



УДК: 530.182, 517.518.34

MSC 2010: 65P20, 42C40

Вейвлет-анализ перемежаемости II и III типов

В. В. Афонин, Т. К. Болецкая

Выполнено исследование перемежаемости II и III типа в динамических системах, описываемых дискретными отображениями, с помощью вейвлет-анализа как при отсутствии шума, так и при его наличии.

Ключевые слова: перемежаемость, вейвлет-анализ

Введение

Переход от регулярных режимов колебаний к хаотическим через перемежаемость есть один из так называемых «путей в хаос», наблюдаемый в нелинейных динамических системах даже с малым числом степеней свободы. Это явление представляет собой чередование ламинарных и турбулентных фаз различных длительностей. По мере увеличения управляющего параметра системы длительности ламинарных фаз стремятся к нулю, и в системе устанавливается полный хаос без участков регулярности. Перемежаемость была открыта и разделена на три типа Пома и Манневиллем [1]. Их классификация отражает различные типы локальных бифуркаций (вследствие которых предельный цикл теряет устойчивость), зависящие от критического значения мультипликаторов Флоке λ_C при пересечении единичной окружности на комплексной плоскости. I тип — бифуркация «седло-узел»: $\lambda_C = +1$; III тип — субкритическая субгармоническая бифуркация: $\lambda_C = -1$; II тип — субкритическая бифуркация Хопфа: $\lambda_{C_1} = \lambda_{C_2}^*$, $|\lambda_{C_{1,2}}| = 1$. II тип перемежаемости может наблюдаться в динамических системах с размерностью фазового пространства большей или равной 2, в то время как I и III типы перемежаемости могут наблюдаться и в системах с одномерным фазовым пространством.

Данному явлению посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ. Перемежающееся поведение, а также присущие ему универсальные закономерности исследовались

Получено 9 июля 2011 года

После доработки 3 августа 2011 года

Афонин Владимир Викторович

stein13@bk.ru

Болецкая Татьяна Константиновна

boletskaya@phys.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

644077, Россия, г. Омск, пр. Мира, д. 55а



численно на основе динамики итераций дискретных отображений и систем дифференциальных уравнений [1–3]. Теоретические результаты были подтверждены при исследовании реальных динамических систем: нелинейных электрических цепей [4–6], гидродинамических систем [7–9].

Особый интерес вызывает применение вейвлет-преобразования при исследовании перемежаемости. Вейвлетный анализ [10, 11] является хорошо себя зарекомендовавшим математическим аппаратом, используемым при обработке нестационарных сигналов. С его помощью можно получить не только простое перечисление характерных частот исследуемого сигнала, но и сведения об определенных локальных координатах (временных или пространственных), при которых эти частоты проявляют себя. Первой работой, в которой выполнено исследование перемежаемости с помощью частотно-временного представления сигнала, является [12]. В ней исследовалась перемежаемость I типа на примере динамики итераций логистического отображения с помощью преобразования Габора и дискретного вейвлет-преобразования. Позже для изучения закономерностей перемежаемости I типа был успешно применен аппарат непрерывного вейвлет-преобразования [13].

Влияние шума на перемежаемость I типа ранее аналитически было исследовано в [14] с помощью уравнения Фоккера – Планка. В настоящее время влияние шума на перемежаемость II и III типов исследовано только в суперкритической области [15, 16], т. е. тогда, когда перемежаемость не наблюдается в отсутствие шума.

Целью настоящей работы является исследование перемежаемости II и III типов с помощью вейвлет-анализа как при отсутствии, так и при наличии шума в субкритической области.

1. Перемежаемость III типа при отсутствии шума

Перемежаемость III типа исследовалась на примере динамики итераций отображения

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n - \frac{1-\mu}{2\pi} \cos \left[2\pi \left(x_n - \frac{1}{12} \right) \right] \pmod{1}, \quad (1.1)$$

где $\mu > 0$ — управляющий параметр.

На рисунке 1 представлена характерная для перемежаемости III типа последовательность итераций отображения (1.1) и соответствующее ей вейвлет-преобразование. Как видно из рисунка, поверхность модуля вейвлет-коэффициентов $|W(s, t_0)|$ имеет различную форму в пределах ламинарной и турбулентной фаз, что позволяет с хорошей точностью установить момент окончания ламинарной фазы и начала турбулентной фазы.

Разлагаем в ряд Тейлора выражение (1.1) в окрестности неподвижной точки $x_C = 1/3$ вблизи критического значения управляющего параметра $\mu_C = 0$. Сделав замену переменных $z = x - x_C$ и ограничившись кубическими членами, получаем:

$$z_{n+1} = -(1 + \mu)z_n - \frac{2\pi^2}{3}z_n^3.$$

Полученное выражение соответствует нормальной форме субкритической субгармонической бифуркации. Мультипликатор Флоке в данном случае имеет вид $\lambda_C = -(1 + \mu)$ и при $\mu = \mu_C = 0$ пересекает единичную окружность в точке -1 .

Рассмотрим отображение $f^2(x) = f(f(x))$ (т. е. каждую вторую итерацию отображения (1.1)). Разлагаем его в ряд Тейлора в окрестности неподвижной точки, ограничившись

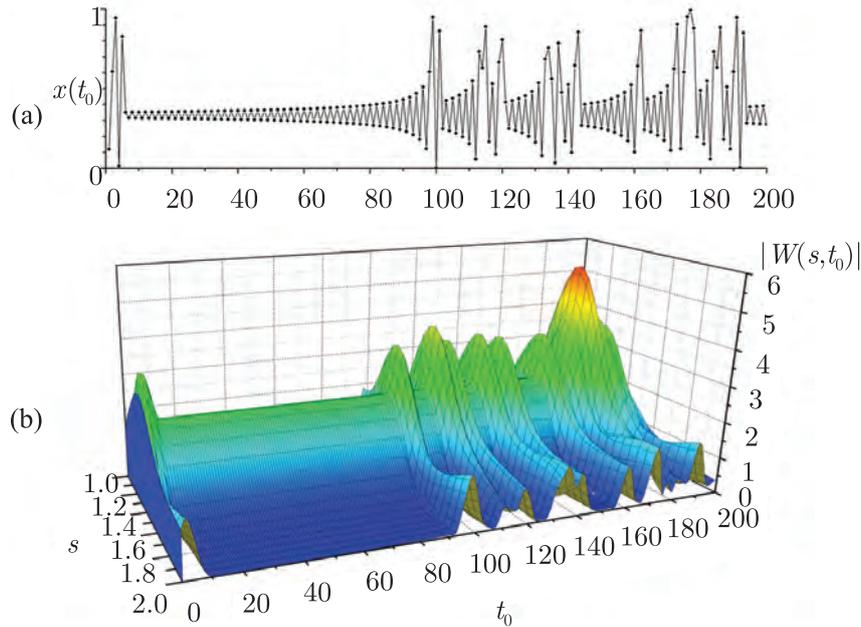


Рис. 1. а) Последовательность итераций отображения (1.1) ($\mu = 0.01$); б) соответствующее ей вейвлет-преобразование (в качестве вейвлета был использован вейвлет Морле [10]).

кубическими членами. Сделаем замену переменных: $y = x - x_C$. Тогда

$$y_{n+1} = (1 + 2\mu)y_n + ay_n^3, \tag{1.2}$$

где $a = 4\pi^2/3$. Учитывая малость величины $|y_{n+1} - y_n|$ во время ламинарных фаз, можно от дискретного уравнения (1.2) перейти к дифференциальному:

$$\frac{dy}{dl} = 2\mu y + ay^3, \tag{1.3}$$

где l — длительность ламинарной фазы. Решая уравнение (1.3), можно получить выражение для длительности ламинарной фазы, начавшейся в точке $y_{in} \in (0; \tilde{y}]$:

$$l(y_{in}) = \frac{1}{4\mu} \ln \frac{\tilde{y}^2(2\mu + ay_{in}^2)}{y_{in}^2(2\mu + a\tilde{y}^2)}.$$

Граница ламинарной области \tilde{y} определялась следующим образом: при $y_n < \tilde{y}$ расстояния между последовательными итерациями удовлетворяет неравенству $|y_{n+1} - y_n| \ll 1$, при $y_n > \tilde{y}$ такое неравенство не выполняется. Для всех μ принималось $\tilde{y} = 0,2$.

Для определения распределения длин ламинарных фаз необходимо знать функцию реинжекции $P_{in}(y_{in})$ — плотность вероятности возвращения итерации из турбулентной области в точку y_{in} ламинарной области. Она была определена численно при трех различных значениях управляющего параметра. Для каждого μ было найдено 65 000 точек первого входа в ламинарную фазу. Интервал $(0; \tilde{y}]$ разбивался на 20 равных частей. Функция реинжекции принималась равной частоте попадания y_{in} в каждую из этих частей, нормированной

на ширину интервала так, чтобы выполнялось $\int_0^{\tilde{y}} P_{in}(y_{in}) dy_{in} = 1$. Как видно из рисунка 2, функцию реинжекции можно считать равномерной на $(0; \tilde{y}]$. Находим распределение длин ламинарных фаз $P(l)$, приняв $P(l) dl = P_{in}(y_{in}) dy_{in}$:

$$P(l) = \frac{2\sqrt{2}\mu^{3/2}(a\tilde{y}^2 + 2\mu) \exp(4\mu l)}{[\exp(4\mu l)(a\tilde{y}^2 + 2\mu) - a\tilde{y}^2]^{3/2}}.$$

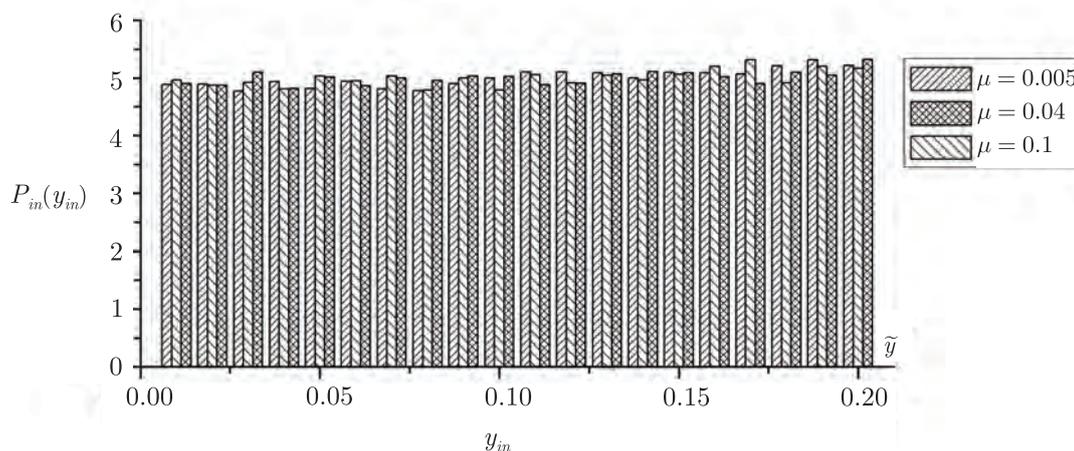


Рис. 2. Функция реинжекции для отображения (1.1).

Далее можно получить зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра:

$$\langle l \rangle = \int_0^{\tilde{y}} P_{in}(y_{in}) l(y_{in}) dy_{in} = \frac{1}{\tilde{y}\sqrt{2a\mu}} \operatorname{arctg} \left(\tilde{y} \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \right).$$

При $a\tilde{y}^2 \gg 2\mu$

$$P(l) \sim \frac{\mu^{3/2} \exp(4\mu l)}{[\exp(4\mu l) - 1]^{3/2}}, \quad (1.4)$$

$$\langle l \rangle \sim \mu^{-1/2}. \quad (1.5)$$

Результаты, полученные с помощью вейвлет-анализа, представлены на рисунках 3 и 4. Аналитические выражения (1.4) и (1.5) подтверждаются.

2. Перемежаемость II типа при отсутствии шума

Перемежаемость II типа исследовалась на примере динамики итераций отображения

$$\begin{cases} x_{n+1} = (x_n \cos \varphi - y_n \sin \varphi) [1 + \mu + a(x_n^2 + y_n^2)] \pmod{[-1; 1]}, \\ y_{n+1} = (x_n \sin \varphi + y_n \cos \varphi) [1 + \mu + a(x_n^2 + y_n^2)] \pmod{[-1; 1]}, \end{cases} \quad (2.1)$$



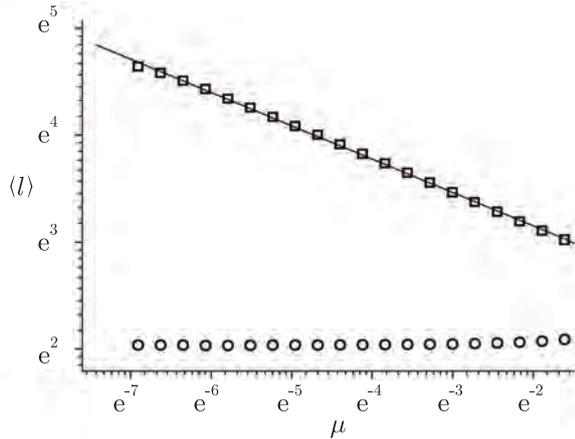


Рис. 3. Зависимости средних длительностей ламинарных (\square) и турбулентных (\circ) фаз от управляющего параметра μ , полученные с помощью вейвлет-анализа.

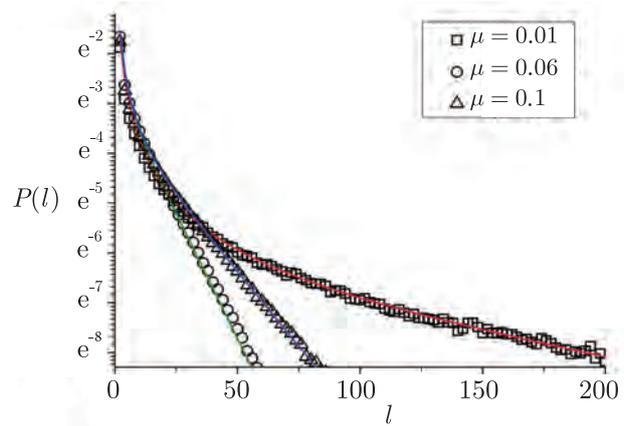


Рис. 4. Распределения длин ламинарных фаз, полученные аналитически (сплошные линии) и с помощью вейвлет-анализа (точки).

$a, \varphi = \text{const}$; μ — управляющий параметр; операция $(\text{mod } [-1; 1])$ означает следующее: если значение i -й итерации превышает 1, то его необходимо уменьшать на 2 до тех пор, пока оно не будет принадлежать отрезку $[-1; 1]$, если же значение i -й итерации меньше -1 , то его необходимо увеличивать на 2 до тех пор, пока оно не будет принадлежать отрезку $[-1; 1]$.

Неподвижная точка отображения $(x_C, y_C) = (0, 0)$. Матрица линеаризованной системы (2.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} (1 + \mu) \cos \varphi & -(1 + \mu) \sin \varphi \\ (1 + \mu) \sin \varphi & (1 + \mu) \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения — мультипликаторы Флоке — являются парой комплексно-сопряженных чисел:

$$\lambda_{C_{1,2}} = (1 + \mu)e^{\pm i\varphi}.$$

Таким образом, $|\lambda_{C_{1,2}}| = 1$ при $\mu_C = 0$.

Характерная для перемежаемости II типа последовательность итераций отображения (2.1) и ее вейвлет-преобразование представлены на рисунке 5. Ламинарные фазы представляют собой спирали монотонно увеличивающегося радиуса.

При переходе к полярным координатам $(r; \theta)$ получаем:

$$\begin{cases} r_{n+1} = (1 + \mu)r_n + ar_n^3, \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \varphi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Очевидно, что изменение угловой координаты не влияет на статистические характеристики исследуемого явления. Тогда второе уравнение в отображении (2.2) можно не рассматривать. Первое из уравнений (2.2) — нормальная форма субкритической при $a > 0$ бифуркации Хопфа.



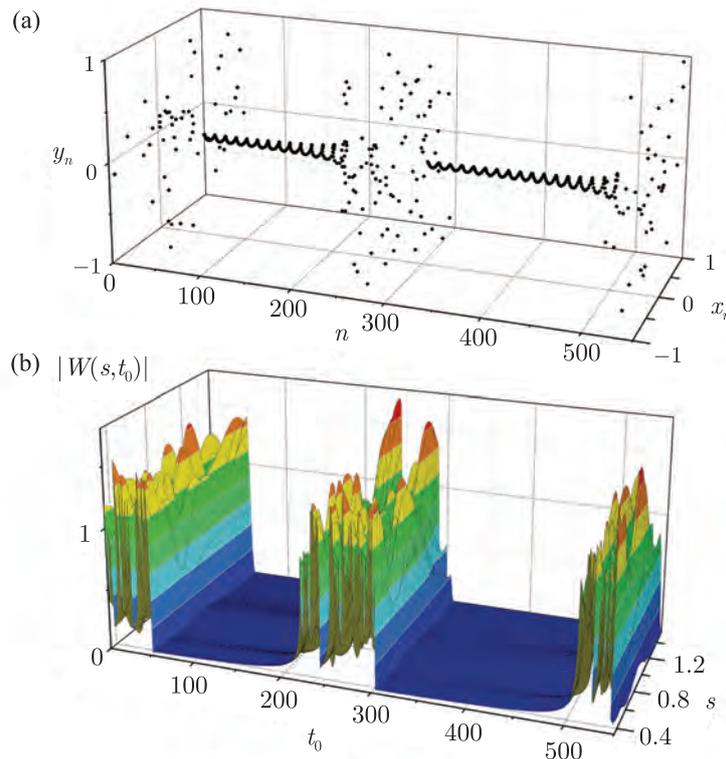


Рис. 5. а) Динамика итераций отображения (2.1): $\varphi = 0.51$, $a = 4$, $\mu = 0.0001$; б) соответствующее ей вейвлет-преобразование.

Учитывая малость величины $|r_{n+1} - r_n|$ во время ламинарных фаз, можно от дискретного уравнения перейти к дифференциальному

$$\frac{dr}{dl} = \mu r + ar^3$$

и определить $l(r_{in})$ — длительность ламинарной фазы, начавшейся при $r = r_{in}$:

$$l(r_{in}) = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{\tilde{r}^2 (ar_{in}^2 + \mu)}{r_{in}^2 (a\tilde{r}^2 + \mu)}.$$

Граница ламинарной области \tilde{r} , а также функция реинжекции $P_{in}(r_{in})$ определялись подобно соответствующим характеристикам для перемежаемости III типа. Принималось $\tilde{r} = 0,2$. Результаты вычисления функции реинжекции приведены на рисунке 6.

Из рисунка 6 видно, что полученные для различных μ значения функции реинжекции легли на одну прямую. Таким образом, для системы (2.1) функция реинжекции линейна:

$$P_{in}(r_{in}) = 2\tilde{r}^{-2}r_{in}.$$

Коэффициент пропорциональности определялся из условия нормировки.

Проведя вычисления, аналогичные выполненным при анализе перемежаемости III типа, получаем:

$$P(l) = \frac{2\mu^2(a\tilde{r}^2 + \mu)e^{2\mu l}}{(e^{2\mu l}(a\tilde{r}^2 + \mu) - a\tilde{r}^2)^2},$$

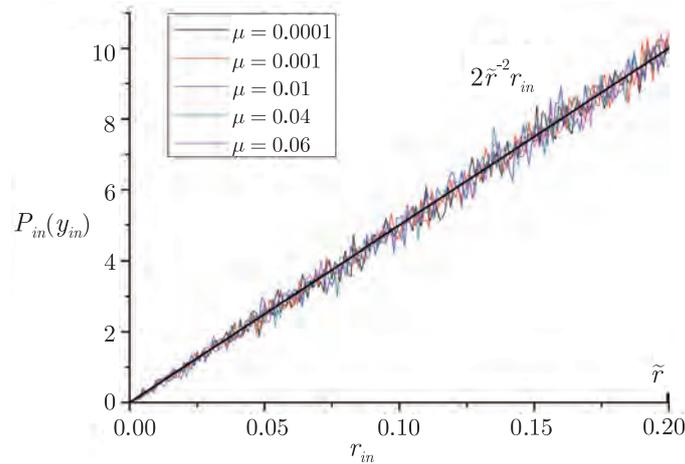


Рис. 6. Функция реинжекции для отображения (2.1).

$$\langle l \rangle = \frac{1}{2a\tilde{r}^2} \ln \left(\frac{a\tilde{r}^2 + \mu}{\mu} \right).$$

Пусть $\mu \ll a\tilde{r}^2$, тогда

$$\langle l \rangle \sim \ln \frac{1}{\mu},$$

$$P(l) \sim \frac{\mu^2 e^{-2\mu l}}{(1 - e^{-2\mu l})^2}.$$

Результаты представлены на рисунках 7 и 8. Результаты, полученные с помощью вейвлет-анализа, совпадают с результатами, найденными аналитически.

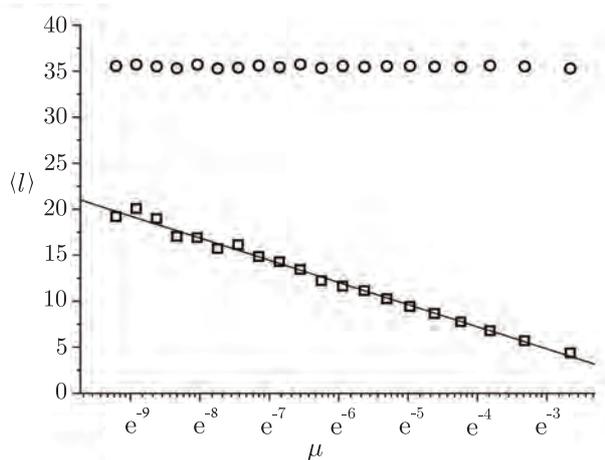


Рис. 7. Зависимости средних длительностей ламинарных (\square) и турбулентных (\circ) фаз от управляющего параметра μ , полученные с помощью вейвлет-анализа.

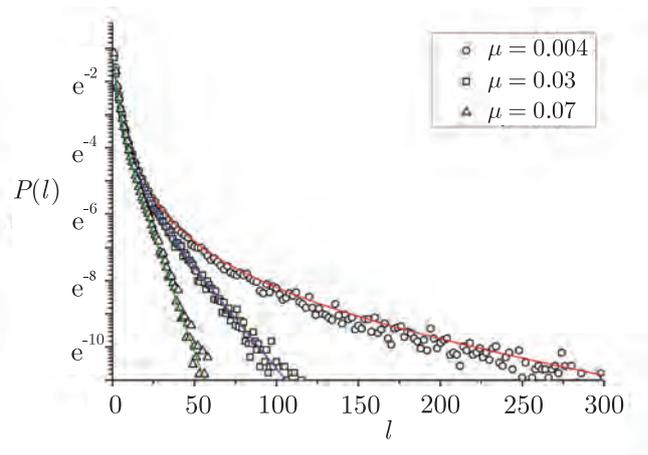


Рис. 8. Распределения длин ламинарных фаз, полученные аналитически (сплошные линии) и с помощью вейвлет-анализа (точки).

3. Влияние шума на перемежаемость

Согласие между результатами, полученными с помощью вейвлет-анализа и найденными аналитически, позволяет предположить, что вейвлет-анализ можно использовать и в том случае, когда аналитические результаты получить невозможно, например, при наличии шума.

Был выполнен вейвлет-анализ динамики итераций отображения

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n - \frac{1-\mu}{2\pi} \cos \left[2\pi \left(x_n - \frac{1}{12} \right) \right] + g\xi_n \pmod{1}, \quad (3.1)$$

где g — уровень шума, ξ_n — случайная гауссова величина ($\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n, \xi_{n'} \rangle = \delta(n - n')$). Результаты, полученные из анализа поверхностей вейвлет-коэффициентов, представлены на рисунке 9.

Исследование влияния шума на перемежаемость II типа было выполнено при вейвлет-анализе динамики итераций отображения

$$\begin{cases} x_{n+1} = (x_n \cos \varphi - y_n \sin \varphi) [1 + \mu + a(x_n^2 + y_n^2)] + g\xi_n^{(x)} \pmod{[-1; 1]}, \\ y_{n+1} = (x_n \sin \varphi + y_n \cos \varphi) [1 + \mu + a(x_n^2 + y_n^2)] + g\xi_n^{(y)} \pmod{[-1; 1]}, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\xi_n^{(x)}$, $\xi_n^{(y)}$ — независимые случайные гауссовы величины. Результаты расчетов с помощью вейвлет-анализа представлены на рисунке 10.

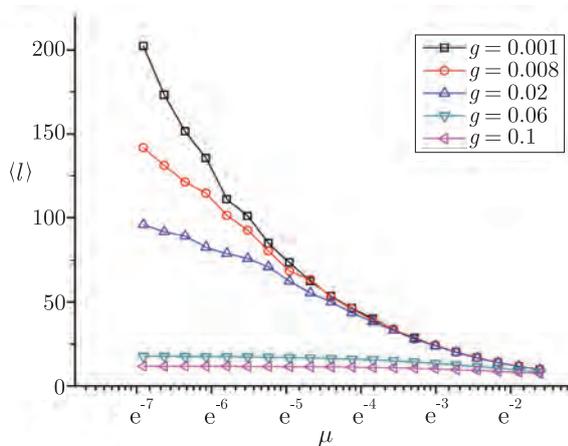


Рис. 9. Зависимости средних длительностей ламинарных фаз от управляющего параметра μ при различных уровнях шума g , полученные с помощью вейвлет-анализа динамики итераций отображения (3.1).

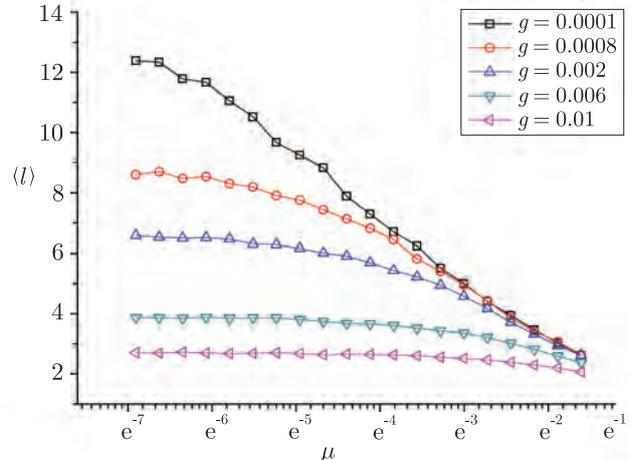


Рис. 10. Зависимости средних длительностей ламинарных фаз от управляющего параметра μ при различных уровнях шума g , полученные с помощью вейвлет-анализа динамики итераций отображения (3.2).

При малых уровнях шума средние длительности ламинарных фаз близки к их значениям при отсутствии шума. Чем выше уровень шума, тем слабее зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра.

Заключение

В настоящей работе на примере динамики итераций дискретных отображений исследована перемежаемость II и III типов в субкритической области с помощью вейвлет-анализа. Отличное совпадение результатов, полученных с помощью вейвлет-анализа, с аналитическими результатами при отсутствии шума говорит о том, что вейвлет-анализ может быть использован для исследования перехода к хаосу через перемежаемость в более сложных динамических системах. В частности, в настоящей работе данный метод применен для исследования влияния шума на перемежаемость.

Список литературы

- [1] Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Comm. Math. Phys.*, 1980, vol. 74, pp. 189–197.
- [2] Lahiri A., Nag T. Intermittency in inverted-pitchfork bifurcations of dissipative and conservative maps // *Phys. Rev. Lett.*, 1989, vol. 62, no. 17, pp. 1933–1936.
- [3] Laugesen J., Mosekilde E., Bountis E., Kuznetsov S.P. Type-II intermittency in a class of two coupled one-dimensional maps // *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2000, vol. 5, pp. 233–245.
- [4] Kim C.-M., Yim G.-S., Kim Y. S., Kim J.-M., Lee H.W. Experimental evidence of characteristic relations of type-I intermittency in an electronic circuit // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, no. 3, pp. 2573–2577.
- [5] Cavalcante H. L. D. de S., Rios Leite J. R. Averages and critical exponents in type-III intermittent chaos // *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, 026210, 5 pp.
- [6] Baptista M. S., Caldas I. L. Type-II intermittency in the driven double scroll circuit // *Phys. D*, 1999, vol. 132, pp. 325–338.
- [7] Bergé P., Dubois M., Manneville P., Pomeau Y. Intermittency in Rayleigh–Bénard convection // *J. Physique Lett.*, 1980, vol. 41, no. 15, L341–L345.
- [8] Ringuet E., Rozé C., Gouesbet G. Experimental observation of type-II intermittency in a hydrodynamic system // *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 47, no. 2, pp. 1405–1407.
- [9] Dubois M., Rubio M. A., Berge P. Experimental evidence of intermittencies associated with a subharmonic bifurcation // *Phys. Rev. Lett.*, 1983, vol. 51, no. 16, pp. 1446–1449.
- [10] Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
- [11] Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН*, 1996, т. 166, № 11, с. 1145–1170.
- [12] Figliola A., Schuschny A. Time and frequency study of intermittency // *Chaos Solitons Fractals*, 1995, vol. 6, pp. 131–135.
- [13] Короновский А. А., Минюхин И. М., Тыщенко А. А., Храмов А. Е., Мидзяновская И. С., Ситникова Е. Ю., van Luijteleaar G., van Rijn C. M. Применение непрерывного вейвлет-преобразования для анализа перемежающегося поведения // *Изв. вузов. ПНД*, 2007, т. 15, № 4, с. 34–54.
- [14] Hirsh J. E. Theory of intermittency // *Phys. Rev. A*, 1982, vol. 25, no. 1, pp. 519–532.
- [15] Kye W.-H., Rim S., Kim C.-M., Lee J.-H., Ryu J.-W., Yeom B.-S., Park Y.-J. Experimental observation of characteristic relations of type-III intermittency in the presence of noise in a simple electronic circuit // *Phys. Rev. E*, 2003, vol. 68, 036203, 5 pp.
- [16] Koronovskii A. A., Hramov A. E. Type-II intermittency characteristics in the presence of noise // *Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys.*, 2008, vol. 62, pp. 447–452.

Wavelet analysis of II and III type intermittency

Vladimir V. Afonin¹, Tatyana K. Boletskaya²

^{1,2}Omsk State University

pr. Mira 55a, Omsk, 644077, Russia

¹stein13@bk.ru, ²boletskaya@phys.omsu.omskreg.ru

The investigation of II and III type intermittency in dynamical systems described by discrete maps using wavelet analysis in the presence and the absence of noise is carried out.

MSC 2010: 65P20, 42C40

Keywords: intermittency, wavelet analysis

Received July 9, 2011, accepted August 3, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 427–436 (Russian)

