, при небольшом числе уровней M . В частности, эти расчеты показали (см. рис. 4, 7, 8), что входящие в ансамбль волны растут, в конечном счете, по взрывному закону с показателем роста, зависящим от номера уровня m (см. (27)): наибольший показатель $\alpha_1 > 3$ принадлежит волнам первого уровня, $\alpha_2 = 3$ и α_m линейно уменьшается с m до нуля на верхнем (M -м) уровне, который занимает волна-катализатор, растущая экспоненциально с линейным инкрементом.

Нельзя не отметить, однако, что чем больше волн и уровней в ансамбле, тем менее гладким выглядит переход на конечную стадию развития, и можно указать по крайней мере два способствующих тому обстоятельства. Во-первых, чем меньше число уровней M , тем выше скорость роста волн первого уровня, и максимум показателя роста $\alpha_1 = 6$ достигается в трехуровневых ансамблях. Как видно из рисунка 3 (см. также [17]), в пространстве волновых векторов есть достаточно обширные области, в которых инкремент мало отличается от максимального. Поэтому на начальном этапе эволюции ВК с примерно равной эффективностью стимулирует рост волн, принадлежащих различным уровням, и быстрее должны расти те волны, которые интенсивнее взаимодействуют между собой. Представляется правдоподобным, что вначале выделяются и быстро растут несколько подансамблей с небольшим числом уровней, и лишь затем, в ходе взаимодействия с другими членами ансамбля, происходит «выравнивание» темпов роста на всех уровнях в соответствии с (27). Во-вторых, давайте еще раз посмотрим, как получаются соотношения между показателями роста, приводящие к (27). В известной мере, показатели роста формируются сверху вниз: скорость роста на n -м уровне есть результат взаимодействия волн $(n+1)$ -го уровня с волнами первого уровня, как наиболее быстро растущими. Однако волна первого уровня должна сначала *стать* самой быстрорастущей, к тому же при взаимодействии она существенно отстает по времени от своего партнера — запаздывание ее аргумента в $(n+1)$ раз больше (см. уравнение (23)), — и это не может не сказаться на темпе роста волны n -го уровня. Как следствие, в ансамблях с большим числом уровней развитие колебаний должно идти достаточно сложным образом, и потребуются значительные усилия, чтобы как следует его изучить.

В этой статье мы ограничились трехволновым приближением. Оценим пределы его применимости. При переходе M -уровневого ансамбля на стадию взрывного роста масштаб КС, $L \sim \ell/(\tau_* - \tau)$, довольно быстро становится больше ℓ , и дисперсия фактически перестает влиять на развитие возмущения (так как в левых частях (23) $|P_1| \gg |P_2|$, см. § 4.2). Кроме того, из-за различия в показателях роста, амплитуды волн разных уровней приобретают разные порядки величины ε_m , и скейлинг (14) перестает выполняться. Пока основным взаимодействием остается трехволновое, на смену (14) приходят соотношения

$$\varepsilon_m = \ell^3 (L/\ell)^{\alpha_m}, \quad 0 < m < M. \quad (33)$$

Опираясь на них, оценим вклады процессов более высокого порядка. Для этого вернемся к выводу условий шивки (см. § 3.1). Если $L \gg \ell$, шивка внутреннего решения с внешними производится на периферии КС, т. е. при $L \ll |z - z_N| \ll 1$. С учетом (33) внешние решения вносят в условия шивки волн m -го уровня вклад $O(\varepsilon_m L)$. Во внутреннем решении вклад трехволновых процессов такой же (m_i нумеруют уровни взаимодействующих волн):

$$\max_{m=m_1-m_2} (\varepsilon_{m_1} \varepsilon_{m_2} / L^2) = \ell^3 L \max_{m_2} (L/\ell)^{(2M-m-2m_2)\Delta\alpha-3} \stackrel{m_2=1}{=} \varepsilon_m L.$$

Далее, нетрудно убедиться, что в НЭУ волн m -го уровня вклад могут давать четырехволновые взаимодействия двух типов, $m = m_1 + m_2 - m_3$ и $m = m_1 - m_2 - m_3$. Одним и тем же m_2 и m_3 в процессах первого типа отвечают волны с меньшим m_1 , поэтому вклад таких процессов больше. Оценка этого вклада,

$$\max \frac{\varepsilon_{m_1} \varepsilon_{m_2} \varepsilon_{m_3}}{L^4} = \ell^3 L^2 \max_{m_3} \left(\frac{L}{\ell} \right)^{(3M-m-2m_3)\Delta\alpha-6} = \ell^3 L^2 \left(\frac{L}{\ell} \right)^{(2M-m)\Delta\alpha-3} = \varepsilon_m L^2 \left(\frac{L}{\ell} \right)^{2\Delta\alpha},$$



показывает, что он станет одного порядка с трехволновым, когда

$$L = L_4 = O\left(\ell^{\frac{2\Delta\alpha}{1+2\Delta\alpha}}\right) = O\left(\ell^{\frac{6}{M+4}}\right), \quad \varepsilon_m = O\left(\ell^{\frac{3(m+4)}{M+4}}\right),$$

и превзойдет его при дальнейшем росте L . Следовательно, трехволновое приближение корректно описывает лишь часть слабонелинейной стадии развития M -уровневого ансамбля, а на заключительном ее этапе, при $L_4 < L < 1$, нужно учитывать и процессы более высоких порядков, чему будет посвящена отдельная работа.

Приложение А: Аналитическое решение уравнений (18b), (18c)

Рассмотрим изолированную триаду волн. При $\tau \rightarrow -\infty$ их нелинейное взаимодействие дает малые поправки к (20), которые можно найти последовательными приближениями. Вычислив несколько итераций, замечаем, что решение следует искать в виде рядов

$$A_2(\tau) = e^{k_2(\Delta_2 - iZ_2)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} e^{2nk_1\Delta_1\tau} + e^{k_2(\Delta_{2*} - iZ_{2*})\tau} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} e^{2nk_1\Delta_1\tau},$$

$$A_3(\tau) = e^{k_3(\Delta_3 - iZ_3)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(1)} e^{2nk_1\Delta_1\tau} + e^{k_3(\Delta_{3*} - iZ_{3*})\tau} \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(2)} e^{2nk_1\Delta_1\tau},$$

где, очевидно, $B_0^{(1)} = A_{20}$, $D_0^{(1)} = A_{30}$ и введены обозначения

$$k_{2,3}\Delta_{2*,3*} = k_1\Delta_1 + k_{3,2}\Delta_{3,2}, \quad k_{2,3}Z_{2*,3*} = k_1Z_1 - k_{3,2}Z_{3,2}.$$

Подставляя в (18b), (18c), получаем рекуррентные соотношения ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\left(1 - \frac{\mathcal{N}_2^{(n)}}{\mathcal{N}_2}\right) \overline{\left(1 - \frac{\mathcal{N}_{3*}^{(n-1)}}{\mathcal{N}_3}\right)} B_n^{(1)} = \frac{\tilde{P}_2 \tilde{P}_3 |A_{10}|^2 B_{n-1}^{(1)}}{\{[(2n-1)k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + ik_2(Z_1 - Z_2)]^2 - k_3^2\Delta_1^2\}^3},$$

$$\left(1 - \frac{\mathcal{N}_3^{(n)}}{\mathcal{N}_3}\right) \overline{\left(1 - \frac{\mathcal{N}_{2*}^{(n-1)}}{\mathcal{N}_2}\right)} D_n^{(1)} = \frac{\tilde{P}_2 \tilde{P}_3 |A_{10}|^2 D_{n-1}^{(1)}}{\{[(2n-1)k_1\Delta_1 + k_3\Delta_3 + ik_3(Z_1 - Z_3)]^2 - k_2^2\Delta_1^2\}^3},$$

$$\left(1 - \frac{\mathcal{N}_{2*}^{(n)}}{\mathcal{N}_2}\right) B_n^{(2)} = \frac{\tilde{P}_2 A_{10} \bar{D}_n^{(1)}}{[2nk_1\Delta_1 + k_3(\Delta_1 + \Delta_3) - ik_3(Z_1 - Z_3)]^3},$$

$$\left(1 - \frac{\mathcal{N}_{3*}^{(n)}}{\mathcal{N}_3}\right) D_n^{(2)} = \frac{\tilde{P}_3 A_{10} \bar{B}_n^{(1)}}{[2nk_1\Delta_1 + k_2(\Delta_1 + \Delta_2) - ik_2(Z_1 - Z_2)]^3},$$

где

$$\mathcal{N}_m^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dZ N(Z)}{(Z - Z_m - i\Delta_m - 2ink_1\Delta_1/k_m)^2}, \quad \mathcal{N}_m \equiv \mathcal{N}_m^{(0)}; \quad m = 2, 3, 2*, 3*, \quad k_{i*} \equiv k_i;$$

$$\tilde{P}_2 = \frac{2k_3^3 V_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3}}{k_1^3 a_{*2}}, \quad \tilde{P}_3 = \frac{2k_2^3 V_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}}{k_1^3 a_{*3}}.$$

С помощью (7) находим, что при $n\Delta_1 \gg 1$

$$\mathcal{N}_m^{(n)} = -(\Delta_m - iZ_m + 2nk_1\Delta_1/k_m)^{-2} + O((n\Delta_1)^{-4}),$$

так что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{2,2^*}^{(n)}/\mathcal{N}_2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{3,3^*}^{(n)}/\mathcal{N}_3$ сходятся абсолютно; следовательно, абсолютно сходятся и произведения

$$e_{2,3} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mathcal{N}_{2,3}^{(n)}}{\mathcal{N}_{2,3}}\right) \quad \text{и} \quad e_{2^*,3^*} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\mathcal{N}_{2^*,3^*}^{(n)}}{\mathcal{N}_{2,3}}\right).$$

Конечные произведения (до $n = j$ включительно) будем обозначать $e_m^{(j)}$.

В результате получаем ($e_2^{(0)} = e_3^{(0)} = e_{2^*}^{(-1)} = e_{3^*}^{(-1)} \equiv 1$):

$$\begin{aligned} A_2(\tau) &= A_{20} e^{k_2(\Delta_2 - iZ_2)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(\zeta_2) \Gamma(\zeta_{2^*})]^3 T^n}{e_2^{(n)} \bar{e}_{3^*}^{(n-1)} [\Gamma(\zeta_2 + n) \Gamma(\zeta_{2^*} + n)]^3} + \\ &+ \frac{\tilde{P}_2 A_{10} \bar{A}_{30}}{(2k_1 \Delta_1)^3} e^{k_2(\Delta_{2^*} - iZ_{2^*})\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(\bar{\zeta}_3) \Gamma(\bar{\zeta}_{3^*})]^3 T^n}{e_{2^*}^{(n)} \bar{e}_3^{(n)} [\Gamma(\bar{\zeta}_3 + n + 1) \Gamma(\bar{\zeta}_{3^*} + n)]^3}, \\ A_3(\tau) &= A_{30} e^{k_3(\Delta_3 - iZ_3)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(\zeta_3) \Gamma(\zeta_{3^*})]^3 \bar{T}^n}{\bar{e}_{2^*}^{(n-1)} e_3^{(n)} [\Gamma(\zeta_3 + n) \Gamma(\zeta_{3^*} + n)]^3} + \\ &+ \frac{\tilde{P}_3 A_{10} \bar{A}_{20}}{(2k_1 \Delta_1)^3} e^{k_3(\Delta_{3^*} - iZ_{3^*})\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(\bar{\zeta}_2) \Gamma(\bar{\zeta}_{2^*})]^3 \bar{T}^n}{\bar{e}_2^{(n)} e_{3^*}^{(n)} [\Gamma(\bar{\zeta}_2 + n + 1) \Gamma(\bar{\zeta}_{2^*} + n)]^3}, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

где экспоненциальное время T введено в основном тексте (после (22)) и

$$\zeta_{2,3} = \frac{k_{2,3}[\Delta_1 + \Delta_{2,3} + i(Z_1 - Z_{2,3})]}{2k_1 \Delta_1}, \quad \zeta_{2^*,3^*} = \frac{k_{3,2}(\Delta_1 + \Delta_{3^*,2^*}) + ik_{2,3}(Z_1 - Z_{2,3})}{2k_1 \Delta_1}.$$

При больших n $e_m^{(n)}$ можно приближенно заменить на e_m . Отношение соседних членов любого из входящих в (A1) рядов,

$$\left| \frac{S_n}{S_{n-1}} \right| \approx \frac{|T|}{|(n + \zeta_m)(n + \zeta_{m^*})|^3} \approx \frac{|T|}{n^6},$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так что при любом T ряды сходятся абсолютно. Для вычисления асимптотических ($|T| \gg 1$) разложений (A1) заметим, что члены этих рядов максимальны (по модулю) при $n = O(T^{1/6})$, заменим суммирование интегрированием и воспользуемся методом перевала. В результате получим формулы (22) с

$$C_{2,3}^{(1)} = \frac{[\Gamma(\zeta_{2,3}) \Gamma(\zeta_{2^*,3^*})]^3}{\sqrt{6} (2\pi)^{5/2} e_{2,3} \bar{e}_{3^*,2^*}}, \quad C_{2,3}^{(2)} = \frac{\tilde{P}_{2,3} [\Gamma(\bar{\zeta}_{3,2}) \Gamma(\bar{\zeta}_{3^*,2^*})]^3}{\sqrt{6} (2\pi)^{5/2} (2k_1 \Delta_1)^3 e_{2^*,3^*} \bar{e}_{3,2}}.$$

Приложение В: О численном решении эволюционных уравнений

Для удобства численных расчетов эволюционные уравнения следует преобразовать. Алгоритм преобразований продемонстрируем на примере НЭУ (29). Первым делом, выделим экспоненциальный (на начальном этапе) рост волн,

$$A_0(\tau) = A_0 \exp(\gamma_0 - i\omega_0), \quad A_{mn}(\tau) = A_{mn0} b_{mn}(\tau) \exp[(\gamma_{mn} - i\omega_{mn})\tau], \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} b_{mn}(\tau) = 1,$$



где m — номер уровня, n — номер волны на этом уровне, A_0 и A_{mn0} — произвольные «начальные» комплексные амплитуды волн, и представим $\gamma_{mn} - i\omega_{mn} = mk(\Delta_{mn} - iZ_{mn})$, $\gamma_0 - i\omega_0 = Mk(\Delta_0 - iZ_0)$, где M — число уровней. Затем перейдем к Фурье-образу $N(Z)$,

$$N_F(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ N(Z) e^{-i\kappa Z},$$

и с помощью подходящих замен переменной интегрирования t в нелинейных членах НЭУ преобразуем запаздывающие аргументы амплитуд к виду $(\tau - pt)$, с как можно меньшими натуральными p . В результате уравнения (29) приобретут вид

$$\begin{aligned} b_{11}(\tau) + \frac{K_{11}^2 \tilde{R}}{a_{*11}} \int_0^{\infty} dt t N_F(kt) b_{11}(\tau - t) e^{-(\gamma_{11} - i\omega_{11})t} = \\ = \frac{8V_{11}^{(0)} A_0 \bar{A}_{220}}{27a_{*11} A_{110}} e^{[\gamma_0 + \gamma_{22} - \gamma_{11} - i(\omega_0 - \omega_{11} - \omega_{22})]\tau} \int_0^{\infty} dt t^2 \bar{b}_{22}(\tau - t) e^{-2k[\Delta_0 + \Delta_{22} - i(Z_0 - Z_{22})]t} + \\ + \frac{V_{11}^{(1)} A_{210} \bar{A}_{120}}{a_{*11} A_{110}} e^{[\gamma_{21} + \gamma_{12} - \gamma_{11} - i(\omega_{21} - \omega_{11} - \omega_{12})]\tau} \int_0^{\infty} dt t^2 b_{21}(\tau - t) \bar{b}_{12}(\tau - 2t) e^{-2k[\Delta_{21} + \Delta_{12} - i(Z_{21} - Z_{12})]t}, \\ b_{12}(\tau) + \frac{K_{12}^2 \tilde{R}}{a_{*12}} \int_0^{\infty} dt t N_F(kt) b_{12}(\tau - t) e^{-(\gamma_{12} - i\omega_{12})t} = \\ = \frac{8V_{12}^{(0)} A_0 \bar{A}_{210}}{27a_{*12} A_{120}} e^{[\gamma_0 + \gamma_{21} - \gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_{12} - \omega_{21})]\tau} \int_0^{\infty} dt t^2 \bar{b}_{21}(\tau - t) e^{-2k[\Delta_0 + \Delta_{21} - i(Z_0 - Z_{21})]t} + \\ + \frac{V_{12}^{(1)} A_{210} \bar{A}_{110}}{a_{*12} A_{120}} e^{[\gamma_{21} + \gamma_{11} - \gamma_{12} - i(\omega_{21} - \omega_{11} - \omega_{12})]\tau} \int_0^{\infty} dt t^2 b_{21}(\tau - t) \bar{b}_{11}(\tau - 2t) e^{-2k[\Delta_{21} + \Delta_{11} - i(Z_{21} - Z_{11})]t}, \\ b_{21}(\tau) + \frac{K_{21}^2 \tilde{R}}{a_{*21}} \int_0^{\infty} dt t N_F(2kt) b_{21}(\tau - t) e^{-(\gamma_{21} - i\omega_{21})t} = \\ = \frac{V_{21} A_0 \bar{A}_{120}}{27a_{*21} A_{210}} e^{[\gamma_0 + \gamma_{12} - \gamma_{21} - i(\omega_0 - \omega_{12} - \omega_{21})]\tau} \int_0^{\infty} dt t^2 \bar{b}_{12}(\tau - t) e^{-k[\Delta_0 + \Delta_{12} - i(Z_0 - Z_{12})]t}, \\ b_{22}(\tau) + \frac{K_{22}^2 \tilde{R}}{a_{*22}} \int_0^{\infty} dt t N_F(2kt) b_{22}(\tau - t) e^{-(\gamma_{22} - i\omega_{22})t} = \\ = \frac{V_{22} A_0 \bar{A}_{110}}{27a_{*22} A_{220}} e^{[\gamma_0 + \gamma_{11} - \gamma_{22} - i(\omega_0 - \omega_{11} - \omega_{22})]\tau} \int_0^{\infty} dt t^2 \bar{b}_{11}(\tau - t) e^{-k[\Delta_0 + \Delta_{11} - i(Z_0 - Z_{11})]t}. \quad (B1) \end{aligned}$$

Поскольку в коэффициенты при нелинейных членах входят A_0 и A_{mn0} , решение (B1) зависит, вообще говоря, от восьми произвольных вещественных параметров (пяти модулей амплитуд и трех комбинаций их аргументов).

На линейной стадии каждая волна растет экспоненциально, с собственными инкрементом и частотой, задаваемыми дисперсионным уравнением (21). Нелинейная поправка

к этому закону нарастает со скоростью, определяемой суммой инкрементов ответственных за нее гармоник, и может довольно быстро стать конкурентоспособной, если собственный инкремент мал. При этом рост остается экспоненциальным, но с «вынужденным» инкрементом. На этом основан применяемый нами подход к расчету эволюции ансамблей волн.

Наибольший инкремент в наших расчетах, как обычно (см., напр., [22, 23]), принадлежит ВК. Из членов ансамбля выбираем еще несколько наиболее быстро растущих гармоник (назовем их базовыми) так, чтобы их взаимодействие с ВК и между собой «генерировало» все остальные гармоники. При этом инкременты и частоты ВК и базовых гармоник определяются уравнением (21), а их «начальные» амплитуды произвольны и являются параметрами задачи. Амплитуды же, инкременты и частоты «вынужденных» колебаний вычисляются с помощью НЭУ. Так, в ансамбле (28) в качестве базовой удобно взять гармонику 21. В этом случае

$$\begin{aligned}\gamma_{11} - i\omega_{11} &= \gamma_0 + 2\gamma_{21} + i(\omega_0 - 2\omega_{21}), \\ \gamma_{22} - i\omega_{22} &= 2(\gamma_{12} - i\omega_{12}) = 2[\gamma_0 + \gamma_{21} - i(\omega_0 - \omega_{21})], \\ A_{120} &= \frac{2V_{12}^{(0)} A_0 \bar{A}_{210}}{(3k\Delta)^3 D_{12}} \equiv d_{12} A_0 \bar{A}_{210}, \quad A_{110} = \frac{2V_{11}^{(1)} A_{210} \bar{A}_{120}}{(6k\Delta)^3 D_{11}} \equiv d_{11} \bar{A}_0 A_{210}^2, \\ A_{220} &= \frac{2V_{22} A_0 \bar{A}_{110}}{(12k\Delta)^3 D_{22}} \equiv d_{22} (A_0 \bar{A}_{210})^2,\end{aligned}$$

где

$$D_{mn} = a_{*mn} - K_{mn}^2 \tilde{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dZ N(Z)}{(mkZ - \omega_{mn} - i\gamma_{mn})^2}, \quad \Delta = \Delta_0 + \Delta_{21} - i(Z_0 - Z_{21}).$$

После перехода к «экспоненциальному» времени $T = T_0 e^{\mu\tau}$ и несложных преобразований получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}b_{11}(T) &= \frac{K_{11}^2 \tilde{R}}{\mu^2 a_{*11}} \int_0^1 du u^{\lambda_{11}} N_F\left(-\frac{k}{\mu} \ln u\right) b_{11}(uT) + v_{11}^{(0)} |A_0|^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2\gamma_0}{\mu}} \int_0^1 du u^{\lambda_{11}^{(1)}} \ln^2 u \bar{b}_{22}(uT) + \\ &+ v_{11}^{(1)} \int_0^1 du u^{\lambda_{11}^{(2)}} \ln^2 u b_{21}(uT) \bar{b}_{12}(u^2 T), \\ b_{12}(T) &= \frac{K_{12}^2 \tilde{R}}{\mu^2 a_{*12}} \int_0^1 du u^{\lambda_{12}} N_F\left(-\frac{k}{\mu} \ln u\right) b_{12}(uT) + v_{12}^{(0)} \int_0^1 du u^{\lambda_{12}^{(1)}} \ln^2 u \bar{b}_{21}(uT) + \\ &+ v_{12}^{(1)} |A_{210}|^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2\gamma_{21}}{\mu}} \int_0^1 du u^{\lambda_{12}^{(2)}} \ln^2 u b_{21}(uT) \bar{b}_{11}(u^2 T), \\ b_{21}(T) &= \frac{K_{21}^2 \tilde{R}}{\mu^2 a_{*21}} \int_0^1 du u^{\lambda_{21}} N_F\left(-\frac{2k}{\mu} \ln u\right) b_{21}(uT) + v_{21} |A_0|^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2\gamma_0}{\mu}} \int_0^1 du u^{\lambda_{21}^{(1)}} \ln^2 u \bar{b}_{12}(uT), \\ b_{22}(T) &= \frac{K_{22}^2 \tilde{R}}{\mu^2 a_{*22}} \int_0^1 du u^{\lambda_{22}} N_F\left(-\frac{2k}{\mu} \ln u\right) b_{22}(uT) + v_{22} \int_0^1 du u^{\lambda_{22}^{(1)}} \ln^2 u \bar{b}_{11}(uT).\end{aligned}\quad (B2)$$



Здесь в коэффициенты $v_{mn}^{(i)}$ включены все постоянные множители (кроме амплитуд) и

$$\lambda_{mn} = \frac{\gamma_{mn} - i\omega_{mn}}{\mu} - 1, \quad \lambda_{11}^{(1)} = \frac{4k}{\mu}(\Delta_0 + \bar{\Delta}) - 1, \quad \lambda_{11}^{(2)} = \frac{6k\bar{\Delta}}{\mu} - 1, \quad \lambda_{12}^{(1)} = \frac{2k\Delta}{\mu} - 1,$$

$$\lambda_{12}^{(2)} = \frac{2k}{\mu}(2\Delta_{21} + 3\Delta) - 1, \quad \lambda_{21}^{(1)} = \frac{2k}{\mu}(\Delta_0 + \bar{\Delta}) - 1, \quad \lambda_{22}^{(1)} = \frac{4k\Delta}{\mu} - 1.$$

Решения уравнений (B2) зависят от двух произвольных параметров, $|A_0|^2$ и $|A_{210}|^2$ (T_0 и μ введены искусственно и их значения выбираются из соображений удобства), и должны удовлетворять начальным условиям $b_{mn}(0) = 1$. При численном решении интегралы вычисляются по методу Симпсона со сгущением сетки на концах интервала интегрирования.

Список литературы

- [1] Maslowe S. A. Critical layers in shear flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1986, vol. 18, pp. 405–432.
- [2] Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости // *УФН*, 1970, т. 102, № 2, с. 185–210.
- [3] Тимофеев А. В. Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2000. 224 с.
- [4] Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // *Нелинейные волны* / А. В. Гапонов-Грегов (ред.). М.: Наука, 1979, с. 68–104.
- [5] Fabrikant A. Plasma-hydrodynamic analogy for waves and vortices in shear flows // *Sound-flow interactions* / Aurégan Y. et al. (Eds). (Lect. Notes Phys. Monogr., vol. 586.) New York: Springer, 2002, pp. 192–209.
- [6] Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 107 с.
- [7] Шакина Н. П. Гидродинамическая неустойчивость в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 310 с.
- [8] Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // *УФН*, 1997, т. 167, № 11, с. 1137–1167.
- [9] Чурилов С. М., Шухман И. Г. Критический слой и нелинейная эволюция возмущений в слабонадкритических сдвиговых течениях // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 1995, т. 31, № 4, с. 557–569.
- [10] Squire H. B. On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1933, vol. 142, pp. 621–628.
- [11] Goldstein M. E. The role of nonlinear critical layers in boundary layer transition // *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1995, vol. 352, pp. 425–442.
- [12] Holmboe J. On the behaviour of symmetric waves in stratified shear layers // *Geofysiske Publikasjoner*, 1962, vol. 24, pp. 67–112.
- [13] Carpenter J. R., Tedford E. W., Rahmani M., Lawrence G. A. Holmboe wave fields in simulation and experiment // *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 648, pp. 205–223.
- [14] Чурилов С. М. Об устойчивости стратифицированных сдвиговых течений с монотонным профилем скорости без точек перегиба // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2004, т. 40, № 6, с. 809–820.
- [15] Churilov S. M. Stability analysis of stratified shear flows with a monotonic velocity profile without inflection points // *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 539, pp. 25–55.
- [16] Churilov S. M. Stability analysis of stratified shear flows with a monotonic velocity profile without inflection points. Part 2. Continuous density variation // *J. Fluid Mech.*, 2008, vol. 617, pp. 301–326.



- [17] Чурилов С. М. О трехмерном характере неустойчивости стратифицированных сдвиговых течений в средах с большим числом Прандтля // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 2010, т. 46, № 2, с. 176–186.
- [18] Smyth W. D., Peltier W. R. Three-dimensional primary instabilities of a stratified, dissipative, parallel flow // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1990, vol. 52, pp. 249–261.
- [19] Craik A. D. D. *Wave interactions and fluid flows*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 325 pp.
- [20] Wu X., Stewart P. A. Interaction of phase-locked modes: A new mechanism for the rapid growth of three-dimensional disturbances // *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 316, pp. 335–372.
- [21] Wu X., Stewart P. A., Cowley S. J. On the catalytic role of the phase-locked interaction of Tollmien–Schlichting waves in boundary-layer transition // *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 590, pp. 265–294.
- [22] Goldstein M. E., Lee S. S. Fully coupled resonant-triad interaction in an adverse-pressure-gradient boundary-layer // *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 245, pp. 523–551.
- [23] Wundrow D. W., Hultgren L. S., Goldstein M. E. Interaction of oblique instability waves with a nonlinear plane wave // *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 264, pp. 343–372.
- [24] Churilov S. M. Nonlinear stage of instability development in a stratified shear flow with an inflection-free velocity profile // *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 074101, 13 pp.
- [25] Чурилов С. М. Нелинейная эволюция неустойчивых трехмерных возмущений в резко стратифицированном сдвиговом течении без точек перегиба на профиле скорости // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, с. 159–182.
- [26] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*: Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

Resonant three-wave interaction of waves having a common critical layer

Semyon M. Churilov

Institute of Solar-Terrestrial Physics
134 Lermontov St., Irkutsk, 664033, Russia
churilov@iszf.irk.ru

Within the context of the weakly nonlinear approach, the leading nonlinear contribution to the development of unstable disturbances in shear flows should be made by resonant three-wave interaction, i.e., the interaction of triplets of such waves that have a common critical layer (CL), and their wave vectors form a triangle. Surprisingly, the subharmonic resonance proves to be the only such interaction that has been studied so far. The reason for this is that in many cases, the requirement of having a common CL produces too rigid selection of waves which can participate in the interaction. We show that in a broad spectral range, Holmboe waves in sharply stratified shear flows can have a common CL, and examine the evolution of small ensembles consisting of several interrelated triads of those waves. To do this, the evolution equations are derived which describe the three-wave interaction and have the form of nonlinear integral equations. Analytical and numerical methods are both used to find their solutions in different cases, and it is shown that at the nonlinear stage disturbances increase, as a rule, explosively.

MSC 2010: 76B70, 76E05, 76E20, 76E30

Keywords: shear flow, sharp density stratification, three-wave interactions, critical layer

Received May 12, 2011, accepted May 20, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 257–282 (Russian)

