



УДК: 539.3

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости

А. С. Кулешов, Д. В. Трещев, Т. Б. Иванова, О. С. Наймушина

В статье рассмотрены две динамические задачи, возникающие при взаимодействии абсолютно твердого цилиндра с деформируемым плоским основанием в двумерной постановке (движение абсолютно твердого диска по основанию, представляющему собой в недеформированном состоянии прямую). Основание представляет собой достаточно жесткую вязкоупругую среду, создающую нормальное давление $p(x) = kY(x) + \nu\dot{Y}(x)$, где x — координата на прямой, $Y(x)$ — нормальное смещение точки x , а k и ν — коэффициенты упругости и вязкости (среда Кельвина–Фойгта). Также считаем, что при деформации основание создает силы сухого трения, локально подчиняющиеся закону Кулона. Рассмотрено явление удара,

Получено 10 мая 2011 года

После доработки 19 августа 2011 года

Работа выполнена при поддержке гранта «Ведущие научные школы» (грант НШ-8784.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.740.11.0195), гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУВПО (№ 11.G34.31.0039).

Кулешов Александр Сергеевич
kuleshov@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы

Трещев Дмитрий Валерьевич
treschev@mi.ras.ru

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы

Иванова Татьяна Борисовна
tbesp@rcd.ru

Удмуртский государственный университет, Институт компьютерных исследований
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

Наймушина Ольга Сергеевна
osn@rcd.ru

Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

возникающее при произвольном падении диска на прямую, а также исследовано движение диска «вдоль прямой», включающее стадии скольжения и качения.

Ключевые слова: среда Кельвина–Фойгта, удар, вязкоупругость, трение

1. Введение

Вопросам взаимодействия твердого тела с вязкоупругим основанием посвящена обширная литература. Как правило, авторы концентрируют внимание лишь на некоторых простейших стационарных движениях: равновесиях (и квазистатических режимах), а также скольжениях и качениях с постоянной скоростью. При этом в ряде случаев используются весьма сложные, максимально приближенные к реальности модели деформируемого основания, строятся феноменологические модели на основе разнообразных экспериментальных данных и исследуются различные тонкие механические эффекты. Исследуемые вопросы включают, прежде всего, получение макроскопических формул для сил и моментов, с которыми основание воздействует на тело, а также величин, характеризующих деформации и напряжения, возникающие в материале основания. Результаты такого рода и обзор соответствующей литературы можно найти, например, в [1, 2, 6].

Основная задача нашей статьи несколько иная. Используя довольно простую модель для деформируемого основания, включающую в себя вязкоупругие свойства, а также локальный закон трения Амонтона–Кулона, мы интересуемся прежде всего вопросами динамики. Иначе говоря, отвечаем на вопрос: как движется тело? Основные усилия направлены на получение (приближенных обыкновенных дифференциальных) уравнений движения диска и на анализ их решений. В исследуемых нами режимах движения эти решения весьма далеки от стационарных.

Несколько конкретизируем постановку задачи.

1. *Твердое тело считается недеформируемым однородным круглым цилиндром, достаточно длинным, чтобы постановку задачи можно было считать плоской.*

Исходя из того, что рассматриваемая задача плоская, в дальнейшем вместо терминов «цилиндр» и «плоскость» (в качестве основания) мы будем говорить «диск» и «прямая».

2. *Основание в деформированном состоянии создает силы трех типов: упругие, вязкие и силы сухого трения.*

Каждый из указанных типов сил создается инфинитезимальными участками основания, а результирующая сила вычисляется как интеграл по пятну контакта. Одна из основных трудностей связана с тем обстоятельством, что пятно контакта зависит не только от положения, но и от скорости центра диска, так что явные формулы для результирующих сил и моментов очень громоздки. Таким образом, даже в рамках используемой нами простой модели детальное исследование динамики диска является весьма сложной задачей, существенно упростить которую удастся благодаря следующему предположению.

3. *Основание является достаточно жестким.*

Это предположение позволяет ввести малый параметр и установить, какие составляющие в формулах являются основными, а какими можно пренебречь.

Итак, рассмотрим абсолютно твердый диск D , движущийся в поле сил тяжести в вертикальной плоскости Π , над деформируемой кривой C . Будем считать, что вязкоупругие

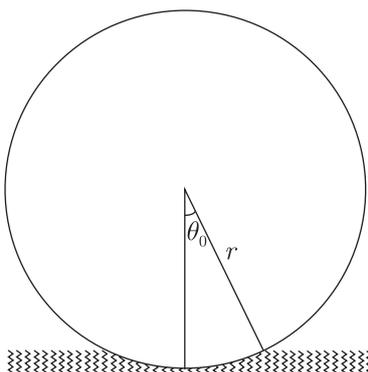


Рис. 1. Диск на вязкоупругой прямой.

свойства кривой C аналогичны свойствам среды Кельвина–Фойгта и в недеформированном состоянии C является горизонтальной прямой C_0 . Будем также предполагать, что со стороны C на диск действует сила сухого трения. Эти предположения требуют детальных комментариев, к которым мы сейчас переходим.

Кривая C моделируется непрерывной совокупностью невесомых пружинок (рис. 1). Свободные концы пружинок в недеформированном состоянии образуют горизонтальную прямую, аффинную координату на которой будем обозначать x . Пусть Oxy — неподвижная система координат в плоскости Π , такая, что ось y направлена вертикально вверх и $C_0 = \{y = 0\}$. Ось Oz перпендикулярна Π и задает вместе с Ox и Oy положительную ориентацию пространства.

Согласно нашей модели, каждая из пружинок может перемещаться только вдоль вертикали, поэтому можно считать, что их нумерует переменная x . Координату y свободного конца пружинки будем обозначать $Y = Y(x)$, $Y \leq 0$. Жесткость и коэффициент демпфирования пружинок на единицу длины равны k и ν соответственно, причем предполагается выполненным условие неприлипания. Также будем считать, что при взаимодействии диска D с кривой возникает сила сухого трения с коэффициентом трения $\lambda \neq 0$.

Все это означает, что при погружении D в кривую малый участок dx кривой создает силу dF , удовлетворяющую следующим свойствам.

(а) Проекция силы dF на вертикаль равна

$$dF_y = -(kY(x) + \nu\dot{Y}(x)) dx,$$

если выражение в скобках положительно, и $dF_y = 0$ в противном случае.

(б) При разложении dF на две компоненты — нормальную dN и касательную dT к поверхности диска — имеем

$$|dT| \leq \lambda |dN|. \quad (1.1)$$

При этом в случае, когда горизонтальная компонента скорости соответствующей точки диска отлична от нуля, имеем в (1.1) равенство и горизонтальная компонента силы dN направлена в сторону противоположную скорости.

При $\lambda = 0$ данная модель вязкоупругого основания рассматривалась в [3] (см. также [27–29]). В [4, 5] использована более общая модель (по-прежнему при $\lambda = 0$), в которой допускаются боковые смещения верхних концов пружинок.

Пусть масса и радиус диска равны m и r , а ускорение свободного падения равно g . Далее важную роль играют безразмерные параметры

$$\varepsilon = \left(\frac{mg}{kr^2} \right)^{1/3}, \quad \kappa = \frac{r^{3/2} g^{1/2} \nu^5}{m^2 k^3}.$$

Параметр ε будем считать малым. Это соответствует тому, что в положении равновесия глубина погружения диска в \mathcal{C} мала по сравнению с r . Другими словами, упругая жесткость кривой \mathcal{C} достаточно велика. Параметр κ определяет соотношение между упругими и вязкими свойствами кривой \mathcal{C} . Есть основания полагать, что в большинстве ситуаций κ — величина порядка единицы. Предел $\kappa \rightarrow 0$ естественно назвать упругим, а $\kappa \rightarrow \infty$ — вязким.

2. Основные результаты

Для того чтобы записать уравнения движения диска, необходимо определить проекции на оси x, y силы и проекцию на ось z момента сил, возникающих в результате взаимодействия диска с кривой. Эти величины вычисляются как интегралы по пятну контакта соответствующих инфинитезимальных величин. Обозначения и некоторые предварительные вычисления содержатся в параграфе 4. Одно из первых простейших вычислений показывает, что в положении равновесия половина длины дуги, вдоль которой соприкасаются D и \mathcal{C} , с точностью до малых величин более высокого порядка, равна $(3/2)^{1/3} \varepsilon r$.

В параграфах 5–6 мы рассматриваем задачу о коэффициенте восстановления при падении диска на кривую \mathcal{C} . Предполагается, что диск движется поступательно вдоль вертикали. Задача состоит в нахождении зависимости между скоростью \dot{y}_- диска в момент падения на кривую и скоростью \dot{y}_+ в момент отрыва от кривой. Естественно иметь дело с безразмерными скоростями $v_- = -\dot{y}_-/\sqrt{gr} > 0$ и $v_+ = -\dot{y}_+/\sqrt{gr} < 0$. В предлагаемом контексте рассматриваемая задача аналогична задаче рассеяния. Ее решением является функция $\mathcal{S}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая, что $v_+ = -\mathcal{S}(v_-)$, или функция $v_- \mapsto \mathcal{S}(v_-)/v_-$, называемая коэффициентом восстановления.

Выбирая соответствующий масштаб, мы получаем некоторую универсальную задачу рассеяния, не зависящую от каких бы то ни было числовых характеристик D и \mathcal{C} . Решением этой задачи является функция $\mathcal{H}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (см. рис. 3), при этом выполняется равенство

$$\mathcal{S}(v_-) = \kappa^{-1} \mathcal{H}(\kappa v_-), \quad v_- \geq 0. \quad (2.1)$$

Соответствующий «универсальный» коэффициент восстановления $h'_- \mapsto \mathcal{H}(h'_-)/h'_-$ изображен на рисунке 2.

Теоретические соображения (следствие 1) показывают, что коэффициент восстановления — монотонно убывающая функция, равная единице в нуле и нулю на бесконечности.¹ Монотонное убывание коэффициента восстановления как функции скорости падения — естественный факт. Экспериментальные исследования этой зависимости для цилиндра нам неизвестны. Но монотонное убывание коэффициента восстановления наблюдается в многочисленных экспериментах, произведенных с шаром (см., например, [7, 15]).

¹Конечно, следует с осторожностью относиться к теоретическим предсказаниям об асимптотических свойствах коэффициента восстановления при больших значениях аргумента h'_- , поскольку при больших скоростях материал основания начинает демонстрировать пластические свойства, не учитываемые нашей моделью.

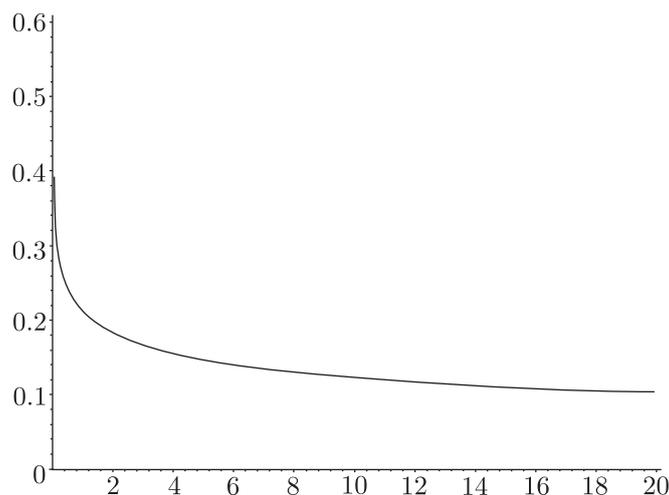


Рис. 2. «Универсальный» коэффициент восстановления для диска.

Обычная ситуация, когда при падении под действием силы тяжести с высоты порядка радиуса ($v_- \sim 1$) диск опять подпрыгивает на высоту порядка радиуса ($v_+ \sim 1$) соответствует условию $\kappa \sim 1$. Случай $\kappa \sim 1$ является основным в рассматриваемых далее двух задачах о движении диска.

Первая из них — так называемая задача о косом ударе (параграф 7) — является обобщением задачи, рассмотренной в параграфах 5–6. Теперь диск может падать на прямую с произвольными значениями скоростей u_x, u_y и ω . Требуется найти связь между скоростями u_{x-}, u_{y-}, ω_- в момент начала взаимодействия D и C и u_{x+}, u_{y+}, ω_+ — скоростями в момент отскока. Результат удобно формулировать в безразмерных переменных v, h' и γ , таких, что

$$u_x = \frac{\sqrt{rg}}{\kappa} v, \quad u_y = -\frac{\sqrt{rg}}{\kappa} h', \quad \omega = \frac{\sqrt{g}}{\kappa\sqrt{r}} \gamma. \quad (2.2)$$

Предложение 9. При малых ε в главном приближении

$$h'_+ = -\mathcal{H}(h'_-), \quad v_+ = \frac{2}{3}v_- - \frac{1}{3}\gamma_- + \lambda\sigma_- \Delta, \quad \gamma_+ = -\frac{2}{3}v_- + \frac{1}{3}\gamma_- + 2\lambda\sigma_- \Delta,$$

где \mathcal{H} — функция, полученная в параграфах 5–6, $\sigma_- = \text{sgn}(v_- + \gamma_-)$ и

$$\Delta = \max \{0, |v_- + \gamma_-| - 3\lambda(h'_+ - h'_-)\}.$$

Таким образом, при косом ударе вертикальное движение диска отделяется от горизонтального и вращательного.

В параграфах 8–12 рассмотрена задача о скольжении и качении диска по кривой C , наклоненной в недеформированном состоянии под углом α к горизонту. Фазовое пространство этой задачи (после факторизации по несущественным «циклическим» координатам) четырехмерно. Координатами в нем являются следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} s, & \text{ где } rs \text{ — взятая с противоположным знаком } y\text{-координата нижней точки диска,} \\ u &= \varepsilon\sqrt{r/g}\dot{s}, \\ v &= u_x/\sqrt{rg}, \text{ где } u_x \text{ — проекция на ось } x \text{ скорости центра диска,} \\ \gamma &= \sqrt{r/g}\omega, \text{ где } \omega \text{ — проекция на ось } z \text{ угловой скорости диска.} \end{aligned}$$

Переменные s и u в уравнениях движения оказываются быстрыми: их скорости изменения s' и u' относительно безразмерного времени $\tau = \sqrt{g/r} t$ имеют порядок ε^{-1} , тогда как $v', \gamma' = O(1)$. Кроме того, различные члены в уравнениях движения можно распределить по степени важности, оценивая их порядок по ε . Используя эти соображения, можно полностью проанализировать движение диска. Динамика естественно разделяется на 3 стадии.

1. На первой стадии, продолжающейся в течение короткого времени

$$\tau \sim \varepsilon \hat{\varepsilon}^{-1} |\ln \hat{\varepsilon}|, \quad \hat{\varepsilon} = (\varepsilon \kappa)^{1/5},$$

затухают поперечные колебания центра масс диска, так что переменные s и u попадают в область

$$s - s_* = O(\hat{\varepsilon}^2), \quad u = O(\hat{\varepsilon}^2), \quad s_* = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cos \alpha \right)^{2/3}$$

и далее в ней остаются.

2. На второй стадии, продолжающейся в течение времени $\tau \sim 1$, основную роль играют силы сухого трения. Если угол наклона прямой C_0 не слишком велик,

$$0 \leq \operatorname{tg} \alpha < 3\lambda, \quad (2.3)$$

то проскальзывание прекращается, т. е. горизонтальная компонента скорости нижней точки диска обращается в нуль. При больших углах α сухое трение не в состоянии остановить проскальзывание. Тогда центр масс диска выходит на (приблизительно) равноускоренное движение.

3. Третья стадия наступает при условии (2.3) в момент прекращения проскальзывания. Здесь роль сухого трения состоит в поддержании режима качения без проскальзывания. Сила сухого трения не совершает работы и, в сущности, играет роль реакции связи $v + \gamma = 0$. Главными активными силами становятся проекция на C_0 силы тяжести и сила трения качения, порождаемая вязкоупругими свойствами кривой C . Если $\alpha \gg \varepsilon \hat{\varepsilon}$, то цилиндр разгоняется до большой скорости и наши приближенные формулы для сил и моментов перестают работать.

Если $\alpha = O(\varepsilon \hat{\varepsilon})$ (например, $\alpha = 0$), то продольная скорость центра масс v стремится к стационарному значению $(\varepsilon \hat{\varepsilon})^{-1} \operatorname{tg} \alpha$, в малую окрестность которого v попадает за время порядка $\varepsilon \hat{\varepsilon}^{-1} |\ln \varepsilon|$. На этом содержательная динамика заканчивается.

3. Модели взаимодействия диска и прямой

Задача о качении диска по прямой эквивалентна задаче о качении цилиндра (в идеале, бесконечно длинного) по плоской поверхности. В литературе обсуждается несколько моделей для описания взаимодействия цилиндра с плоской поверхностью. Эти модели существенно отличаются друг от друга как по физическому содержанию, так и по форме предсказываемых выражений для сил взаимодействия цилиндра с основанием. Приложения к задачам динамики в основном сводятся к нахождению сил сопротивления, возникающих при равномерном качении без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Для качения без проскальзывания силу сопротивления легко найти из (12.3) путем перехода от безразмерных переменных к исходным с учетом того обстоятельства, что при качении без проскальзывания однородного диска (цилиндра) $m\dot{u}_x = -2F_x/3$:

$$F_x = -\frac{mg\nu}{rk} u_x \left(1 - \hat{\varepsilon} s_* \left| \frac{u_x}{\sqrt{rg}} \right| + O(\hat{\varepsilon}^3) \right). \quad (3.1)$$



Момент силы сопротивления относительно центра масс легко вычисляется из условия качения без проскальзывания $u_x + r\omega = 0$:

$$M = -\frac{r}{2}F_x = \frac{mg\nu}{2k}u_x \left(1 - \hat{\varepsilon}_* \left| \frac{u_x}{\sqrt{rg}} \right| + O(\hat{\varepsilon}^3) \right). \quad (3.2)$$

В частности, F и M пропорциональны контактной нагрузке $P = mg$ и скорости. Имеется также квадратичная по скорости поправка, действующая в сторону уменьшения силы (момента). Сопротивление возникает за счет вязкости и обращается в ноль при $\nu = 0$. Это означает, что в рамках рассматриваемой модели трение качения при $\nu = 0$ имеет более высокий порядок малости. Далее мы сравним формулы (3.1)–(3.2) с аналогичными формулами, предложенными ранее.

По-видимому, впервые задачи о качении твердого цилиндра по вязкоупругому основанию и вязкоупругого цилиндра по твердому основанию были рассмотрены О. Рейнольдсом [17, 18]. В этих работах описывались результаты опытов, в которых резиновый цилиндр катился по металлической плоскости и, наоборот, металлический цилиндр двигался по резиновой плоскости. Рейнольдс установил, что зона контакта разбивается на зоны сцепления и микропроскальзывания, которые, в свою очередь, определяются силами трения и упругими деформациями. Вязкие свойства материалов основания и цилиндра не учитывались, и сопротивление качественно объяснялось именно микропроскальзыванием.

Работы Рейнольдса не встретили серьезного интереса со стороны научного сообщества. Как сказано в монографии К. Джонсона [11]: «Проблема определения напряжений и микропроскальзывания при контакте качения двух тел, упругие постоянные которых различны, качественно рассматривалась Рейнольдсом в 1875 году и около 100 лет ожидала своего количественного решения».

В цикле статей Д. Тейбора с соавторами [19–25] момент M сил сопротивления при равномерном качении цилиндра по горизонтальной поверхности выражался в терминах так называемого коэффициента гистерезисных потерь α_{hyst} , характеризующего энергетические потери при циклическом нагружении и разгрузке материала контактирующих тел. В рамках этой модели

$$M = \frac{2\alpha_{hyst}}{3\pi}aP,$$

где P — контактная нагрузка (в простейшей ситуации это вес цилиндра), а a — некоторая характеристика пятна контакта, имеющая размерность длины.

В работах Тейбора коэффициент гистерезисных потерь α_{hyst} считался постоянным и определялся из эксперимента, причем весьма приближенно. Предполагалось, что твердое тело, движущееся по плоскости, является цилиндром или сферой радиуса r . Сила трения качения предполагалась равной $F = M/r$. Затем, на основе теории Герца контактного взаимодействия, определялась зависимость величины a от контактной нагрузки P и радиуса r . Так, для цилиндра, катящегося по горизонтальной плоскости,

$$a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(Pr \frac{1 - \nu^2}{E} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Подстановка этого выражения в формулу для F дает

$$F = \alpha_{hyst} \left(\frac{16 \cdot P^3 (1 - \nu^2)}{9\pi^3 E r} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

Эксперименты показали, что данная гипотеза хорошо подтверждается для движения металлического цилиндра по резиновому основанию и хуже — для движения металлического цилиндра по металлическому основанию. Однако следует отметить, что коэффициент гистерезисных потерь не является в общем случае константой материала. Другой особенностью равенства (3.3) является отсутствие явной зависимости силы трения качения от скорости.

В статье [21] было получено также выражение для силы трения качения, возникающей при качении твердой сферы по деформируемой горизонтальной плоскости. Было показано, что сила трения качения пропорциональна величине $F \sim P^{4/3}r^{-2/3}$. Соответственно, коэффициент трения качения, определяемый как $\lambda = F/P$, пропорционален $P^{1/3}r^{-2/3}$.

В статьях [9, 10] развивался другой подход к решению задачи о движении цилиндра и сферы по деформируемому основанию. Предполагалось, что опорное основание моделируется вязкоупругой средой. Рассматривалась плоская задача о движении жесткой сферы, причем вязкоупругое основание моделировалось множеством параллельно сжатым и не взаимодействующих между собой пружин.

Такой подход не является новым. Моделирование упругого основания в виде «пружинного матраца» встречается также в классических работах У. Томсона (лорда Кельвина) [12], Дж. Максвелла [13], В. Фойгта [26], Э. Винклера [30] и др. В этих моделях пружины обладают разными свойствами. Корректность такого подхода обсуждается в книге [1]. В случае среды Кельвина–Фойгта для режима качения без проскальзывания эта модель, в сущности, совпадает с моделью, используемой нами, поскольку присутствующая у нас дополнительная сила сухого трения на таких движениях совершает пренебрежимо малую работу.

В статьях [9, 10] предполагалось, что упругое основание удовлетворяет модели Кельвина–Фойгта. При этом условия были получены выражения для силы трения, момента трения качения и коэффициента трения качения. Выражения для контактной нагрузки P и силы трения при плоскопараллельном качении сферы радиуса r по горизонтальной плоскости приближенно задавались довольно громоздкими по форме начальными кусками разложения Тейлора по безразмерным параметрам $\varphi = l/r$ и $\beta = \tau u_x/r$.

Здесь l — глубина погружения сферы в упругий материал, β — безразмерная скорость прямолинейного движения сферы, $\tau = \nu/k$ — отношение коэффициента ν вязкости к коэффициенту k упругости пружин, составляющих основание.

При $\beta \ll \varphi$ (предел малых скоростей) формулы для P и F упрощались:

$$P = \frac{\pi}{4} K k a^3 \varphi^4, \quad F = \frac{\pi}{4} K k a^3 \beta \varphi^4, \quad K \approx \frac{4.85}{l}.$$

При этом для коэффициента трения $\lambda = F/P$ получалась формула $\lambda = \beta$, хорошо согласующаяся с опытными данными о движении сферы по деформируемому основанию при малых скоростях.

Если φ и β — величины одного порядка, оказывалось, что $\lambda \sim P^{1/3}r^{-2/3}$, а в случае больших скоростей, т. е. при $\varphi \ll \beta$, приближенно

$$\lambda \approx \frac{3\pi}{16r} \left(\frac{3}{9.7} \frac{P}{k\beta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В работе [14] рассматривалась задача о движении цилиндра с постоянной скоростью u_x по вязкоупругому основанию в предположении, что основание определяется моделью Максвелла. Обозначая через $\tau = \nu/k$ отношение коэффициента вязкости к коэффициенту

упругости пружин, составляющих основание, по которому движется цилиндр, а через a_0 — половину ширины пятна контакта, при малых значениях безразмерного параметра $a_0/(u_x\tau)$ получаем следующее выражение для момента сил трения

$$M \approx -Pa_0(1 - 5a_0/(9u_x\tau));$$

таким образом, момент трения качения линейно зависит от приложенной нагрузки и почти не зависит от скорости движения.

Используемую нами модель при $\lambda = 0$ А. Ю. Ишлинский [3] называет релаксирующим грунтом. В [3] при малых скоростях u_x (3.1) (т. е., выражение в скобках считается равным единице), а в формуле для момента (3.2) отсутствует множитель $1/2$ просто потому, что в [3] по определению полагается $M = rF_x$. Отметим, что в [3] также рассмотрен случай упруго-вязкого грунта (среда Максвелла).

Отметим еще появившиеся сравнительно недавно статьи Т. Пёшеля, Н. Бриллиантова и их соавторов [27–29], в которых также рассматривалась задача о движении цилиндра с малой постоянной скоростью u_x по вязкоупругому основанию, которое моделировалось при помощи множества не взаимодействующих между собой пружин. Основное отличие работ [27–29] от других работ, посвященных задаче о качении цилиндра по вязкоупругому основанию, состоит в том, что учитывается масса пружин, составляющих основание, по которому движется цилиндр. При движении цилиндра по пружинам они испытывают ударное взаимодействие со стороны цилиндра. Соответствующие ударные силы также должны быть учтены при составлении уравнений движения.

Пусть μdx — линейная плотность пружин на единицу длины цилиндра, $k dx$ и νdx — соответственно, упругая и вязкая сила на единицу длины цилиндра, m — масса цилиндра, r — его радиус. В результате для момента сил трения была получена формула

$$F_R = \frac{mg}{r} \left(\frac{\nu}{k} u_x - \frac{3\delta}{4\xi} u_x^2 + \dots \right), \quad \delta = \frac{\nu^2}{k^2} - \frac{2\mu}{k}, \quad \xi = \left(\frac{3r}{2k} mg \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Стоит отметить, что здесь используется нестандартное определение силы трения как характеристики полной диссипации, фигурирующей в уравнении $\dot{\mathcal{E}} = -vF_R$, где \mathcal{E} — полная энергия цилиндра. Этим объясняется несовпадение с формулой (3.1) при $\mu = 0$.

Рассматриваемая в настоящей работе модель, в которой со стороны основания, представляющего собой среду Кельвина–Фойгта, на твердый цилиндр действуют также силы сухого трения, по-видимому, является новой, потому что ни в одной из перечисленных работ влияние сил сухого трения на движущийся цилиндр не учитывалось.

Теперь несколько слов о теоретическом моделировании процесса удара. Основное внимание в литературе уделялось задаче о соударении шаров. Для определения сил в основном использовалась теория Герца в сочетании с квазистатическим подходом (см., например, [8, 16]). По этой причине уравнения движения при прямом и обратном движении оказывались совпадающими (например, в качестве такого уравнения может выступать (6.1) или (6.2)). Используемая здесь методика не требует предположения о применимости квазистатического подхода и учитывает тот факт, что на прямом и обратном движении пятно контакта устроено по-разному. В результате соответствующие уравнения движения отличаются: уравнение (6.1) на прямом и (6.2) — на обратном движении (см. параграфы 5–6).

4. Предварительные вычисления

Пусть $\vartheta = \vartheta(x)$ — угол между вертикалью, направленной вниз, и лучом, выходящим из центра диска и проходящим через точку с координатой x на границе диска (рис. 1). Выберем положительное направление изменения угла против часовой стрелки. Будем рассматривать только точки границы, расположенные на нижней половине диска, так что $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Так как $\varepsilon \ll 1$, ϑ изменяется в малой окрестности нуля.

Пусть диск D погружен в кривую \mathcal{C} так, что y -координата его нижней точки равна $r(\cos \vartheta_0 - 1)$. Тогда D и \mathcal{C} соприкасаются по дуге $-\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$ или по части этой дуги. Тогда

$$Y(x) = r(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) = \frac{r}{2}(\vartheta^2 - \vartheta_0^2) + O(\vartheta_0^4), \quad (4.1)$$

где $\vartheta = \vartheta(x)$. Пусть (u_x, u_y) — скорость центра диска в системе координат Oxy . Простые вычисления показывают, что

$$\dot{Y}(x) = \frac{-u_x \sin \vartheta + u_y \cos \vartheta}{\cos \vartheta} = -\vartheta u_x + u_y + O(\vartheta^3 u_x). \quad (4.2)$$

Так как параметр ε мал, величина ϑ_0 также мала. Поэтому далее мы пренебрегаем последними слагаемыми в (4.1)–(4.2).

С учетом (а) (см. параграф 1) имеем:

$$dF_y = \Phi dx, \quad \Phi(u_x, u_y, \vartheta) = \frac{1}{2}kr(\vartheta_0^2 - \vartheta^2) + \nu(\vartheta u_x - u_y). \quad (4.3)$$

Условие неприлипания $dF_y > 0$ выделяет на интервале $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$ множество $I = I(u_x, u_y, \vartheta_0)$ ненулевых значений силы dF_y :

$$I = \{\vartheta \in (-\vartheta_0, \vartheta_0) : \Phi(u_x, u_y, \vartheta) > 0\}. \quad (4.4)$$

Отметим, что равенство $\Phi = 0$ достигается при ϑ , равном

$$\vartheta_{\pm} = \frac{\nu u_x}{kr} \pm \left(\frac{\nu^2 u_x^2}{k^2 r^2} + \vartheta_0^2 - \frac{2\nu u_y}{kr} \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Следующее предложение доставляет простое достаточное условие для неравенств $\vartheta_+ > \vartheta_0$ и $\vartheta_- < -\vartheta_0$.

Предложение 10. *Предположим, что $u_x > 0$ и $\vartheta_0 > u_y/u_x$. Тогда $\vartheta_+ > \vartheta_0$. Аналогично, если $u_x < 0$ и $\vartheta_0 > -u_y/u_x$, то $\vartheta_- < -\vartheta_0$.*

Тривиальное доказательство опустим.

Теперь вычислим силу dF . Пусть ω — проекция на ось z угловой скорости диска. Пусть A — точка на нижней половине границы диска, имеющая координату x . Рассмотрим горизонтальную компоненту скорости точки A :

$$u_x + r\omega \cos \vartheta(x) = u_x + r\omega + O(\vartheta^2).$$

Положим

$$\sigma = \begin{cases} \operatorname{sgn}(u_x + r\omega) \in \{-1, 1\}, & \text{если } u_x + r\omega \neq 0, \\ \sigma_0 \in [-1, 1], & \text{если } u_x + r\omega = 0. \end{cases}$$



В случае нулевой скорости в законе сухого трения Амонтона – Кулона значение силы следует определять из условия отсутствия проскальзывания, значение σ_0 определяется из динамических соображений.

Используя свойство **(b)** (см. параграф 1), получаем равенства

$$dF_y = dN \cos \vartheta - \sigma \lambda dN \sin \vartheta, \quad dF_x = -dN \sin \vartheta - \sigma \lambda dN \cos \vartheta.$$

Отсюда имеем:

$$dF_y = (1 + O(\vartheta))dN, \quad dF_x = -(\sigma \lambda + \vartheta + O(\vartheta^2))dN, \quad dx = r \cos \vartheta d\vartheta.$$

Здесь во втором равенстве мы оставляем члены разного порядка $\sigma \lambda$ и ϑ , имея в виду следующее обстоятельство. Если $u_x + r\omega \neq 0$ (происходит проскальзывание), то достаточно ограничиться лишь слагаемым $\sigma \lambda$. Если же $u_x + r\omega = 0$ (диск катится), то сухое трение может оказаться несущественным и слагаемое ϑ станет важным.

Пренебрегая малыми поправками, имеем:

$$dF_y = \Phi(u_x, u_y, \vartheta) dx, \quad dF_x = -(\sigma \lambda + \vartheta) dF_y, \quad \text{если } \vartheta \in I, \\ dF_y = dF_x = 0, \quad \text{если } \vartheta \notin I.$$

Выражения для результирующей силы (F_x, F_y) и проекции M на ось z момента сил относительно центра диска имеют вид

$$F_y = \int_I \Phi r d\vartheta, \quad F_x = -\sigma \lambda F_y - \int_I \Phi \vartheta r d\vartheta, \quad M = -\sigma \lambda r F_y. \quad (4.6)$$

В качестве первого применения этих вычислений найдем ϑ_0 в положении равновесия. Здесь $F_x = M = 0$, $u_x = u_y = 0$, $\vartheta_{\pm} = \pm \vartheta_0$,

$$F_y = \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \frac{1}{2} kr(\vartheta_0^2 - \vartheta^2) r d\vartheta = \frac{2}{3} kr^2 \vartheta_0^3 = mg.$$

Таким образом, в положении равновесия

$$\vartheta_0 = (3/2)^{1/3} \varepsilon. \quad (4.7)$$

5. Движение вдоль вертикали

Рассмотрим движения диска, при которых ω и u_x тождественно равны нулю, т. е. задачу о вертикальном ударе невращающегося диска о кривую C . В данном случае

$$\Phi = \frac{1}{2} kr(\vartheta_0^2 - \vartheta^2) - \nu u_y, \quad \vartheta_{\pm} = \pm \vartheta_*, \quad \vartheta_* = \left(\vartheta_0^2 - \frac{2\nu u_y}{kr} \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Следовательно, интервал I (см. (4.4)) имеет вид

$$I = \begin{cases} (-\vartheta_0, \vartheta_0), & \text{если } u_y < 0, \\ (-\vartheta_*, \vartheta_*), & \text{если } 0 < u_y < kr\vartheta_0^2/(2\nu). \end{cases}$$

Введем безразмерную переменную q , такую, что y -координата нижней точки диска равна $-rq$. Тогда

$$q = 1 - \cos \vartheta_0 = \frac{1}{2}\vartheta_0^2 + O(\vartheta_0^4), \quad \dot{q} = -u_y/r. \quad (5.2)$$

В течение движения F_x и M равны нулю. Что касается силы F_y , имеем:

$$F_y = \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \Phi r d\vartheta = \frac{2}{3}kr^2\vartheta_0^3 + 2\nu r^2\dot{q}\vartheta_0, \quad \text{если } \dot{q} \geq 0,$$

$$F_y = \int_{-\vartheta_*}^{\vartheta_*} \Phi r d\vartheta = kr^2(\vartheta_0^2\vartheta_* - \frac{1}{3}\vartheta_*^3) + 2\nu r^2\dot{q}\vartheta_*, \quad \text{если } -kq/\nu \leq \dot{q} \leq 0.$$

Таким образом, уравнения движения $mr\ddot{q} + F_y = 0$ принимают вид

$$\ddot{q} + \frac{2\sqrt{2}r\nu}{m}\dot{q}q^{1/2} + \frac{4\sqrt{2}kr}{3m}q^{3/2} = 0, \quad \text{если } \dot{q} \geq 0, \quad (5.3)$$

$$\ddot{q} + \frac{4\sqrt{2}kr}{3m}\left(q + \frac{\nu\dot{q}}{k}\right)^{3/2} = 0, \quad \text{если } -kq/\nu \leq \dot{q} \leq 0. \quad (5.4)$$

Рассмотрим вопрос о коэффициенте восстановления, т.е. о нахождении зависимости между скоростью u_y в момент соприкосновения диска с кривой при его движении вниз и скоростью отрыва диска от \mathcal{C} в результате его отражения.

Эта задача аналогична задаче рассеяния, и ее формализация выглядит следующим образом. Уравнение (5.3) следует решать с начальными условиями

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_- = \sqrt{g/r}v_- > 0, \quad (5.5)$$

где v_- — безразмерная начальная скорость. При этом надо вычислить значение \hat{q} переменной q в ближайший момент времени \hat{t} , когда \dot{q} обратится в нуль. Затем следует решать уравнение (5.4) с начальными условиями $q(\hat{t}) = \hat{q}$, $\dot{q}(\hat{t}) = 0$, и надо вычислить значение $\dot{q}_+ = \sqrt{g/r}v_+ \leq 0$ скорости \dot{q} в ближайший момент времени, когда обратится в нуль выражение $2(q + \nu\dot{q}/k) = \vartheta_*^2$.

Зависимость $v_+ = -\mathcal{S}(v_-)$ и есть решение задачи рассеяния, а функцию $\mathcal{S}(v_-)/v_-$ следует трактовать как безразмерный коэффициент восстановления, который в отличие от простейших феноменологических моделей, конечно, не будет постоянным.

6. Коэффициент восстановления

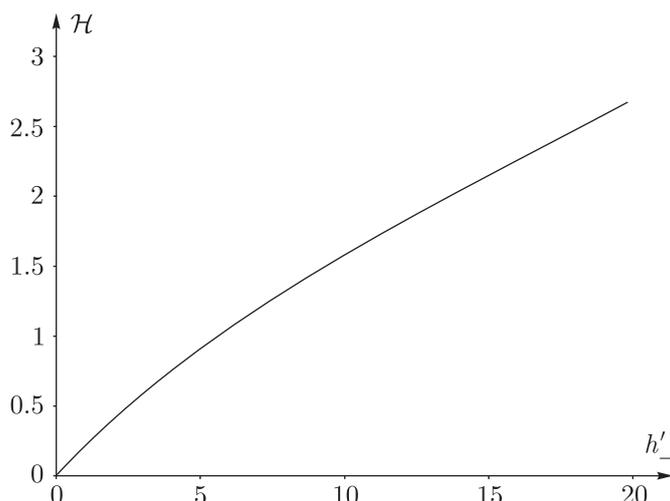
Прежде чем переходить к решению задачи рассеяния, полезно ее обезразмерить. Положим

$$q = \delta_1^2 h, \quad t = \nu\tau/k = \sqrt{r/g}\delta_2\tau, \quad d/d\tau = ()', \quad h'_- = \kappa v_-,$$

где безразмерные параметры δ_1 , δ_2 и κ определены равенствами

$$\delta_1 = \frac{km}{r\nu^2}, \quad \delta_2 = \frac{\nu\sqrt{g}}{k\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^3}{\delta_1}}, \quad \kappa = \frac{\varepsilon^{3/2}}{\delta_1^{5/2}}.$$



Рис. 3. Решение «универсальной» задачи рассеяния — функция $\mathcal{H}(h'_-)$.

Если κ — величина порядка единицы, то параметры δ_1 и δ_2 естественно считать малыми, что соответствует предположениям о том, что

- а) глубина погружения диска в \mathcal{C} мала по сравнению с r ,
 - б) время, в течение которого происходит удар, мало по сравнению с $\sqrt{r/g}$.
- Уравнения (5.3), (5.4), (5.5) преобразуются к виду

$$h'' + 2\sqrt{2}h'h^{1/2} + 4\sqrt{2}h^{3/2}/3 = 0, \quad \text{если} \quad h' \geq 0, \quad (6.1)$$

$$h'' + 4\sqrt{2}(h+h')^{3/2}/3 = 0, \quad \text{если} \quad -h \leq h' \leq 0, \quad (6.2)$$

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = h'_-. \quad (6.3)$$

Пусть h'_+ обозначает скорость h' , являющуюся решением задачи рассеяния (6.1)–(6.3). Тогда $h'_+ = \kappa v_+$. Следовательно, функция \mathcal{H} , определенная равенством $h'_+ = -\mathcal{H}(h'_-)$, связана с \mathcal{S} равенством (2.1).

Предложение 11. 1. Функция \mathcal{H} строго возрастает.

2. Функция $h'_- \mapsto \mathcal{H}(h'_-)/h'_-$ строго убывает.

3. $\mathcal{H}(h'_-) = h'_-(1 + O(h'_-)^{1/5})$ при $h'_- \rightarrow 0$.

4. $\mathcal{H}(h'_-) \sim (h'_-)^{2/3}$ при $h'_- \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Коэффициент восстановления $\mathcal{H}(h'_-)/h'_-$ строго убывает, стремится к 1 при $h'_- \rightarrow 0$ и стремится к нулю при $h'_- \rightarrow \infty$.

Формальное доказательство предложения 11 требует аккуратности. Мы сообщим только общие идеи.

1. Возрастание функции \mathcal{H} почти очевидно. Действительно, если $h'_- > \tilde{h}'_- > 0$, то это соотношение между скоростями при одинаковых значениях h будет выполняться в течение всего «прямого» движения (движения с положительной скоростью). Следовательно, положения $h(\tau)$, $h(\tilde{\tau})$, соответствующие нулевой скорости, также связаны неравенством $h(\tau) > h(\tilde{\tau}) > 0$. При «обратном» движении ситуация аналогична, так что финальные скорости задачи рассеяния удовлетворяют неравенству $h'_+ < \tilde{h}'_+ < 0$.

2. Если увеличить начальную скорость h'_- , то в процессе движения роль диссипативных сил (членов, содержащих \dot{h} в (6.1)–(6.2)) увеличится по сравнению с ролью потенциальных сил (членов, зависящих только от h). Результатом является уменьшение коэффициента восстановления.

3. При малых $h'_- > 0$ диссипативными силами в (6.1)–(6.2) можно пренебречь, и в нулевом приближении уравнения приобретают вид

$$h'' + 4\sqrt{2}h^{3/2}/3 = 0.$$

Чтобы оценить вклад диссипативных сил, оценим их работу \mathcal{A} на невозмущенном движении. Используя интеграл энергии

$$\frac{1}{2}h'^2 + \frac{8\sqrt{2}}{15}h^{5/2} = \frac{1}{2}h'^2_-, \quad (6.4)$$

получаем, что значение h в момент остановки равно $\hat{h} = (15h'_-/(16\sqrt{2}))^{4/5}$. Следовательно, на «прямом» движении

$$\mathcal{A}_1 = -2\sqrt{2} \int_0^{\hat{h}} h^{1/2} h' dh = O(h'_- \hat{h}^{3/2}) = O(h'_-)^{11/5}.$$

На «обратном» движении работа диссипативных сил \mathcal{A}_2 имеет тот же порядок. Поэтому $h'^2_- - h'^2_+$ оценивается величиной $2(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = O(h'_-)^{11/5}$, что и требуется при $h'_- \rightarrow 0$.

4. Если начальная скорость h'_- велика, то в процессе движения доминируют диссипативные силы. В частности, уравнение (6.1) в нулевом приближении можно заменить на $h'' + 2\sqrt{2}h^{1/2}h' = 0$. Здесь имеет место первый интеграл

$$3h' + 4\sqrt{2}h^{3/2} = 3h'_-,$$

из которого получаем, что «прямое» движение прекращается при $h = \hat{h}$, где $\hat{h} \sim h'^2_{-2/3}$. При этом консервативные силы запасут потенциальную энергию (см. (6.4)) порядка $\hat{h}^{5/2} \sim h'^{5/3}_{-}$.

Теперь рассмотрим «обратное» движение. Сначала (пока скорость h' невелика) доминируют консервативные силы. Пренебрегая диссипативными силами, оценим расстояние Δh , необходимое для того, чтобы при h , равном $\hat{h} - \Delta h$ консервативные и диссипативные силы сравнялись по порядку. Условием этого является соотношение $h' \sim h$, где $h = \hat{h} - \Delta h$, а h' вычисляется из энергетических соображений:

$$\frac{1}{2}h'^2 \sim \frac{8\sqrt{2}}{15}(\hat{h}^{5/2} - (\hat{h} - \Delta h)^{5/2}).$$

Из уравнения

$$\hat{h}^{5/2} - (\hat{h} - \Delta h)^{5/2} \sim (\hat{h} - \Delta h)^2$$

с учетом того, что $\Delta h \ll \hat{h}$, получаем:

$$\Delta h \sim \hat{h}^{1/2}, \quad h' \sim \hat{h} \sim h'^2_{-2/3}.$$

Поскольку условие отрыва диска от кривой \mathcal{C} также имеет вид $-h = h'$, т. е. $h' \sim h$, соотношение $h' \sim h'^2_{-2/3}$ сохранится и в момент отрыва. ■

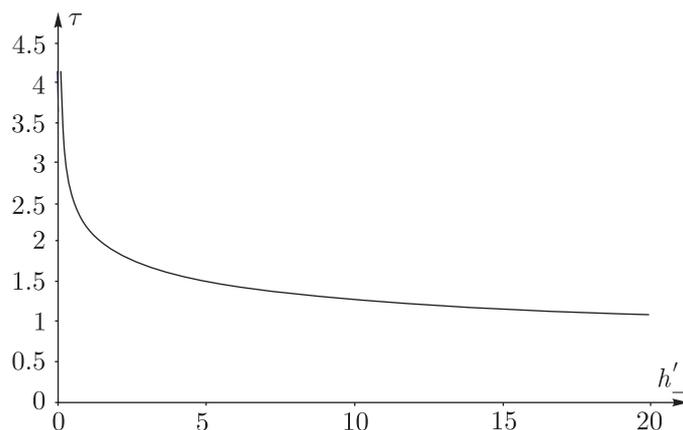


Рис. 4. Время ударного взаимодействия τ в зависимости от скорости в момент соприкосновения диска с поверхностью h'_- .

Отметим также следующий не вполне очевидный факт. Время τ_+ , в течение которого происходит ударное взаимодействие, является убывающей функцией начальной скорости h'_- . Соответствующий график приведен на рисунке 4.

Согласно следствию 1, у кривой \mathcal{C} как среды Кельвина–Фойгта при $h'_- \rightarrow 0$ доминируют упругие свойства, а при $h'_- \rightarrow \infty$ доминируют вязкие свойства. Исходя из этих соображений, далее предел $\kappa \rightarrow 0$ будем называть упругим, а предел $\kappa \rightarrow \infty$ — вязким.

Повседневный опыт говорит, что в большинстве ситуаций коэффициент восстановления — величина порядка единицы. Исходя из этого, по-видимому, следует считать, что при моделировании реальных сред моделью Кельвина–Фойгта в типичной ситуации $\kappa \sim 1$. Впрочем, вязкий и упругий пределы также представляют интерес.

Далее основными параметрами являются ε и κ , так что полезно иметь в виду следующие равенства:

$$\delta_1 = (\varepsilon^3 \kappa^{-2})^{1/5}, \quad \delta_2 = (\varepsilon^6 \kappa)^{1/5}.$$

Мы также используем обозначение

$$\hat{\varepsilon} = (\delta_1 \kappa)^{1/3} = (\varepsilon \kappa)^{1/5}. \quad (6.5)$$

Далее величины, оценивающиеся по модулю сверху постоянными, не зависящими от ε и κ , будем обозначать $O(1)$.

7. Задача о косом ударе

Рассмотрим задачу о кратковременном взаимодействии диска с кривой \mathcal{C} при произвольном падении D на \mathcal{C} . Точнее, задача состоит в следующем. Пусть в момент начала взаимодействия D и \mathcal{C} имеем

$$(u_x, u_y, \omega) = (u_{x-}, u_{y-}, \omega_-), \quad u_{y-} < 0.$$

Требуется найти $(u_x, u_y, \omega) = (u_{x+}, u_{y+}, \omega_+)$ в момент прекращения взаимодействия, т. е. в момент отскока.

Сначала сформулируем основные предположения.

(i) Безразмерные скорости

$$v_- = u_{x-}\kappa/\sqrt{rg}, \quad h'_- = -u_{y-}\kappa/\sqrt{rg}, \quad \gamma_- = \omega_- \kappa \sqrt{r}/\sqrt{g} \quad (7.1)$$

(ср. с (2.2)) имеют порядок $O(1)$.

(ii) Параметр $\delta_1 = \varepsilon^3 \kappa^{-1}$ мал, и $\kappa = O(1)$.

При этих предположениях скорости v_+, h'_+, γ_+ также будут иметь порядок $O(1)$.

Теперь введем удобные безразмерные переменные (2.2), а также

$$\tau = \left(\frac{g}{r}\right)^{1/2} t, \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}, \quad h = \frac{1}{2\delta_1^2} \vartheta_0^2.$$

Далее следует несколько предварительных соображений, которые нам позволят существенно упростить уравнения движения

$$m\dot{u}_x = F_x, \quad m\dot{u}_y = F_y, \quad mr^2\dot{\omega}/2 = M. \quad (7.2)$$

(а) Покажем, что вторым слагаемым в формуле (4.6) для силы F_x можно пренебречь. Действительно, изменение скорости дается формулами

$$m(u_{x+} - u_{x-}) = \int F_x dt, \quad m(u_{y+} - u_{y-}) = \int F_y dt.$$

Следовательно, согласно (i),

$$\frac{u_{y+} - u_{y-}}{\sqrt{rg}} = \frac{1}{m\sqrt{rg}} \int F_y dt = O(1).$$

Ввиду оценки

$$\left| \int_I \Phi \vartheta r d\vartheta \right| \leq \vartheta_0 F_y$$

получаем, что вклад компоненты $\int_I \Phi \vartheta r d\vartheta$ силы F_x в приращение скорости $(u_{x+} - u_{x-})/\sqrt{rg}$ не превосходит малой величины $O(\max \vartheta_0)$, где максимум берется за время взаимодействия D и C .

Таким образом, уравнения (7.2) можно заменить на следующие:

$$m\dot{u}_x = -\sigma\lambda F_y, \quad m\dot{u}_y = F_y, \quad mr^2\dot{\omega}/2 = -\sigma\lambda r F_y. \quad (7.3)$$

(б) Покажем, что при косом ударе интервал I с достаточной точностью выглядит так же, как и при прямом ударе (см. параграф 5):

$$I = \begin{cases} [-\vartheta_0, \vartheta_0], & \text{если } u_y \leq 0, \\ [-\vartheta_*, \vartheta_*], & \text{если } u_y > 0, \end{cases}$$

где ϑ_* определена равенством (5.1) или, в новых обозначениях, $\vartheta_* = \sqrt{2} \delta_1 (h + h')^{1/2}$.

Действительно, записывая (4.5) с учетом обозначений (2.2), имеем

$$\vartheta_{\pm} = \delta_1^2 v \pm \sqrt{2} \delta_1 (h + h' + \delta_1^2 v^2/2)^{1/2} = \pm \sqrt{2} \delta_1 ((h + h')^{1/2} + O(\delta_1 v)),$$

что и требовалось.



С учетом утверждений (а) и (б) на начальном этапе уравнения (7.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} \text{уравнение (6.1), } v' &= \sigma \lambda h'', \quad \gamma' = 2\sigma \lambda h'', \\ h(0) = 0, \quad h'(0) &= h'_-, \quad v(0) = v_-, \quad \gamma(0) = \gamma_-, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где величины v_-, h'_-, γ_- удовлетворяют равенствам (7.1). При этом $\sigma = \sigma_- = \text{sgn}(v_- + \gamma_-)$.

Эти уравнения описывают движение системы до тех пор, пока не произойдет одно из следующих событий:

- (А) $v + \gamma$ обратится в нуль (прекратится проскальзывание),
- (Б) h' обратится в нуль (диск достигнет наинизшего положения).

В момент наступления события (А) σ следует положить равным нулю (диск покатится, а трением качения, согласно (а), мы пренебрегаем), так что v и γ больше меняться не будут. Этот момент времени $\tau = \tau_\diamond$ таков, что

$$|v_- + \gamma_-| = 3\lambda(h'(\tau_\diamond) - h'_-), \quad (7.5)$$

если, конечно, это уравнение удовлетворится в процессе взаимодействия D и C .

В момент наступления события (Б) уравнение (6.1) в системе (7.4) следует заменить на (6.2).

Во всех случаях рассматриваемая система имеет первый интеграл $2v - \gamma = \text{const}$.

Теперь доказательство предложения 9 следует из простых прямых вычислений. ■

8. Скольжение и качение

Рассмотрим задачу о безотрывном скольжении и качении диска D по наклонной прямой. Формально говоря, мы изучаем движение диска по кривой C при следующих предположениях.

(i) Внешние силы сводятся к постоянной силе $mg(\sin \alpha, -\cos \alpha)$, приложенной к центру диска. Угол α естественно трактовать как угол наклона прямой C_0 по отношению к горизонтали.

(ii) Пусть $r\varepsilon^2 s = r\vartheta_0^2/2$ — взятая с противоположным знаком y -координата нижней точки диска. Тогда в начальный момент времени для некоторой малой положительной постоянной c

$$\frac{1}{2rg}\varepsilon^{-2}u_y^2 + \frac{8\sqrt{2}}{15}s^{5/2} - \cos \alpha s < -c. \quad (8.1)$$

Механический смысл этого неравенства состоит в том, что вертикальное отклонение диска от положения равновесия (4.7) (найденного при $\alpha = 0$) и вертикальная компонента скорости центра масс невелики. Это условие требуется для того, чтобы диск не подпрыгивал (не отрывался от C).

Следствие 2. Из (8.1) следует, что

$$\varepsilon^{-1}u_y/\sqrt{rg} = O(1), \quad s = O(1), \quad 1/s = O(1).$$

Отметим, что при условии (4.7) имеем $u_y = 0$, $s = (9/32)^{1/3}$, так что неравенство (8.1) принимает вид $(2/5 - \cos \alpha)(9/32)^{1/3} \leq -c$, что заведомо верно при углах α , не превосходящих $\pi/3$. Далее мы покажем (следствие 5), что оценка (8.1) выполнена в течение всего времени движения.

- (iii) $u_x|_{t=0} = O(\sqrt{gr})$ (умеренная начальная скорость центра диска вдоль C_0).
 (iv) $\omega|_{t=0} = O(\sqrt{g/r})$ (умеренная начальная угловая скорость диска).
 (v) $\hat{\varepsilon} \ll 1$ (параметры среды Кельвина–Фойгта не слишком близки к вязкому пределу).

Предложение 12. Из условий (ii) и (iii) следует, что

$$\frac{2\nu u_y}{kr\vartheta_0^2} = O(\hat{\varepsilon}), \quad \frac{\nu u_x}{kr\vartheta_0} = O(\hat{\varepsilon}).$$

Доказательство предложения сразу следует из соотношений

$$\frac{2\nu u_y}{kr\vartheta_0^2} = \hat{\varepsilon} \frac{\varepsilon^{-1} u_y}{s\sqrt{rg}}, \quad \frac{\nu u_x}{kr\vartheta_0} = \hat{\varepsilon} \frac{u_x}{\sqrt{2srg}}. \quad (8.2)$$

Следствие 3. Из условий (ii), (iii) следует, что

$$(\pm\vartheta_0 - \vartheta_{\pm})/\vartheta_0 = O(\hat{\varepsilon}).$$

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (4.5).

Следствие 4. Из условий (ii), (iii) и (v) следует, что

$$I = (-\vartheta_0(1 - \hat{\varepsilon}\mu_-), \vartheta_0(1 - \hat{\varepsilon}\mu_+)), \quad 0 \leq \mu_{\pm} = O(1). \quad (8.3)$$

Более подробная информация о величинах μ_{\pm} нам понадобится существенно позже.

Теперь, используя следствие 4, найдем явные выражения для силы (F_x, F_y) и момента M (см. (4.6)), считая выполненным условие (8.3). Положим

$$I_0 = (-\vartheta_0, \vartheta_0), \quad I_- = (-\vartheta_0, -\vartheta_0(1 - \hat{\varepsilon}\mu_-)), \quad I_+ = (\vartheta_0(1 - \hat{\varepsilon}\mu_+), \vartheta_0).$$

Пренебрегая малыми поправками, получаем:

$$\begin{aligned} F_y &= \left(\int_{I_0} - \int_{I_-} - \int_{I_+} \right) \Phi r \, d\vartheta = \frac{2}{3} kr^2 \vartheta_0^3 - 2\nu r u_y \vartheta_0 + \hat{F}_y, \\ F_x &= -\sigma \lambda F_y - \left(\int_{I_0} - \int_{I_-} - \int_{I_+} \right) \Phi \vartheta r \, d\vartheta = -\sigma \lambda F_y - \frac{2\nu r}{3} \vartheta_0^3 u_x + \hat{F}_x, \\ M &= -\sigma \lambda r F_y, \\ \hat{F}_y &= -\frac{kr^2 \hat{\varepsilon}^2}{2} \vartheta_0^3 (\mu_-^2 + \mu_+^2) + \nu r \hat{\varepsilon} \vartheta_0 ((u_x \vartheta_0 + u_y) \mu_- - (u_x \vartheta_0 - u_y) \mu_+), \\ \hat{F}_x &= -\frac{kr^2 \hat{\varepsilon}^2}{2} \vartheta_0^4 (\mu_-^2 - \mu_+^2) + \nu r \hat{\varepsilon} \vartheta_0^2 ((u_x \vartheta_0 + u_y) \mu_- + (u_x \vartheta_0 - u_y) \mu_+). \end{aligned}$$

Далее запишем уравнения движения цилиндра в безразмерном виде. Определим следующие



безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}\frac{F_y}{mg} &= \frac{2\vartheta_0^3}{3\varepsilon^3} - 2\left(\frac{\kappa}{\varepsilon^9}\right)^{1/5} \frac{\vartheta_0 u_y}{\sqrt{rg}} + \frac{\hat{F}_y}{mg}, \\ \frac{F_x}{mg} &= -\sigma\lambda \frac{F_y}{mg} - \frac{2}{3}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon^9}\right)^{1/5} \frac{\vartheta_0^3 u_x}{\sqrt{rg}} + \frac{\hat{F}_x}{mg}, \\ \frac{M}{mgr} &= -\sigma\lambda r \frac{F_y}{mg}, \\ \frac{\hat{F}_y}{mg} &= -\frac{\hat{\varepsilon}^2 \vartheta_0^3}{2\varepsilon^3} (\mu_-^2 + \mu_+^2) + \hat{\varepsilon} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon^9}\right)^{1/5} \vartheta_0 \left(\frac{u_x \vartheta_0 + u_y}{\sqrt{rg}} \mu_- - \frac{u_x \vartheta_0 - u_y}{\sqrt{rg}} \mu_+ \right), \\ \frac{\hat{F}_x}{mg} &= -\frac{\hat{\varepsilon}^2 \vartheta_0^4}{2\varepsilon^3} (\mu_-^2 - \mu_+^2) + \hat{\varepsilon} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon^9}\right)^{1/5} \vartheta_0^2 \left(\frac{u_x \vartheta_0 + u_y}{\sqrt{rg}} \mu_- + \frac{u_x \vartheta_0 - u_y}{\sqrt{rg}} \mu_+ \right). \\ \tau &= \left(\frac{g}{r}\right)^{1/2} t, \quad v = \frac{u_x}{(rg)^{1/2}}, \quad s = \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \vartheta_0^2, \quad u = \varepsilon \frac{ds}{d\tau}, \quad \gamma = \left(\frac{r}{g}\right)^{1/2} \omega.\end{aligned}$$

Отметим, что, как и в условии (ii), y -координата нижней точки диска равна $-r\vartheta_0^2/2 = -\varepsilon^2 rs$. Обозначая штрихом производную по τ , получаем:

$$\varepsilon^{-1} u = s' = -\varepsilon^{-2} u_y / \sqrt{rg}, \quad u' = -\varepsilon^{-1} \dot{u}_y / g.$$

С учетом этих обозначений уравнения движения

$$m\dot{u}_x = F_x + mg \sin \alpha, \quad m\dot{u}_y = F_y - mg \cos \alpha, \quad mr^2 \dot{\omega} / 2 = M \quad (8.4)$$

принимают вид

$$s' = \varepsilon^{-1} u, \quad u' = -\varepsilon^{-1} (\Psi_y + \hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_y - \cos \alpha), \quad (8.5)$$

$$v' = -\sigma\lambda (\Psi_y + \hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_y) + \varepsilon (\Psi_x + \hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_x) + \sin \alpha, \quad (8.6)$$

$$\gamma' = -2\sigma\lambda (\Psi_y + \hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_y), \quad (8.7)$$

где $\Psi_y, \hat{\Psi}_y, \Psi_x, \hat{\Psi}_x$ определены равенствами

$$\begin{aligned}\Psi_y &= 2\sqrt{2} \hat{\varepsilon} \sqrt{s} u + 4\sqrt{2} s^{3/2} / 3, \\ \hat{\Psi}_y &= -\sqrt{2} s^{3/2} (\mu_-^2 + \mu_+^2) + \sqrt{2} s ((v\sqrt{2s} - u)\mu_- - (v\sqrt{2s} + u)\mu_+), \\ \Psi_x &= -4\sqrt{2} \hat{\varepsilon} s^{3/2} v / 3, \\ \hat{\Psi}_x &= -2s^2 (\mu_-^2 - \mu_+^2) + 2s ((v\sqrt{2s} - u)\mu_- + (v\sqrt{2s} + u)\mu_+).\end{aligned}$$

Структура системы (8.5)–(8.7) такова, что в ее динамике выделяется три стадии, к описанию которых мы сейчас приступаем.

9. Поперечные движения центра масс

Фазовое движение в проекции на плоскость переменных s, u (во всяком случае, в течение некоторого времени) оказывается существенно более быстрым, чем движение в проек-

ции на плоскость переменных v, γ . Это вытекает из присутствия в уравнениях (8.5) большого множителя ε^{-1} . Считая малое слагаемое $\hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_y$ известной функцией $\hat{\varepsilon}^2 \chi$ времени, рассмотрим уравнения (8.5) отдельно в быстром времени $\hat{\tau} = \varepsilon^{-1} \tau$:

$$ds/d\hat{\tau} = u, \quad du/d\hat{\tau} = -2\sqrt{2}\hat{\varepsilon}\sqrt{s}u - 4\sqrt{2}s^{3/2}/3 + \cos\alpha - \hat{\varepsilon}^2\chi(\hat{\tau}). \quad (9.1)$$

Данное уравнение соответствует колебательной системе с потенциальной силой $\cos\alpha - 4\sqrt{2}s^{3/2}/3$, малой диссипативной силой $-2\sqrt{2}\hat{\varepsilon}\sqrt{s}u$ и малой возбуждающей силой $-\hat{\varepsilon}^2\chi$. При $\chi = 0$ в этой системе все решения, на которых s не обращается в нуль, стремятся к асимптотически устойчивому положению равновесия

$$u = 0, \quad s = s_* = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cos\alpha \right)^{2/3}. \quad (9.2)$$

Согласно предположению (ii), начальные условия $(s, u)|_{t=0}$ для системы (9.1) таковы, что «энергия»

$$E(s, u) = \frac{1}{2}u^2 + V(s) - V(s_*), \quad V(s) = \frac{8\sqrt{2}}{15}s^{5/2} - \cos\alpha s,$$

оказывается меньше, чем $E(0, 0) - c = -V(s_*) - c$.

Предложение 13. *Предположим, что $E(s, u) < -V(s_*)$ при $\hat{\tau} = 0$ и при всех $\hat{\tau} \geq 0$ выполнена оценка $|\chi| \leq c_\chi$, где c_χ — постоянная.*

Тогда существуют положительные постоянные $\hat{\tau}_0, c_0$, такие, что в течение времени $\hat{\tau} \leq \hat{\varepsilon}^{-1} |\ln \hat{\varepsilon}| \hat{\tau}_0$ решение (s, u) уравнений (9.1) приходит в область $\{E \leq c_0 \hat{\varepsilon}^2\}$ и там остается навсегда.

Используя равенства

$$u = -\varepsilon^{-1} u_y / \sqrt{rg}, \quad V(s_*) = -\frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \cos^{5/3} \alpha,$$

легко показать, что (8.1) справедливо в области $\{E \leq c_0 \hat{\varepsilon}^2\}$. Таким образом, получаем

Следствие 5. *Неравенство (8.1) выполнено в течение всего времени движения.*

Доказательство предложения 13. Сначала приведем систему (9.1) к виду, удобному для применения теории усреднения. Для этого воспользуемся переменными E (энергия) и φ (угол).

Потенциал V — гладкий на интервале $(0, s_\diamond)$, где s_\diamond — ненулевое решение уравнения $V(s) = 0$. Поэтому отображение $(s, u) \mapsto (E, \varphi) \in C^\infty$ -гладкий диффеоморфизм области $\{(s, u): 0 < E(s, u) < -V(s_*)\}$ на область $\{(E, \varphi \bmod 2\pi): 0 < E < -V(s_*)\}$. Как всегда, в системе координат типа полярной имеется особенность при $E = 0$, впрочем, не играющая далее никакой роли.

Из (9.1) вытекает, что

$$dE/d\hat{\tau} = -2\sqrt{2}\hat{\varepsilon}s^{1/2}u^2 - u\hat{\varepsilon}^2\chi. \quad (9.3)$$

Чтобы написать уравнения усредненного движения, надо усреднить правую часть этого уравнения по φ , считая u и s функциями от E и φ . На самом деле мы усредним лишь первое слагаемое в правой части (9.3), а существенно меньшее по порядку второе оценим по модулю сверху.



Для оценки среднего $\langle s^{1/2}u^2 \rangle$ используем следующие соображения. Отметим, что $E = \langle E \rangle = \langle u^2 \rangle / 2 + \langle V \rangle - V(s_*)$. Кинетическая $u^2/2$ и потенциальная $V - V(s_*)$ энергии дают вклад одного порядка в среднее от E . Следовательно, для некоторых положительных постоянных $c_1 < c_2$ имеем

$$c_1 E \leq \langle u^2 \rangle \leq c_2 E. \quad (9.4)$$

Так как величина $s^{1/2}$ неотрицательна и, во всяком случае, на большей части любой из невозмущенных траекторий имеет порядок единицы, то из (9.4) вытекает оценка

$$\hat{c}_1 E \leq \langle s^{1/2}u^2 \rangle \leq \hat{c}_2 E$$

для некоторых постоянных $0 < \hat{c}_1 < \hat{c}_2$.

С другой стороны, имеем очевидную оценку $|u\chi| \leq \sqrt{2E} c_\chi$. Таким образом, если энергия E достаточно велика, т. е. выполняется неравенство

$$\hat{c}_1 E \geq c_\chi \sqrt{2E} \hat{\varepsilon}, \quad (9.5)$$

то с учетом усреднения первое слагаемое в правой части (9.3) доминирует и мы имеем в среднем

$$dE/d\hat{\tau} \leq -(2\sqrt{2} - 1)\hat{c}_1 \hat{\varepsilon} E,$$

так что энергия экспоненциально уменьшается с показателем порядка $\hat{\varepsilon}$. Неравенство (9.5) перестает выполняться, когда E уменьшится до значения $E = c_0 \hat{\varepsilon}^2$, $c_0 = 2c_\chi^2 \hat{c}_1^{-2}$, что и требовалось доказать. ■

10. Дополнительная релаксация поперечных движений

Согласно предложению 13, начиная с момента быстрого времени $\hat{\tau} = \hat{\varepsilon}^{-1} |\ln \hat{\varepsilon}| \hat{\tau}_0$ имеем

$$u = O(\hat{\varepsilon}), \quad s = s_* + O(\hat{\varepsilon}). \quad (10.1)$$

Пользуясь этими оценками, можно получить приближенные значения углов ϑ_\pm . Действительно, ввиду (8.2) и (10.1)

$$\frac{\nu u_y}{kr\vartheta_0^2} = \frac{\hat{\varepsilon}u}{2s} = O(\hat{\varepsilon}^2), \quad \frac{\nu u_x}{kr\vartheta_0} = \frac{\hat{\varepsilon}v}{\sqrt{2s_*}} + O(\hat{\varepsilon}^2). \quad (10.2)$$

Следовательно, из (4.5) получаем:

$$\vartheta_\pm = \pm \vartheta_0 (1 \pm \hat{\varepsilon}v/\sqrt{2s_*} + O(\hat{\varepsilon}^2)). \quad (10.3)$$

Теперь с точностью до $O(\hat{\varepsilon})$ можно вычислить μ_\pm :

$$\begin{aligned} \mu_- &= v/\sqrt{2s_*}, & \mu_+ &= 0, & \text{если } v > 0, \\ \mu_- &= 0, & \mu_+ &= -v/\sqrt{2s_*}, & \text{если } v < 0, \end{aligned} \quad (10.4)$$

так что

$$\hat{\Psi}_y = \sqrt{s_*/2} v^2 + \hat{\varepsilon} \hat{\chi}, \quad \hat{\chi} = O(1).$$

Считая $\hat{\chi}$ известной функцией быстрого времени $\hat{\tau}$, запишем еще раз уравнения (8.5):

$$\frac{ds}{d\hat{\tau}} = u, \quad \frac{du}{d\hat{\tau}} = -2\sqrt{2}\hat{\varepsilon}\sqrt{s}u - \frac{4\sqrt{2}}{3}s^{3/2} + \cos\alpha - \hat{\varepsilon}^2\sqrt{\frac{s_*}{2}}v^2 - \hat{\varepsilon}^3\hat{\chi}(\hat{\tau}). \quad (10.5)$$

В этой системе v^2 является функцией времени, но скорость изменения v^2 в быстром времени $\hat{\tau}$ имеет порядок ε , так что в системе (10.5) можно считать v^2 постоянной. В качестве энергии естественно взять

$$\hat{E}(s, u) = \frac{1}{2}u^2 + \hat{V}(s) - \hat{V}(\hat{s}_*), \quad \hat{V}(s) = \frac{8\sqrt{2}}{15}s^{5/2} - \left(\cos\alpha - \hat{\varepsilon}^2\sqrt{\frac{s_*}{2}}v^2\right)s,$$

где $\hat{s}_* = s_* + O(\hat{\varepsilon}^2)$ — точка минимума потенциала \hat{V} . Для некоторой постоянной \hat{c}_0 имеем:

$$\hat{E}(s, u) < \hat{c}_0\hat{\varepsilon}^2 \quad \text{при } \hat{\tau} = \hat{\varepsilon}^{-1}|\ln\hat{\varepsilon}|\hat{\tau}_0. \quad (10.6)$$

Предложение 14. *Предположим, что выполнено условие (10.6) и при всех $\hat{\tau} \geq \hat{\varepsilon}^{-1}|\ln\hat{\varepsilon}|\hat{\tau}_0$ выполнены оценки $|\hat{\chi}| \leq \hat{c}_\chi$, $|v| \leq c_v$, где \hat{c}_χ, c_v — постоянные.*

Тогда существуют положительные постоянные $\hat{\tau}_1, \hat{c}_0$, такие, что в течение времени $\hat{\tau} \leq \hat{\varepsilon}^{-1}|\ln\hat{\varepsilon}|\hat{\tau}_1$ решение (s, u) уравнений (9.1) приходит в область $\{E \leq \hat{c}_0\hat{\varepsilon}^4\}$ и там остается навсегда.

Доказательство предложения 14 то же, что и доказательство предложения 13, только в качестве функции Ляпунова следует использовать \hat{E} вместо E .

11. Прекращение проскальзывания

Вторая стадия начинается с момента времени

$$\tau_0 = \varepsilon\hat{\varepsilon}^{-1}|\ln\hat{\varepsilon}|(\hat{\tau}_0 + \hat{\tau}_1) = \varepsilon^{4/5}\kappa^{-1/5}|\ln\hat{\varepsilon}|(\hat{\tau}_0 + \hat{\tau}_1).$$

Согласно предложению 14, можно положить

$$u(\tau) = \hat{\varepsilon}^2\tilde{u}(\tau), \quad s(\tau) = s_* + \hat{\varepsilon}^2\tilde{s}(\tau), \quad (11.1)$$

где для некоторых постоянных c_u, c_s

$$|\tilde{u}(\tau)| \leq c_u, \quad |\tilde{s}(\tau)| \leq c_s, \quad \text{при всех } \tau > \tau_0.$$

С учетом этих обозначений и равенства $4\sqrt{2}s_*^{3/2}/3 = \cos\alpha$ запишем уравнения (8.6)–(8.7):

$$\begin{aligned} v' &= \sin\alpha - \sigma\lambda\cos\alpha + O(\hat{\varepsilon}^2 + \varepsilon\hat{\varepsilon}), \\ \gamma' &= -2\sigma\lambda\cos\alpha + O(\hat{\varepsilon}^2), \\ \sigma &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(v + \gamma) \in \{-1, 1\}, & \text{если } v + \gamma \neq 0, \\ \sigma_0 \in [-1, 1], & \text{если } v + \gamma = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, с точностью до членов порядка $O(\hat{\varepsilon}^2 + \varepsilon\hat{\varepsilon})$ на второй стадии имеем систему

$$v' = \sin\alpha - \sigma\lambda\cos\alpha, \quad \gamma' = -2\sigma\lambda\cos\alpha. \quad (11.2)$$



Предложение 15. *Предположим, что выполнены неравенства (2.3). Тогда в течение времени $\tau = \tau_1 \sim 1$ в системе (11.2) прекратится проскальзывание, т. е. решение выйдет на инвариантное многообразие $\{v + \gamma = 0\}$.*

Доказательство. Из неравенства (2.3) следует, что выражение в правой части уравнения

$$(v + \gamma)' = \sin \alpha - 3\sigma \lambda \cos \alpha$$

при $v + \gamma \neq 0$ имеет тот же знак, что и $-\sigma = -\operatorname{sgn}(v + \gamma)$, откуда и вытекает требуемое утверждение. ■

В случае $\operatorname{tg} \alpha > 3\lambda$ величина $v + \gamma$ растёт по крайней мере линейно по времени. При больших значениях переменной $v + \gamma$ контроль за порядком величин различных слагаемых в уравнениях движения теряется.

12. Качение без проскальзывания

Начиная с момента времени τ_1 диск катится без проскальзывания. Уравнения (8.6)–(8.7) с учетом равенства $v + \gamma = 0$ дают уравнение для определения σ :

$$3\sigma \lambda (\Psi_y + \hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_y) = \sin \alpha + \varepsilon (\Psi_x + \hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_x). \quad (12.1)$$

С учетом (12.1) уравнение (8.6) принимает вид

$$v' = \frac{2}{3} \sin \alpha + \frac{2}{3} \varepsilon (\Psi_x + \hat{\varepsilon}^2 \hat{\Psi}_x). \quad (12.2)$$

Вычислим функцию $\hat{\Psi}_x$. Сначала с учетом (11.1) аналогично (10.2)–(10.3) находим:

$$\frac{\nu u_y}{kr\vartheta_0^2} = O(\hat{\varepsilon}^3), \quad \frac{\nu u_x}{kr\vartheta_0} = \frac{\hat{\varepsilon}v}{\sqrt{2s_*}} + O(\hat{\varepsilon}^3), \quad \vartheta_{\pm} = \pm \vartheta_0 \left(1 \pm \frac{\hat{\varepsilon}v}{\sqrt{2s_*}} + O(\hat{\varepsilon}^3) \right).$$

Отсюда получаем, что условия (10.4) выполняются с точностью до $O(\hat{\varepsilon}^2)$, так что

$$\hat{\Psi}_x = s_* v |v| + O(\hat{\varepsilon}^2).$$

Получаем явный вид уравнения (12.2):

$$v' = \frac{2}{3} \sin \alpha - \frac{2}{3} \varepsilon \hat{\varepsilon} v (\cos \alpha - \hat{\varepsilon} s_* |v| + O(\hat{\varepsilon}^3)). \quad (12.3)$$

Если порядок величины $\sin \alpha$ больше, чем $\varepsilon \hat{\varepsilon}$, то v монотонно приблизительно линейно по времени растёт и достигает достаточно больших значений. При этом наша модель перестает работать хотя бы потому, что при больших скоростях следует учитывать сопротивление воздуха и другие эффекты.

Рассмотрим случай

$$\sin \alpha = O(\varepsilon \hat{\varepsilon}). \quad (12.4)$$

При условии (12.4) уравнение (12.2) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия

$$v = 2(\varepsilon \hat{\varepsilon})^{-1} \operatorname{tg} \alpha, \quad (12.5)$$

к которому стремятся все решения с начальными условиями $v(\tau_0) = O(1)$. Эти решенияпадают в малую окрестность равновесия (а лучше сказать, стационарного решения) (12.5) в течение времени $\tau \sim (\varepsilon \hat{\varepsilon})^{-1}$. На этом содержательная динамика системы (8.5)–(8.7) заканчивается: диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью (12.5) центра масс.

Список литературы

- [1] Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
- [2] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
- [3] Ишлинский А. Ю. Трение качения // ПММ, 1938, т. 2, № 2, с. 245–260.
- [4] Ишлинский А. Ю. Теория сопротивления перекачиванию (трение качения) и смежных явлений // Всесоюз. конф. по трению и износу в машинах. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1940. С. 255–264.
- [5] Ишлинский А. Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 6, с. 3–15.
- [6] Al-Bender F., de Moerlooze K. Characterization and modelling of friction and wear: An overview // Sustainable Construction and Design, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 19–28.
- [7] Bridges F. G., Hatzes A., Lin D. N. C. Structure, stability and evolution of Saturn's rings // Nature, 1984, vol. 309, pp. 333–338.
- [8] Brilliantov N., Spahn F., Hertzsch J.-M., Pöschel Th. Model for collisions in granular gases // Phys. Rev. E, 1996, vol. 53, no. 3, pp. 5382–5392.
- [9] Flom D. G., Bueche A. M. Theory of rolling friction for spheres // J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, pp. 1725–1730.
- [10] Flom D. G. Dynamic mechanical losses in rolling contacts // Rolling Contact Phenomena / J. V. Badwell (Ed.). London: Elsevier, 1962. P. 97–112.
- [11] Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 468 p. [Джонсон К. Механика контактного взаимодействия М.: Мир. 1989. 510 с.]
- [12] Thompson W. On the elasticity and viscosity of metals // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A., 1865, vol. 14, pp. 289–297.
- [13] Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A., 1866, vol. 157, pp. 26–78.
- [14] May W. D., Morris E. L., Atack D. Rolling friction of a hard cylinder over a viscoelastic material // J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, no. 11, pp. 1713–1724.
- [15] Montaine M., Heckel M., Kruelle C., Schwager T., Pöschel Th. The coefficient of restitution as a fluctuating quantity. arXiv:1104.0049V1 [cond-mat.stat-mech] 31 Mar 2011.
- [16] Ramirez R., Pöschel Th., Brilliantov N., Schwager T. Coefficient of restitution of colliding viscoelastic spheres // Phys. Rev. E, 1999, vol. 60, no. 4, pp. 4465–4472.
- [17] Reynolds O. On rolling friction // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A., 1876, vol. 166, pp. 155–174.
- [18] Reynolds O. On rolling friction // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A., 1875, vol. 23, pp. 506–509.
- [19] Tabor D. The mechanism of rolling friction // Philos. Mag., 1952, vol. 43, pp. 1055–1059.
- [20] Eldredge K. R., Tabor D. The mechanism of rolling friction: 1. The plastic range // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A., 1955, vol. 229, pp. 181–198.
- [21] Tabor D. The mechanism of rolling friction: 2. The elastic range // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A., 1955, vol. 229, pp. 198–220.
- [22] Bowden F. P., Tabor D. Friction and lubrication of solids: Part 1. Oxford: Clarendon Press, 1950. 372 pp.
- [23] Bowden F. P., Tabor D. Friction and lubrication of solids: Part 2. Oxford: Clarendon Press, 1964. 544 pp.
- [24] Боуден Ф. П., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М.: Машиностроение, 1968. 544 с.
- [25] Greenwood J. A., Minshall H., Tabor D. Hysteresis losses in rolling and sliding friction // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A., 1961, vol. 259, pp. 480–507.
- [26] Voigt W. Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle // Ann. Phys., 1892, vol. 283, pp. 671–693.

- [27] Pöschel Th., Schwager T., Brilliantov N. V. Rolling friction of a hard cylinder on a viscous plane // Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys., 1999, vol. 10, pp. 169–174.
- [28] Pöschel Th., Schwager T., Brilliantov N. V., Zaikin A. Rolling friction and bistability of rolling motion // Powders and Grains 2005: Proc. of the 5th Internat. Conf. on Micromechanics of Granular Media / R. Garcia-Rojo, H. J. Herrmann, S. McNamara (Eds.). New York: Balkema Publ., 2005. P. 505–509.
- [29] Pöschel Th., Brilliantov N. V., Zaikin A. Bistability and noise-enhanced velocity of rolling motion // Europhys. Lett., 2005, vol. 69, pp. 371–377.
- [30] Winkler E. Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik: für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.: 1. Theil. Prague: Dominicus, 1867. 388 pp.

A rigid cylinder on a viscoelastic plane

Alexander S. Kuleshov¹, Dmitry V. Treschev², Tatyana B. Ivanova³, Olga S. Naimushina⁴

^{1,2}M. V. Lomonosov Moscow State University

Vorob'evy gory, Moscow, 119899, Russia

² Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences

Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia

^{3,4}Udmurt State University

Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

³Institute of Computer Science

Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

¹kuleshov@mech.math.msu.su, ²treschev@mi.ras.ru, ³tbesp@rcd.ru, ⁴osn@rcd.ru

The paper considers two two-dimensional dynamical problems for an absolutely rigid cylinder interacting with a deformable flat base (the motion of an absolutely rigid disk on a base which in non-deformed condition is a straight line). The base is a sufficiently stiff viscoelastic medium that creates a normal pressure $p(x) = kY(x) + \nu\dot{Y}(x)$, where x is a coordinate on the straight line, $Y(x)$ is a normal displacement of the point x , and k and ν are elasticity and viscosity coefficients (the Kelvin–Voigt medium). We are also of the opinion that during deformation the base generates friction forces, which are subject to Coulomb's law. We consider the phenomenon of impact that arises during an arbitrary fall of the disk onto the straight line and investigate the disk's motion «along the straight line» including the stages of sliding and rolling.

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Keywords: Kelvin–Voigt medium, impact, viscoelasticity, friction

Received May 10, 2011, accepted August 19, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 601–625 (Russian)