



УДК: 531

MSC 2010: 70E18, 70F40

## Торможение и остановка плоских тел, скользящих по шероховатой горизонтальной поверхности

О. Б. Федичев, П. О. Федичев

В работе предлагается качественная теория плоского движения и остановки твердых тел с произвольным распределением нормальных напряжений в пятне контакта. На основании исследования уравнений движения в условиях комбинированного сухого трения скольжения и вращения сформулированы условия остановки твердого тела на шероховатой горизонтальной плоскости. Найденные в результате исследования время движения до остановки, пройденный путь и локализация мгновенного центра скоростей в момент остановки зависят от распределения масс в теле и от асимптотического поведения главного вектора и главного момента сил трения.

Ключевые слова: сухое трение, плоское движение, мгновенный центр скоростей

### 1. Введение

Впервые движение тонкого кольца, тонкого диска с однородным распределением нормальных напряжений в пятне контакта и гантели по шероховатой горизонтальной поверхности, детально исследовано в работе [1]. Полученные результаты заложили основу современных представлений о динамике тонких тел, находящихся в протяженном контакте с плоскостью в условиях сухого трения. Единственный результат данной работы подвергся со временем уточнению: расстояние между центром масс и мгновенным центром скоростей

---

Получено 30 июня 2011 года

После доработки 29 июля 2011 года

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00318, 11-02-00354).

---

Федичев Олег Борисович

[obfedichev@gmail.com](mailto:obfedichev@gmail.com)

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Федичев Петр Олегович

[peter.fedichev@gmail.com](mailto:peter.fedichev@gmail.com)

Quantum Pharmaceuticals

125171, Россия, г. Москва, ул. Космонавта Волкова, д. 6А–606



в момент остановки диска при любых начальных условиях, кроме чистого скольжения и чистого вращения, оказалось не  $0.71R$ , как в [1], а  $0.65R$  [2]. На это обстоятельство впервые обращено внимание в работах [3, 4], где сделано дальнейшее уточнение указанного параметра до значения  $0.653R$ . Исследование движения диска [5] подтвердило этот результат и дало экспериментальное обоснование гипотезы о применимости закона Кулона сухого трения к подобным задачам в дифференциальной форме.

Приведенная выше краткая историческая справка заимствована из работы [6], авторы которой в хронологическом порядке восстановили последовательность получения основных результатов решения интересующей нас задачи.

Важным этапом исследования задач подобного типа стало точное вычисление в элементарных функциях главного вектора  $\mathbf{F}$  и главного момента  $\mathbf{M}$  сил трения, входящих в уравнения движения, для распределения контактных напряжений Герца [7] и диска с распределением контактных напряжений Галина [8]. Последнее обстоятельство позволило автору [9] решить задачу о движении диска Галина в параметрической форме. В общем случае простых и точных выражений для  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{M}$  не существует, и в ряде работ изучены их приближения с использованием разложений Паде [10]. Обратная задача о трогании диска с места решена в [11]. Диск с однородным распределением контактных напряжений рассмотрен приближенно в [12].

Цель настоящей работы — создание качественной теории плоского движения и остановки твердых тел с осесимметричными распределениями масс и нормальных напряжений в пятне контакта в условиях сухого трения.

## 2. Уравнения движения

Рассмотрим плоское движение твердого тела со скоростью центра масс  $v(t)$  и угловой скоростью  $\omega(t)$ ; уравнения его движения могут быть получены из основных теорем динамики об изменении импульса и кинетического момента

$$m\dot{v}(t) = \iint_S F(u, v, r, \phi) dS,$$

$$R^{-1}J\dot{\omega}(t) = \iint_S M(u, v, r, \phi) dS,$$

где  $m$  — масса тела,  $R$  — радиус тела,  $F(u, v, r, \phi)$  и  $M(u, v, r, \phi)$  — функции распределения элементарных сил и моментов сил трения в пятне контакта,  $r$  и  $\phi$  — полярные координаты с центром в пятне контакта,  $dS = r dr d\phi$  — элемент площади пятна контакта, использовано обозначение  $u = R\omega$ . Масса и момент инерции тела  $J$  связаны с его распределением масс  $\gamma(r)$  известными соотношениями:

$$m = \iint_S \gamma(r) dS,$$

$$J = \iint_S \gamma(r)r^2 dS.$$

Будем предполагать, что элементарная сила трения и ее момент подчиняется закону



Кулона сухого трения в дифференциальной форме

$$d\mathbf{F}(u, v, r, \phi) = -f\sigma(r)\frac{\mathbf{v}}{v} dS,$$

$$d\mathbf{M}(u, v, r, \phi) = -f\sigma(r)\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{v} dS,$$

где  $f$  — коэффициент трения,  $\sigma(r)$  — функция распределения нормальных напряжений в пятне контакта. В результате получим выражения для модулей главного вектора  $F$  и главного момента  $M$  сил комбинированного сухого трения

$$F(\omega, v) = f \iint_S \frac{\sigma(r)(v - \omega r \sin \phi)r dr d\phi}{\sqrt{\omega^2 r^2 - 2v\omega r \sin \phi + v^2}},$$

$$M(\omega, v) = f \iint_S \frac{\sigma(r)(\omega r - v \sin \phi)r^2 dr d\phi}{\sqrt{\omega^2 r^2 - 2v\omega r \sin \phi + v^2}}.$$

Для дальнейшего анализа перейдем к безразмерным переменным:  $\rho = \frac{r}{R}$ ,  $0 < \rho \leq 1$ ,  $k = \frac{v}{u}$ ,

$\bar{\sigma}(\rho) = \frac{\sigma(\rho)}{\sigma_0}$ ,  $\bar{\gamma}(\rho) = \frac{\gamma(\rho)}{\gamma_0}$ ; тогда

$$F(k) = fR^2\sigma_0 \iint_S \frac{\bar{\sigma}(\rho)(k - \rho \sin \phi)\rho d\rho d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2k\rho \sin \phi + k^2}},$$

$$M(k) = fR^3\sigma_0 \iint_S \frac{\bar{\sigma}(\rho)(\rho - k \sin \phi)\rho^2 d\rho d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2k\rho \sin \phi + k^2}}.$$

Для осесимметричного распределения масс выпишем также выражения для полной массы тела

$$m = 2\pi R^2\gamma_0 \int_0^1 \bar{\gamma}(\rho)\rho d\rho = 2\pi R^2\gamma_0\bar{m}$$

и его центрального момента инерции

$$J = 2\pi R^4\gamma_0 \int_0^1 \bar{\gamma}(\rho)\rho^3 d\rho = 2\pi R^4\gamma_0\bar{J}.$$

Определим безразмерные функции главного вектора  $F(k) = 2\pi R^2 f \sigma_0 \bar{m} \bar{F}(k)$ , где

$$\bar{F}(k) = \bar{m}^{-1} \iint_S \frac{\bar{\sigma}(\rho)(k - \rho \sin \phi)\rho d\rho d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2k\rho \sin \phi + k^2}}, \quad (2.1)$$

и главного момента  $M(k) = 2\pi R^3 f \sigma_0 \bar{J} \bar{M}(k)$ , где

$$\bar{M}(k) = \bar{J}^{-1} \iint_S \frac{\bar{\sigma}(\rho)(\rho - k \sin \phi)\rho^2 d\rho d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2k\rho \sin \phi + k^2}}. \quad (2.2)$$

Тогда, переопределив переменную времени  $t = \frac{\tau f \sigma_0}{\gamma_0}$ , получим безразмерные уравнения плоского движения тела с осесимметричным распределением масс и контактных напряжений:

$$\begin{aligned}\dot{v}(\tau) &= -\overline{F}(k), \\ \dot{u}(\tau) &= -\overline{M}(k).\end{aligned}$$

### 3. Главный вектор и главный момент сил трения для различных распределений нормальных напряжений

В литературе обсуждаются несколько различных типов распределения нормальных напряжений в пятне контакта. Самый простой случай представляет собой кольцо:  $\sigma(\rho) = \gamma_0 g = \sigma_0 \delta(\rho - 1)$ , где  $\sigma_0 = \frac{N}{2\pi R^2}$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $N$  — нормальная нагрузка,  $\delta$  — функция Дирака. Интегралы для массы и момента инерции очевидны:  $\overline{m} = \frac{\sigma_0}{g}$ ,  $\overline{J} = \frac{\sigma_0}{g}$ . Рассчитаем интегралы (2.1) и (2.2):

$$\overline{F}_{ring}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(k - \sin \phi) d\phi}{\sqrt{1 - 2k \sin \phi + k^2}}, \quad (3.1)$$

$$\overline{M}_{ring}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - k \sin \phi) d\phi}{\sqrt{1 - 2k \sin \phi + k^2}}. \quad (3.2)$$

Заметим, что  $\overline{F}_{ring}(k) = \overline{M}_{ring}\left(\frac{1}{k}\right)$  [1]. Нам понадобятся только асимптотические выражения для силы и момента, приведенные в таблице 1.

Интегралы (3.1) и (3.2) позволяют рассчитать главный вектор и главный момент сил трения для других нормальных напряжений. Например, в случае однородного распределения  $\sigma = \sigma_0 = \frac{mg}{\pi R^2}$ , тогда  $\overline{m} = \frac{m}{2\pi R^2} = \frac{\sigma_0}{2}$ ,  $J = \frac{mR^2}{2}$ ,  $\overline{J} = \frac{m}{4\pi R^2} = \frac{\sigma_0}{4}$  и

$$\overline{F}_{disk}(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{k}{\rho} - \sin \phi\right) d\phi}{\sqrt{1 - \frac{2k \sin \phi}{\rho} + \left(\frac{k}{\rho}\right)^2}}.$$

Сравнивая результат с формулой для кольца (3.1), получаем

$$\overline{F}_{disk}(k) = 2 \int_0^1 \rho \overline{F}_{ring}\left(\frac{k}{\rho}\right) d\rho.$$

Аналогично,

$$\overline{M}_{disk}(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{k \sin \phi}{\rho}\right) d\phi}{\sqrt{1 - \frac{2k \sin \phi}{\rho} + \left(\frac{k}{\rho}\right)^2}}.$$



Сравнивая результат с формулой (3.2), получаем

$$\overline{M}_{disk}(k) = 4 \int_0^1 \rho^2 \overline{M}_{ring} \left( \frac{k}{\rho} \right) d\rho.$$

Асимптотические выражения для силы и момента приведены в таблице 1.

Распределение контактных напряжений Галина  $\sigma(\rho) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\rho^2}}$ , где  $\sigma_0 = \frac{N}{2\pi R^2}$ , изучено в [8] и имеются рассчитанные в элементарных функциях интегралы. В нашем случае массу и момент инерции берем для однородного диска, тогда главный вектор

$$\overline{F}(k) = \int_0^1 \frac{\rho \overline{F}_{ring} \left( \frac{k}{\rho} \right) d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Аналогично и главный момент:

$$\overline{M}(k) = 2 \int_0^1 \frac{\rho^2 \overline{M}_{ring} \left( \frac{k}{\rho} \right) d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Распределение контактных напряжений Герца  $\sigma(\rho) = \sigma_0 \sqrt{1-\rho^2}$ , где  $\sigma_0 = \frac{3N}{2\pi R^2}$ , изучено в [7] и имеются рассчитанные в элементарных функциях интегралы. В нашем случае

$$\begin{aligned} \overline{F}(k) &= 2 \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} \overline{F}_{ring} \left( \frac{k}{\rho} \right) d\rho, \\ \overline{M}(k) &= 4 \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \overline{M}_{ring} \left( \frac{k}{\rho} \right) d\rho. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения  $\overline{F}(k)$  и  $\overline{M}(k)$  легко могут быть получены для других типов распределений контактных напряжений. Асимптотические значения функций  $\overline{F}(k)$  и  $\overline{M}(k)$  приведены в таблице 1.

#### 4. Качественная теория остановки

Для построения качественной теории остановки твердого тела воспользуемся интегралом движения [1], сохранив обозначения безразмерных функций  $\overline{F}$  и  $\overline{M}$  такими же, что и размерных:

$$\ln u(t) - \int \frac{M(k) dk}{F(k) - kM(k)} = \text{const}. \quad (4.1)$$

В момент остановки  $u(t) \rightarrow 0$  и логарифм угловой скорости становится бесконечным. Если начальные условия не сингулярные (константа в правой части конечна), то бесконечность  $\ln u(t)$  может компенсироваться только бесконечностью интеграла в левой части (4.1),

причем одного знака. Интеграл, как функция своего верхнего предела, может быть бесконечным, если знаменатель подынтегрального выражения стремится к 0, что соответствует нулям знаменателя  $k_*$ ,

$$\Phi(k_*) = F(k_*) - k_*M(k_*), \quad (4.2)$$

и реализуется в момент остановки твердого тела. В этом случае знаменатель (4.1) можно приблизить  $\Phi(k) \approx \alpha(k - k_*)$  так, что интеграл движения принимает вид

$$\ln u - \frac{M(k_*)}{\alpha} \ln \left( \frac{v}{u} - k_* \right) = \text{const}, \quad (4.3)$$

или, другими словами,

$$u(t) \rightarrow \left( \frac{v(t)}{u(t)} - k_* \right) \frac{M(k_*)}{\alpha}$$

по мере приближения к полной остановке. Остановка, очевидно, возможна в случае, если

$$\alpha(k_*) > 0, \quad (4.4)$$

так как оба логарифма в (4.3) одного знака и бесконечны одновременно.

Следовательно, режим остановки тела качественно зависит от количества и расположения нулей функции  $\Phi(k)$ . При любом распределении масс и контактных напряжений функция  $\Phi(k)$  обращается в ноль при  $k = 0$  (см. рис. 1). Обычно при этом  $\alpha(0) < 0$  и остановка невозможна (точечный контакт Герца является исключением). В общем случае  $\Phi(k) = 0$  еще один раз. Это происходит при  $k = 1$  в случае кольца и диска Галина. Здесь при любых начальных условиях остановка происходит в режиме  $\frac{v}{u} \rightarrow 1$ , т.е. вращение и поступательное движение прекращаются с одинаковыми скоростями. Мгновенный центр скоростей локализован при этом на ободке пятна контакта. Остановка диска с равномерным распределением контактных напряжений происходит при  $k_* \approx 0.65$ , что полностью совпадает с [2], и с точностью до числа значащих цифр после запятой совпадает со значением  $k_* = 0.653$ , полученным в работах [3–5].

## 5. Время движения до остановки и пройденный путь

С учетом начальных условий первый интеграл (4.1) может быть представлен в виде

$$u(t) = u_0 \exp \left( \int_{k_0}^{k(t)} \frac{M(k)}{F(k) - kM(k)} dk \right), \quad (5.1)$$

где  $k(t) = \frac{v(t)}{u(t)}$ . Время движения связано с параметрами  $u(t)$  и  $k(t)$  уравнением

$$t = - \int_{k_0}^{k(t)} \frac{u}{F(k) - kM(k)} dk.$$

Так как тело останавливается в момент времени  $t_*$ :  $k(t_*) = k_*$ , время движения до полной остановки

$$t_* = -u_0 \int_{k_0}^{k_*} \frac{\exp \left( \int_{k_0}^k \frac{M(k')}{F(k') - k'M(k')} dk' \right)}{F(k) - kM(k)} dk. \quad (5.2)$$



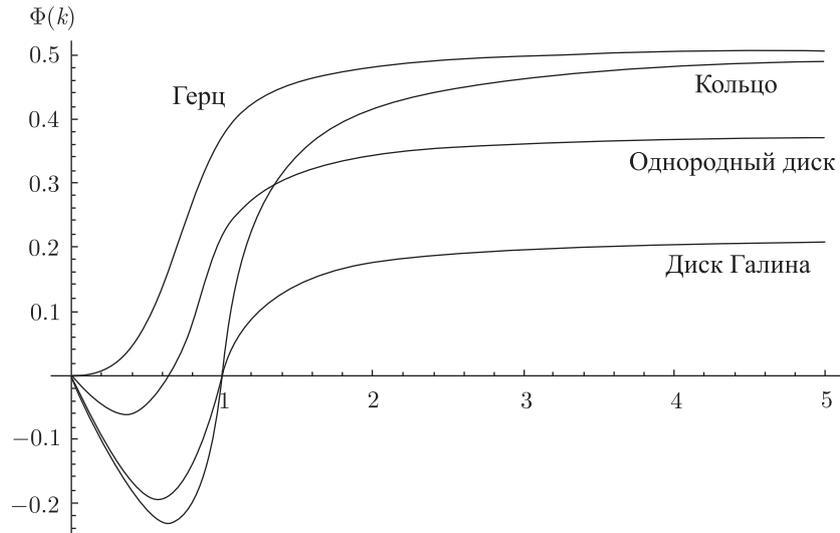


Рис. 1. Функция  $\Phi(k)$  для различных распределений контактных напряжений (см. комментарии в тексте).

Это выражение является общим и не содержит никаких приближений. Аналогично и путь, пройденный до полной остановки, получается интегрированием:

$$x_* = - \int_{k_0}^{k_*} \frac{u^2 k}{F(k) - kM(k)} dk. \quad (5.3)$$

Прежде чем рассматривать приближенное выражение для  $t_*$ , рассчитаем время до остановки в нескольких предельных случаях.

Вначале предположим, что тело начинает движение с  $k_0 = k_* + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$  (для определенности рассмотрим случай  $\varepsilon > 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{M(k)}{F(k) - kM(k)} &\approx \frac{M_*}{\alpha(k - k_*)}, \\ t_* &= - \frac{u_0}{\alpha} \int_{k_0}^{k_*} \frac{(k - k_*)^{M_*/\alpha - 1}}{\varepsilon^{M_*/\alpha}} dk = \frac{u_0}{M_*}, \\ x_* &= - \frac{u_0^2 k_*}{\alpha \varepsilon} \int_{k_0}^{k_*} (k - k_*)^{2M_*/\alpha - 1} dk = \frac{u_0^2 k_*}{2M_*}. \end{aligned}$$

Таким образом, если тело начинает движение согласованно, т. е. так, что  $k_0 \approx k_*$ , то время до остановки дается универсальным выражением  $t_* = \frac{u_0}{M_*}$ , зависящим только от значения функции  $M$  в момент остановки  $M_* = M(k_*)$ .

Рассмотрим теперь случай  $k_0 \gg k_* \approx 1$ . Вычисления для  $k_0 \approx k_*$  выше показывают, что экспоненциальный множитель в числителе (5.2) сокращается с аналогичным множителем знаменателя и время до остановки теряет особенность и, следовательно, может быть рассчитано приближенно вдали от особенности. Таким образом, для проведения вычислений

необходимо знать асимптотические значения функций  $F(k)$  и  $M(k)$  при  $k \rightarrow \infty$ :  $F(k) \rightarrow F_\infty$ ,  $M(k) \rightarrow \frac{m_\infty}{k}$  (см. табл. 1). Тогда

$$\frac{M(k)}{F(k) - kM(k)} \approx \frac{C}{k},$$

где

$$C = \frac{m_\infty}{F_\infty - m_\infty},$$

$$t_* = -\frac{u_0}{k_0^C} \int_{k_0}^{k_*} \frac{k^C}{F_\infty - m_\infty} dk = \frac{u_0 k_0}{F_\infty},$$

$$x_* = \frac{k_0^2 u_0^2}{F_\infty}.$$

Рассмотрим теперь противоположный случай  $k_0 \ll k_* \approx 1$ . По аналогии рассмотрим асимптотические значения функций  $F(k)$  и  $M(k)$  при  $k \rightarrow 0$ :

$$F(k) - kM(k) \rightarrow -\beta k,$$

где  $\beta > 0$  (иначе остановка произошла бы при  $k = 0$ , см. анализ точечного контакта Герца ниже). Момент силы трения не имеет особенности  $M(k) \rightarrow M_0 \neq 0$ , и

$$\frac{M(k)}{F(k) - kM(k)} \approx -\frac{M_0}{\beta k},$$

$$t_* = -\frac{u_0 k_0^{\frac{M_0}{\beta}}}{\beta} \int_{k_0}^{k_*} k^{-\frac{M_0}{\beta}-1} dk = \frac{u_0}{M_0},$$

$$x_* = \frac{k_* u_0^2}{2M_0}.$$

Примечательно, что ни время, ни пройденный путь до остановки не зависят явно от константы  $\beta$ .

В результате получается, что для  $k_0 \lesssim k_*$  время до остановки  $t_* \approx \frac{u_0}{M_0}$ , а если  $k_0 \gg k_*$ , то  $t_* \approx \frac{u_0 k_0}{F_\infty}$ . Интерполяционная формула, совмещающая эти два предельных случая, может быть такой:

$$t_* \approx u_0 \left( \frac{1}{M(k_0)} + \frac{k_0}{F_\infty} \right).$$

Аналогично можно построить интерполяционную формулу для пройденного пути до остановки.

На самом деле, несмотря на определенную сложность анализа, вывод удивительно прост: время движения тела определяется  $u_0$ , если  $u_0 \gg v_0$ , и  $v_0$ , если  $v_0 \gg u_0$ . Иными словами, время движения определяется способностью силы трения погасить максимальную из скоростей поступательного или вращательного движения. Примечательно также, что если в начальный момент отношение скоростей  $k_0$  было большим (или, наоборот, очень

Таблица 1. Основные соотношения для известных распределений нормальных напряжений

| Тип контакта                        | $\sigma$  | $k \rightarrow 0$  | $k \rightarrow \infty$                                | $k_*$ |
|-------------------------------------|---|--|---|-------|
| Кольцо                              | $\sigma = \frac{N}{2\pi R^2} \delta(\rho - 1)$  | $F = \frac{k}{2} + O(k^3)$<br>$M = 1 + O(k^2)$   | $F = 1 + O(k^{-2})$<br>$M = \frac{1}{2k} + O(k^{-3})$ | 1     |
| Диск Галина                         | $\sigma = \frac{N}{2\pi R^2 \sqrt{1 - \rho^2}}$ | $F = \frac{\pi k}{4}$<br>$M = \frac{\pi \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)}{2}$                              | $F = 1 + O(k^{-2})$<br>$M = \frac{2}{3k} + O(k^{-3})$ | 1     |
| Однородное распределение напряжений | $\sigma = \frac{N}{\pi R^2}$                    | $F = k + O(k^3)$<br>$M = \frac{4}{3} + O(k^2)$   | $F = 1 + O(k^{-2})$<br>$M = \frac{1}{2k} + O(k^{-3})$ | 0,65  |
| Точечный контакт Герца              | $\sigma = \frac{3N\sqrt{1 - \rho^2}}{2\pi R^2}$ | $F = \frac{3\pi}{8}k - \frac{3\pi}{32}k^3$<br>$M = \frac{3\pi \left(1 - k^2 + \frac{3k^4}{8}\right)}{8}$ | $F = 1 + O(k^{-2})$<br>$M = \frac{2}{5k} + O(k^{-3})$ | 0     |

малым), то оно остается таким же большим (или малым) практически на протяжении всего времени движения, лишь в последний момент перед остановкой резко снижаясь (или увеличиваясь) до  $k(t_*) = k_*$ .

Особый случай представляет точечный контакт Герца, когда  $k_* = 0$ . При этом расчет предельных случаев происходит по-разному для  $k_0 \gtrsim 1$  и  $k_0 \lesssim 1$ . В результате время до остановки в первом случае  $t_* = \frac{u_0 k_0}{F_\infty}$ , а во втором  $t_* = \frac{u_0}{M_0}$ , так что приближенное выражение для времени движения остается в силе.

Вторая особенность точечного контакта Герца заключается в следующем. Остановка происходит при  $k_* = 0$ , т. е. когда  $\frac{v(t)}{u(t)} \rightarrow 0$ . Однако, несмотря на то, что  $u$  и  $v$  обращаются в нуль в момент остановки одновременно, вблизи остановки  $u \gg v$  и вращение значительно опережает поступательное движение. Такая ситуация, похоже, реализуется при остановке бильярдного шара. Известно, что в бильярдной игре иногда случается так, что шар, практически остановившись ( $v \approx 0$ ), продолжает некоторое время интенсивно вращаться вокруг вертикальной оси.

## 6. Заключение

В нашей работе предложена качественная теория плоского движения и остановки твердого тела с осесимметричным распределением масс и нормальных напряжений в пятне контакта. На основании исследования уравнений движения в условиях комбинированного сухого трения скольжения и верчения сформулированы условия остановки твердого тела на шероховатой плоскости. Найденные в результате исследования время движения до остановки, пройденный путь и локализация мгновенного центра скоростей в момент остановки зависят от асимптотического поведения функций  $F$  и  $M$ . Полученные результаты хорошо согласуются с полученными ранее другими авторами.

Авторы благодарны академику В. Ф. Журавлёву и профессору А. П. Иванову за ряд полезных замечаний и предложений, учтенных в тексте.

## Список литературы

- [1] Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 4, с. 17–28.
- [2] Voyenli K., Eriksen E. On the motion of an ice hockey puck // Amer. J. Phys., 1985, vol. 53, no. 12, pp. 1149–1153.
- [3] Goyal S., Ruina A., Papadopoulos J. Planar sliding with dry friction: Part 1: Limit surface and moment function // Wear, 1991, vol. 143, pp. 307–330.
- [4] Goyal S., Ruina A., Papadopoulos J. Planar sliding with dry friction: Part 2: Dynamics of motion // Wear, 1991, vol. 143, pp. 331–352.
- [5] Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. E. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett., 2003, vol. 90, no. 24, 248302, 4 pp.
- [6] Weidman P. D., Malhotra C. P. On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction // Phys. D, 2007, vol. 233, no. 1, pp. 1–13.
- [7] Журавлев В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, № 5, с. 762–767.
- [8] Киреенков А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. РАН, МТТ, 2002, № 1, с. 60–67.
- [9] Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения диска по шероховатой плоскости // Изв. РАН, МТТ, 2007, № 4, с. 65–71.
- [10] Журавлев В. Ф., Киреенков А. А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН, МТТ, 2005, № 2, с. 3–14.
- [11] Иванов А. П. О движении плоских тел при наличии трения покоя // Изв. РАН, МТТ, 2003, № 4, с. 89–94.
- [12] Leine R. I., Glocker Ch. A set-valued force law for spatial Coulomb–Contensou friction // Eur. J. Mech. A Solids, 2003, vol. 22, pp. 193–216.

## Stopping dynamics of sliding and spinning bodies on a rough plane surface

Oleg B. Fedichev<sup>1</sup>, Peter O. Fedichev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (State University)  
Insttitutskii per. 9, Dolgoprudnyi, Moskovskaya obl., 141700, Russia

<sup>2</sup>Quantum Pharmaceuticals  
ul. Kosmonavta Volkova 6A–606, Moscow, 125171, Russia

<sup>1</sup>obfedichev@gmail.com, <sup>2</sup>peter.fedichev@gmail.com

We propose a qualitative theory of stopping dynamics of solids moving on a plane surface with an arbitrary distribution of normal stresses in the contact area. We studied the equations of motion describing the combined action of the dry friction acting on a sliding and spinning body all the way long before the motion ceases, calculated the movement time, and the distance traveled. Finally we identified the localization of the instantaneous center of rotation at the time of the complete stop, which depends on the mass distribution within the body and on the asymptotic behavior of the friction force and torque.

MSC 2010: 70E18, 70F40

Keywords: dry friction, flat motion, instantaneous center of rotation

Received June 30, 2011, accepted July 29, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 549–558 (Russian)

