Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 627–634.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.01
MSC 2010: 70Hxx

# Сила Лоренца и ее обобщения

**В. В. Козлов**

Обсуждается структура силы Лоренца и связанная с этим аналогия между электромагнетизмом и инерцией. Рассматривается задача об инвариантных многообразиях уравнений движения заряда в электромагнитном поле и условия лагранжевости таких многообразий.

Ключевые слова: сила Лоренца, уравнения Максвелла, сила Кориолиса, симплектическая структура, лагранжево многообразие

**1°.** Как известно, на заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле, действует *сила Лоренца*

$$F = e\left(E + \frac{1}{c}(v \times H)\right), \tag{1}$$

где $E$ и $H$ — напряженности электрического и магнитного полей, $e$ — заряд, $v$ — его скорость, а $c$ — скорость света. В свою очередь компоненты электромагнитного поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, &\qquad \operatorname{div} E &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} H &= \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, &\qquad \operatorname{div} H &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти уравнения записаны при отсутствии поляризации и намагничивания среды, но при наличии зарядов (с плотностью $\rho$) и токов (с плотностью $j$).

Формула (1) получена Х. Лоренцем в 1892 году. Ее частный случай, когда имеется только магнитное поле, выведен О. Хевисайдом тремя годами раньше. Поучительная история уравнений (1) и (2) подробно изложена в книге Э. Уиттекера [1].

В отсутствие других сил уравнение движения заряженной частицы в трехмерном евклидовом пространстве имеет вид

$$m\ddot{x} = e\left(E + \frac{1}{c}(\dot{x} \times H)\right), \quad x \in E^3. \tag{3}$$

Получено 11 августа 2011 года
После доработки 5 сентября 2011 года

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

В отличие от уравнений Максвелла, инвариантных относительно преобразований Лоренца–Пуанкаре, уравнение (3) не допускает такой инвариантности. Эту трудность несложно обойти, заменяя (3) уравнением Лагранжа

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

с релятивистским лагранжианом

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot x^2}{c^2}}.$$

Это уравнение (с учетом формул (1) и (2)) уже лоренц-инвариантно. Вообще, специальная теория относительности пригодна лишь для описания динамики *одной* заряженной частицы в *заданном* электромагнитном поле. Последовательной релятивистской теории многих взаимодействующих частиц не существует (см. по этому поводу [2]).

В дальнейшем (для краткости письма) положим $e = 1$ и $c = 1$. Этого всегда можно добиться подходящим выбором единиц измерения.

**2°.** Магнитная составляющая силы Лоренца по своим свойствам является *гироскопической* силой. В частности, ее присутствие не влияет на сохранность полной энергии. Это наблюдение позволяет развить формальную аналогию между гироскопическими силами и силой Лоренца.

Стоит подчеркнуть, что использование различного рода аналогий было вообще типично для классиков электромагнетизма (см. [1]). Например, для вывода своих уравнений Максвелл широко использовал чисто механические модели, в то время как Кельвин руководствовался аналогиями с вихревыми течениями идеальной жидкости. Ниже обсуждается аналогия между электромагнетизмом и инерцией.

Рассмотрим динамическую систему с $n$ степенями свободы, лагранжиан которой имеет общий вид

$$L = T + (a, \dot x) + b, \tag{4}$$

где $T$ — положительно определенная квадратичная форма по скорости (которую можно интерпретировать как кинетическую энергию системы), а ковектор $a$ и скаляр $b$ — гладкие функции от $x$ и $t$. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{\partial a}{\partial x} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^T\right]\dot x. \tag{5}$$

Это уравнение описывает движение системы с кинетической энергией $T$ (задающей ее инерциальные свойства) под действием силы, линейно зависящей от скорости.

Положим

$$E = -\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x}, \quad H = \operatorname{rot} a, \tag{6}$$

где

$$\operatorname{rot} a = \frac{\partial a}{\partial x} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^T.$$

Тогда сила, фигурирующая справа в уравнении (5), принимает вид силы Лоренца:

$$F = E + \dot{x} \times H.$$

Символ «$\times$» обозначает (как и выше) результат действия многомерного ротора на вектор:

$$\dot{x} \times H = -H \times \dot{x} = -(\operatorname{rot} a)\dot{x}.$$

В трехмерном эвклидовом пространстве эта операция сводится к обычному векторному умножению.

Очевидно, поля (6) удовлетворяют «геометрическим» уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{div} H = 0. \tag{7}$$

Если иметь точную аналогию с электромагнитными силами, то введенные выше поля $E$ и $H$ должны удовлетворять еще двум оставшимся «физическим» уравнениям Максвелла. Эти соотношения для полей (6) в общем случае, конечно, не справедливы. Более того, они могут иметь смысл только в трехмерном пространстве (когда $n = 3$).

Если конфигурационное пространство рассматриваемой системы совпадает с $E^3$, то оставшиеся уравнения Максвелла будут выполнены при подходящем выборе плотности зарядов $\rho$ и плотности тока $j$. Если не учитывать физические соотношения для $j$ и $\rho$ (вроде закона Ома), то аналогия между гироскопическими силами и силой Лоренца для систем с тремя степенями свободы становится более полной.

На первый взгляд, развиваемая аналогия неполна уже при $n = 3$. Действительно, мы имеем *шесть* компонент векторных полей $E$ и $H$, а лагранжиан (4) содержит только *четыре* произвольные функции: три компоненты ковектора $a$ и скаляр $b$. Однако поля $E$ и $H$ не являются независимыми; они удовлетворяют уравнениям Максвелла. Легко понять, что формулы (6) на самом деле дают *общее* решение геометрических уравнений Максвелла (7). Так что это противоречие только кажущееся.

Стоит отметить, что сам Х. Лоренц получил свою формулу (1) примерно тем же способом. Исходный пункт его рассуждений — лагранжиан с гироскопическими слагаемыми. Любопытно, что вид этих линейных по скорости слагаемых он вывел из более ранней формулы Клаузиуса для силы взаимодействия движущихся зарядов, которую сейчас вряд ли кто сочтет правильной (см. [1]).

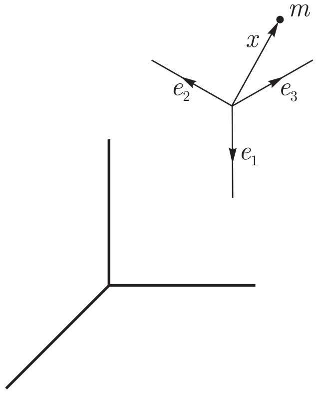
**3°.** Применим эти общие соображения к задаче о движении свободной точки относительно вращающейся (следовательно, неинерциальной) системы отсчета. Пусть

$$x = \sum x_i e_i$$

— радиус-вектор точки массы $m$ в подвижном пространстве. Ее кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + m(v_0 + \omega \times x, \dot{x}) + \frac{m}{2}(v_0 + \omega \times x, v_0 + \omega \times x),$$

где $v_0$ — скорость начала подвижной системы отсчета, $\omega$ — ее угловая скорость вращения (все векторы рассматриваются в подвижном пространстве). Этот лагранжиан имеет вид (4). Следовательно,




$$\alpha = m(v_0 + \omega \times x), \quad b = \frac{m}{2}(v_0 + \omega \times x)^2.$$

По формулам (6),

$$
\begin{aligned}
H &= \operatorname{rot} a = 2m\omega, \\
E &= -\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} = -m\bigl(w_0 + \dot\omega \times x + \omega \times (\omega \times x)\bigr),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $w_0 = \dot v_0 + \omega \times v_0$ — ускорение начала подвижной системы. Следовательно, $E = -mw$, где $w$ — ускорение точки подвижного пространства с радиусом-вектором $x$, рассматриваемое как вектор того же пространства.

Поля $E$ и $H$, задаваемые формулами (8), конечно, удовлетворяют геометрическим уравнениям (7). Два других уравнения Максвелла также будут справедливыми, если положить

$$4\pi\rho = 2m\omega^2, \quad 4\pi j = -m\frac{\partial w}{\partial t},$$

где $w$ — поле ускорений точек вращающейся системы отсчета. Любопытно отметить, что плотность распределения зарядов всегда неотрицательна. Как и магнитное поле, она не зависит от точки пространства. Если векторы $w_0$ и $\omega$ постоянны в подвижной системе отсчета, то тока нет ($j = 0$). Наоброт, если $\omega = 0$ (система отсчета не вращается), то заряды и магнитное поле исчезают, а ток будет однородным векторным полем (не зависящим от точки пространства).

Уравнение движения (5) выражает классическаую теорему о сложении ускорений. Слагаемое $E$ представляет силу инерции переносного движения, а магнитная составляющая силы Лоренца

$$\dot x \times H = 2m(v_{\text{отн.}} \times \omega), \quad v_{\text{отн.}} = \sum \dot x_i e_i,$$

будет силой Кориолиса.

Таким образом, мы приходим к аналогии между *инерцией* и *электромагнетизмом*. Искривление траектории частицы в подвижном пространстве мы обычно объясняем появлением сил инерции. Но можно считать эту частицу заряженной и полагать, что при переходе в неинерциальную систему отсчета появляется электромагнитное поле с зарядами и токами, причем соответствующая сила Лоренца искривляет траекторию частицы по точно такому же закону.

Эту аналогию можно сделать более полной, если вместо движений трехмерного евклидова пространства рассматривать его непрерывные деформации.

**4°.** Представление об универсальности силы Лоренца в лагранжевой механике можно также продемонстрировать с точки зрения теории инвариантных многообразий. Пусть $L(\dot x, x, t)$ — лагранжиан, а $n$-мерное инвариантное многообразие задается векторным соотношением

$$\dot x = v(x, t). \tag{9}$$

Обобщенная сила, действующая на лагранжеву систему, определяется равенством

$$F(\dot x, x, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{10}$$

Подчеркнем, что на вид лагранжиана мы не накладываем никаких ограничений. В частности, он может быть релятивистским.

Выведем формулу для ограничения силы (10) на инвариантную поверхность (9):

$$F| = F(v, x, t).$$

В канонических переменных

$$x, y = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

инвариантная поверхность (9) имеет вид

$$y = u(x, t),$$

где

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{\dot{x}=v}$$

— ковекторное поле на пространстве конфигураций. Ясно, что

$$(y)^{\boldsymbol{\cdot}}\big| = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}v,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}\bigg| = \frac{\partial}{\partial x}(L| - u \cdot v) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^T v.$$

Заметим, что

$$L| - u \cdot v = -h,$$

где $h$ — ограничение гамильтониана на инвариантную поверхность.

Итак, получаем искомую формулу для обобщенной силы:

$$F\big| = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + (\operatorname{rot} u)v.$$

Сопоставляя с (3), естественно положить

$$E = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}, \quad H = -\operatorname{rot} u.$$

Как и (6), эти поля удовлетворяют геометрической части уравнений Максвелла.

Эти вычисления фактически содержатся в [3]. Они вполне аналогичны известным преобразованиям Ламба из гидродинамики (см. по этому поводу [4]).

В качестве примера найдем инвариантную поверхность вида (9) для уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле (3) (где положено $m = e = c = 1$). Ясно, что

$$\ddot{x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v = \frac{\partial v}{\partial t} + (\operatorname{rot} v)v + \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{11}$$

где $h = (v, v)/2$. Сопоставляя с (3), естественно положить

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} = E, \quad \operatorname{rot} v = -H. \tag{12}$$

Из второго уравнения вытекает, что поле $v$ совпадает с векторным потенциалом магнитного поля, взятого с обратным знаком. Сам потенциал определен с точностью до градиента любой функции на конфигурационном пространстве. Если $H = \operatorname{rot} A$, то

$$v = -A + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{13}$$

где $\psi$ — функция от $x$ и $t$.

Согласно первому уравнению системы Максвелла (2),

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{14}$$

где $\varphi$ — некоторая гладкая функция от $x$ и $t$. Из первого соотношения (12) вытекает уравнение для пока неизвестной функции $\psi$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;$$

откуда

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - A, \frac{\partial \psi}{\partial x} - A\right) + \varphi(x,t) = f(t). \tag{15}$$

За счет калибровки

$$\psi \mapsto \psi - \int f(t)\,dt$$

можно обнулить правую часть уравнения (15).

Само уравнение (15) имеет вид уравнения Гамильтона–Якоби. И это не случайно. Действительно, вводя электромагнитные потенциалы $A$ и $\varphi$, уравнение (3) представим в виде уравнения Лагранжа с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + (A, \dot{x}) - \varphi.$$

Применяя преобразование Лежандра

$$x, \dot{x} \mapsto x, y = \frac{\partial L}{d\dot{x}},$$

приходим к гамильтониану

$$H = \frac{1}{2}(y - A, y - A) + \varphi.$$

Соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби совпадает как раз с уравнением (15).

Если $H \neq 0$, то инвариантная поверхность

$$\dot{x} = -A + \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{16}$$

не будет лагранжевой относительно симплектической структуры

$$\sum dx_i \wedge d\dot{x}_i.$$

В канонических переменных поверхность (16) имеет потенциальный вид:

$$y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Другими словами, она лагранжева относительно «правильной» симплектической структуры

$$\sum dx_i \wedge dy_i = \sum dx_i \wedge d\dot{x}_i + \sum_{i>j}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j.$$

**5°.** Эти наблюдения можно обобщить. Вместо подстановки (12) рассмотрим общее уравнение для векторного поля $v$ в трехмерном евклидовом пространстве, которое вытекает из сопоставления уравнений (3) и (11):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\operatorname{rot} v) \times v + \frac{\partial h}{\partial x} = E - H \times v.$$

Вводя магнитный потенциал $A$ и используя формулу (14), перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial (v + A)}{\partial t} + (\operatorname{rot}(v + A)) \times v = -\frac{\partial}{\partial x}(h + \varphi). \tag{17}$$

В отсутствие магнитного поля (когда $A = \mathrm{const}$) это уравнение совпадает с уравнением Эйлера (в форме Ламба), описывающим движение идеальной жидкости в потенциальном силовом поле. Поскольку уравнения движения заряда в электромагнитном поле гамильтоновы, то уравнение (17) легко выводится из общих результатов об инвариантных многообразиях гамильтоновых систем [4]. Отметим два свойства уравнения (17) с учетом указанной гидродинамической аналогии.

В стационарном случае функция

$$h + \varphi = \frac{1}{2}(v(x), v(x)) + \varphi(x) \tag{18}$$

постоянна на линиях тока (интегральных кривых векторного поля $v$) и на обобщенных вихревых линиях (интегральных кривых векторного поля $\operatorname{rot}(v + A) = H + \operatorname{rot} v$). Это — *обобщенная теорема Бернулли*; функцию (18) естественно назвать *функцией Бернулли*. В частности, каждая связная и регулярная поверхность Бернулли

$$B_\alpha = \left\{ x\colon \frac{1}{2} v^2(x) + \varphi(x) = \alpha \right\}$$

будет двумерным тором.

С другой стороны, в общем нестационарном случае обобщенные вихревые линии вморожены в поток системы дифференциальных уравнений (9). Это — *обобщенная теорема Гельмгольца*.

По аналогии с теорией Гамильтона–Якоби полезно ввести *полное решение* системы уравнений в частных производных (17): это функция $v(t, x, c)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, которая при фиксированных значениях параметра $c$ удовлетворяет уравнению (17) и которая удовлетворяет условию невырожденности

$$\rho(t, x, c) = \frac{\partial(v_1, v_2, v_3)}{\partial(c_1, c_2, c_3)} \neq 0.$$

Для потенциального течения (13) это условие переходит в известное условие невырожденности для полного решения уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i\, \partial c_j} \right\| \neq 0.$$

При каждом фиксированном значении $c$ функция $\rho$ удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Без ущерба для общности, $\rho$ можно считать положительной; это плотность воображаемой жидкости.

В стационарном случае векторные поля

$$v \quad \text{и} \quad \frac{H + \operatorname{rot} v}{\rho} \tag{19}$$

коммутируют и касаются регулярных поверхностей Бернулли. Отсюда вытекает, в частности, что частицы жидкости движутся по поверхностям Бернулли по условно-периодическому закону (как и в обычной гидродинамике [5]). Кстати сказать, свойство регулярности поверхности Бернулли $B_\alpha$ можно представить как условие линейной независимости векторов (19) во всех точках $B_\alpha$.

Следовательно, если известно полное стационарное решение системы уравнений (17) с регулярными поверхностями Бернулли, то задача о движении заряда в электромагнитном поле становится интегрируемой. С другой стороны, если $H + \operatorname{rot} v = 0$, то при наличии полного решения системы (17) эта задача интегрируется методом Гамильтона – Якоби. Таким образом, особым является случай, когда ненулевой вектор $H + \operatorname{rot} v$ коллинеарен вектору скорости $v$. Здесь траектории частиц жидкости демонстрируют хаотическое поведение. В отсутствие магнитного поля этот факт строго доказан С. Л. Зиглиным [6].

## Список литературы

[1] Уиттекер Э. История теории эфира и электричества. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 512 с.

[2] Козлов В. В., Никишин Е. М. Релятивистский вариант гамильтонова формализма и волновые функции водородоподобного атома // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1986, № 5, с. 11–20.

[3] Аржаных И. С. Поле импульсов. Ташкент: Наука, 1965. 231 с.

[4] Козлов В. В. Общая теория вихрей. Ижевск: УдГУ, 1998. 238 с.

[5] Козлов В. В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // ПММ, 1983, т. 47, № 2, с. 341–342.

[6] Зиглин С. Л. Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР, Сер. Матем., 1987, т. 51, вып. 5, с. 1088–1103.

### The Lorentz force and its generalizations

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

The structure of the Lorentz force and the related analogy between electromagnetism and inertia are discussed. The problem of invariant manifolds of the equations of motion for a charge in an electromagnetic field and the conditions for these manifolds to be Lagrangian are considered.

MSC 2010: 70Hxx
Keywords: Lorentz force, Maxwell equations, Coriolis force, symplectic structure, Lagrangian manifold

Received August 11, 2011, accepted September 5, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 627–634 (Russian)