Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 715–717.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КОММЕНТАРИИ. ДИСКУССИЯ. КРИТИКА

Замечание к статье П. Е. Рябова «Явное интегрирование и топология случая Д. Н. Горячева»

А. В. Цыганов

Рассмотрим интегрируемую систему с интегралами движения

$$
\begin{gathered}
H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) + M_3^2 + \frac{1}{2}c(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{b}{\alpha_3^2}, \qquad b, c \in \mathbf{R}, \\
K = \left(M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}\right)^2 + 2c\alpha_3^2(M_1^2 - M_2^2) + c^2\alpha_3^4,
\end{gathered} \tag{1}
$$

используя обозначения, принятые в обсуждаемой статье [4]. Скобки Пуассона между динамическими переменными

$$
\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \qquad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \qquad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \tag{2}
$$

являются скобками Ли–Пуассона на алгебре Ли $e^*(3)$. Так как

$$
\{H, K\} = 8c\alpha_3 M_1 M_2(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3),
$$

то данная система является интегрируемой только при нулевом значении интеграла площадей

$$
C = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = 0. \tag{3}
$$

При $b = 0$ эта интегрируемая система и переменные разделения для нее были построены С. А. Чаплыгиным в работе [5]. Обобщение результатов Чаплыгина на случай пучка скобок Пуассона приведено в книге [2].

Сингулярное слагаемое к гамильтониану было добавлено Д. Н. Горячевым в работе [3]. Доказательство того, что переменные разделения Чаплыгина являются переменными разделения и для случая Горячева $b \neq 0$, приведено в работе [9].

Получено 30 сентября 2011 года

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Случаи Чаплыгина и Горячева являются частными случаями так называемого гиростата Ковалевской – Горячева – Чаплыгина, гамильтониан которого отличается от приведенного выше (1) добавлением линейных по моментам M и по координатам α слагаемых. Комплексные переменные для данной более общей системы приведены в [8]. Обсуждение комплексных и вещественных переменных разделения для данной конкретной системы, соответствующих r-матриц и широкого круга вопросов, связанного с применимостью метода разделения переменных для других интегрируемых систем, может быть найдено в книге [1].

В работе [4] утверждается, что новые переменные разделения для случая Горячева могут быть найдены с помощью геометрического метода Харламова. При $c = 1$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ по определению (см. формулу (7) в [4]) данные переменные u_1, u_2 являются корнями полинома

$$zu^2 - 2bu + (2b\xi - kz) = 0, \qquad \text{где} \qquad z = \alpha_3^2, \quad \xi = M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}, \tag{4}$$

и k — постоянная интеграла K. Однако легко проверить, что корни данного полинома не коммутируют друг с другом,

$$\{u_1, u_2\} \neq 0,$$

относительно исходной скобки Пуассона (2) даже при нулевом значении интеграла площадей (3) и, тем самым, не являются переменными разделения. Напомним, что, согласно [6], переменными разделения называются канонические относительно скобки Пуассона переменные.

Таким образом, применение геометрического метода Харламова к случаю Горячева в работе [4] приводит к некоммутирующим относительно скобки Пуассона переменным, которые не являются переменными разделения. Для того чтобы понять, что же дает метод Харламова в обсуждаемом случае, мы перейдем к переменным разделения Чаплыгина [5]:

$$q_{1,2} = \frac{M_1^2 + M_2^2 \pm h}{\alpha_3^2}, \qquad h^2 = (M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2)^2 + 4M_1^2 M_2^2.$$

На нулевом уровне интеграла площадей переменные $q_{1,2}$ коммутируют друг с другом,

$$\{q_1, q_2\} = 0,$$

относительно исходной скобки Пуассона, как и положено в методе разделения переменных [6]. Используя эти переменные $q_{1,2}$ и соответствующие канонически сопряженные импульсы $p_{1,2}$ [9, 10], некоммутирующие корни полинома (4) можно переписать в следующем виде:

$$u_1 = 8(q_1^2 - 1)p_1^2 - 2q_1 + 2H, \qquad u_2 = 8(q_2^2 - 1)p_2^2 - 2q_2 + 2H.$$

Так как любая функция от пары сопряженных переменных разделения вида $s_i(p_i, q_i)$ также является переменной разделения [6], то можно определить следующий набор коммутирующих переменных разделения:

$$s_1(q_1, p_1) = u_1 - 2H, \qquad s_2(q_2, p_2) = u_2 - 2H.$$

Заметим, что абсолютно такой же сдвиг вспомогательных переменных $u_{1,2}$ для получения коммутирующих переменных разделения $s_{1,2}$ использовала и С. В. Ковалевская [7] в своем случае.

Таким образом, становится понятно, что для построения настоящих переменных разделения в случае Горячева геометрический метода Харламова приводит к ошибочным результатам и, следовательно, его необходимо дополнить (например, методами пуассоновой геометрии или другими методами). Только в этом случае мы действительно получим переменные разделения, которые, тем не менее, полностью эквивалентны известным переменным разделения Чаплыгина.

Список литературы

[1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: ИКИ, 2003. 296 с.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: ИКИ, 2005. 576 с.

[3] Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Изв. Варшавского ун-та, 1916, т. 3, с. 1–13.

[4] Рябов П. Е. Явное интегрирование и топология случая Д. Н. Горячева // Докл. РАН, 2011, т. 439, вып. 3, с. 315–318.

[5] Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания, 1903, т. 11, вып. 2, с. 7–10.

[6] Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik. Berlin: G. Reimer, 1884. 300 pp.

[7] Kowalevski S. Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math., 1889, vol. 12, pp. 177–232.

[8] Tsiganov A. V. On the Kowalevski – Goryachev – Chaplygin gyrostat // J. Phys. A, 2002, vol. 35, no. 26, L309–L318.

[9] Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system // Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. Т. 21, Зап. научн. сем. ПОМИ, 374, ПОМИ, СПб., 2010, с. 250–267 [J. Math. Sci. (N. Y.), 2010, vol. 168, no. 8, pp. 901–911.

[10] Tsiganov A. V., Khudobakhshov V. A. Integrable systems on the sphere associated with genus three algebraic curves // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 3–4, pp. 396–414.

Comments on P. E. Ryabov «Explicit integration and topology of D. N. Goryachev case»

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034, Russia
andrey.tsiganov@gmail.com

Received September 30, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 715–717 (Russian)