



УДК: 531.01

MSC 2010: 70F25, 70E18, 70E55, 70E60

## Тележка с омниколесами на плоскости и сфере

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

В работе рассматривается динамика тележки с омниколесами на плоскости и сфере в модельной неголономной постановке. Приведен элементарный вывод уравнений, исследуется динамика свободной системы, указана связь с проблемами управления.

Ключевые слова: омниколесо, роликонесущее колесо, неголономная связь, динамическая система, инвариантная мера, интегрируемость, управляемость

### Содержание

Введение . . . . .	786
1. Неголономная модель омниколеса . . . . .	786
2. Тележка с омниколесами . . . . .	787
3. Свободное движение . . . . .	790
4. Тележка на поверхности сферы . . . . .	796

Получено 3 октября 2011 года  
После доработки 5 декабря 2011 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», мероприятие 1.1. «Научно-образовательный центр «Регулярная и хаотическая динамика» (ГК № 02.740.11.0195). Работа А. А. Килина поддержана грантом президента РФ поддержки молодых кандидатов наук МК-8428.2010.1.

Борисов Алексей Владимирович  
[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Килин Александр Александрович  
[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич  
[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований  
Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1



## Введение

Динамика различных средств передвижения (экипажей) с обычными колесами описана во многих работах (см., например, книгу [5], где содержится обширная библиография по этому вопросу). Тем не менее, даже в этой далеко не новой теме остается множество нерешенных проблем и постановок задач, для которых движение не исследовано полностью. Омниколесо (в русскоязычной литературе его также называют роликонесущим) изобретено не так давно, и имеющаяся литература по теоретическим исследованиям динамики различных устройств с омниколесами пока очень невелика. Это касается как анализа свободной динамики, так и вопросов управления. С вопросами кинематики систем с такими колесами можно ознакомиться в обзоре [10].

В этой работе мы рассматриваем в основном динамику свободной тележки с омниколесами на плоскости и сфере в неголономной постановке. Аналогичная постановка задачи исследуется в работах [6, 7] для достаточно частного случая тележки на плоскости; в работах [3, 4] получены уравнения для более общего случая и проанализирована динамика приведенной системы для специальной конфигурации колес в тележке. Отметим, что для вывода уравнений движения в [3, 4] используется метод работы [8], что, по нашему мнению, приводит к неоправданно громоздким вычислениям. Мы используем здесь уравнения в квазискоростях с неопределенными множителями, отвечающими неголономным связям. Этот путь оказывается в данном случае существенно удобнее для вывода уравнений движения. В частности, после достаточно элементарных вычислений мы получаем уравнения движения тележки с омниколесами на сфере (вид аналогичных уравнений в рамках метода [8] вряд ли возможен).

Динамика тележки с омниколесами на сфере представляет существенный интерес с точки зрения как динамики, так и приложений: здесь имеется множество интересных постановок, тесно связанных с вопросами управления мобильными роботами нового поколения. В частности, данная система интересна в качестве более продвинутой разновидности мобильных устройств, для перемещения которых используются различные механизмы, расположенные внутри (традиционно такими механизмами внутри шара выступают колесные тележки, маятники, гироскопы и др.; см., например, [9, 18]) или снаружи (так называемые боллботы [13, 14]). Использование в таких устройствах омниколес позволяет повысить их маневренность. Отметим, что если вопросы динамики и управления шаром с гироскопом или маятником внутри исследовались ранее (см., например, [17]), то динамика и управление шаром с омнитележкой остаются практически неизученными.

Анализ динамики тележки с омниколесами на сфере в этой работе имеет предварительный характер. Мы также укажем на аналогию полученных уравнений движения с уравнениями другой неголономной задачи, исследованной ранее в связи с наличием алгебраических первых интегралов [2] (см. также [1, гл. 3]).

## 1. Неголономная модель омниколеса

Напомним, что в таком колесе на периферии (внешнем ободе) укреплены ролики, так что колесо опирается на несущую поверхность только одним из роликов. Каждый ролик свободно вращается вокруг оси, неподвижной относительно плоскости диска, при этом колесо может катиться по прямой, составляющей фиксированный угол с плоскостью колеса. Для меканум-колес ось ролика закреплена под углом  $45^\circ$  к плоскости колеса, в то время как для большинства омниколес ось ролика лежит в плоскости колеса.



Простейшей неголономной моделью омниколеса является плоский диск, для которого скорость точки соприкосновения с несущей поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей постоянный угол  $\delta$  с плоскостью колеса (см. рис. 1).

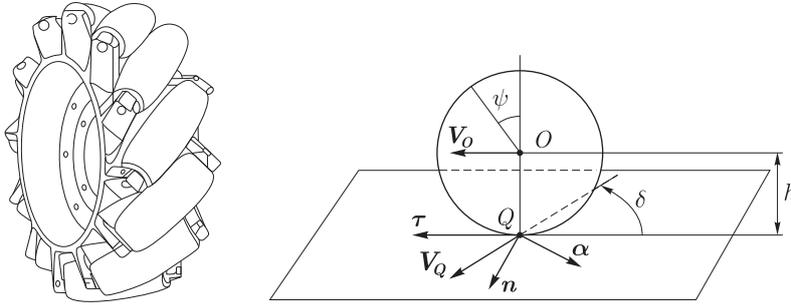


Рис. 1. Схематическое изображение и неголономная модель омниколеса.

Пусть  $\tau, n$  — касательный и нормальный векторы к плоскости колеса в точке контакта, такие, что вектор  $\tau \times n$  направлен вертикально вверх,  $\alpha$  — единичный вектор вдоль оси закрепления роликов, тогда уравнение связи имеет вид

$$(\mathbf{V}_Q, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{V}_Q$  — скорость точки контакта. Если скорость центра колеса обозначим  $\mathbf{V}_O$ , а  $\psi$  — угол его поворота (отсчитываемый по часовой стрелке, если смотреть с вершины вектора  $n$ ), то уравнение связи можно переписать в виде

$$(\mathbf{V}_O + h\dot{\psi}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}) = 0,$$

где  $h$  — радиус колеса. Удобно решить это уравнение относительно  $\dot{\psi}$ , откуда находим

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{sh}(\mathbf{V}_O, \boldsymbol{\alpha}), \quad s = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \sin \delta. \quad (1.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  определен с точностью до знака, то, не умаляя общности, можно считать  $s \geq 0$ .

## 2. Тележка с омниколесами

Получим уравнения движения катящейся по горизонтальной плоскости тележки с омниколесами, состоящей из платформы (каркас), к которой произвольное число колес крепится так, что их оси неподвижны относительно платформы (рис. 2).

Выберем подвижную систему координат  $Oe_1e_2$ , которая жестко связана с платформой; координаты начала отсчета  $O$  и угол поворота осей  $e_1, e_2$  относительно неподвижной системы координат обозначим  $x, y$  и  $\varphi$  соответственно. Векторы  $r_i, \tau_i, \alpha_i, i = 1, \dots, n$ , характеризующее положение, плоскость и направление оси роликов каждого колеса, являются постоянными в подвижных осях. Пусть  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — скорость начала подвижной системы координат  $O$ , спроецированная на подвижные оси, а  $\omega$  — угловая скорость платформы; тогда уравнения связей (1.2), задающих направление скоростей точек контакта, запишутся

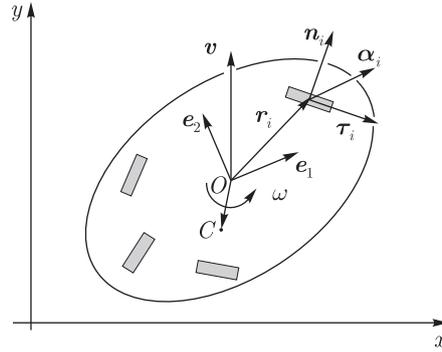


Рис. 2. Схема тележки с омниколесами.

в форме

$$f_i = \dot{\psi}_i + G_i, \quad G_i = \frac{1}{s_i h_i} (\mathbf{v} + \omega \mathbf{J} \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i),$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вектору  $\omega \mathbf{J} \mathbf{r}_i$  в трехмерном пространстве соответствует векторное произведение вида  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ .

Кинетическая энергия системы (без учета связей) состоит из кинетической энергии платформы

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + m_0 \omega (\mathbf{J} \mathbf{R}_{oc}, \mathbf{v}),$$

где  $m_0$  — масса каркаса,  $I_0$  — его момент инерции относительно точки  $O$ ,  $\mathbf{R}_{oc}$  — вектор  $OC$ , где  $C$  — центр масс платформы, и кинетической энергии каждого из колес

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v} + \omega \mathbf{J} \mathbf{r}_i, \mathbf{v} + \omega \mathbf{J} \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} I_i \dot{\psi}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{I}_i \omega^2,$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -го колеса,  $I_i$  и  $\tilde{I}_i$  — центральные моменты инерции колеса относительно оси и диаметра соответственно. Здесь и далее мы считаем, что центры масс колес лежат на их осях, а распределение масс колеса обладает осевой симметрией, то есть центральный тензор инерции колеса имеет вид  $\mathbf{I}_i = \text{diag}(I_i, \tilde{I}_i, \tilde{I}_i)$ . Окончательно для полной кинетической энергии получим

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m \omega (\mathbf{J} \mathbf{r}_c, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \sum_i I_i \dot{\psi}_i^2,$$

$$m = m_0 + \sum_i m_i \text{ — полная масса системы,}$$

$$I = I_0 + \sum_i m_i r_i^2 + \tilde{I}_i \text{ — полный момент инерции относительно точки } O,$$

$$\mathbf{r}_c = m^{-1} (m_0 \mathbf{R}_{oc} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i) \text{ — центр масс всей системы.}$$



ЗАМЕЧАНИЕ. В этом подходе мы пренебрегаем инерцией роликов.

Запишем уравнения Феррерса с неопределенными множителями для данной системы в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}\right)' + \omega \mathbf{J} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} &= \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \mathbf{v}}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)' + \left(\mathbf{J}\mathbf{v}, \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}\right) &= \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \omega} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \omega}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_i}\right)' &= \lambda_i + M_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где  $M_i$  — момент сил, приложенных к осям колес.

Из последнего уравнения и уравнений связей (2.1) находим неопределенные множители в форме

$$\lambda_i = -I_i \dot{G}_i - M_i = -\frac{I_i}{s_i h_i} (\dot{\mathbf{v}} + \dot{\omega} \mathbf{J} \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) - M_i.$$

Подставив их в первые два уравнения и добавляя кинематические соотношения, описывающие движение подвижных осей  $Oe_1e_2$ , получим полную систему уравнений движения в форме

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Gamma} + m\mathbf{E})\dot{\mathbf{v}} + m\dot{\omega}(\mathbf{J}\mathbf{r}_c + \mathbf{R}) + m\omega\mathbf{J}(\mathbf{v} + \omega\mathbf{J}\mathbf{r}_c) &= -\sum_i \mu_i \boldsymbol{\alpha}_i, \\ \hat{I}\dot{\omega} + m(\mathbf{J}\mathbf{r}_c + \mathbf{R}, \dot{\mathbf{v}}) + m\omega(\mathbf{v}, \mathbf{r}_c) &= -\sum_i \mu_i (\mathbf{J}\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i), \\ \dot{x} = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega, & \quad (2.2) \\ \mathbf{\Gamma} = \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} \boldsymbol{\alpha}_i \otimes \boldsymbol{\alpha}_i, \quad \mathbf{R} = m^{-1} \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} (\mathbf{J}\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) \boldsymbol{\alpha}_i, \\ \hat{I} = I + \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} (\mathbf{J}\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)^2, \quad \mu_i = \frac{M_i}{s_i h_i}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что тензорное произведение векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \|a_i b_j\|.$$

При этом матрица  $\mathbf{\Gamma}$  является вырожденной тогда и только тогда, когда все векторы  $\boldsymbol{\alpha}_i$  параллельны друг другу, в противном случае  $\mathbf{\Gamma}$  — невырожденна.

Если моменты сил  $\mu_i$ , приложенные к осям колес, не зависят от  $\mathbf{v}$  и  $\omega$ , то уравнения (2.2) допускают сингулярную инвариантную меру [3]

$$\mu = \frac{1}{\omega} dv_1 dv_2 d\omega dx dy d\varphi.$$

Произвол в выборе начала отсчета и поворота подвижных осей можно использовать, чтобы в той или иной мере упростить либо уравнения движения, либо интегралы системы (если таковые имеются).

Рассмотрим вопрос об управлении тележкой при помощи подбора управляющих моментов  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , таким образом, чтобы тележка двигалась по заданному закону  $\gamma(t) = (x(t), y(t), \varphi(t))$ . Согласно уравнениям (2.2),

*если тележка опирается не менее чем на три ведущие омниколеса так, что не все векторы  $\alpha_i$  параллельны и точки касания  $\mathbf{r}_i$  не лежат на одной прямой, то всегда можно подобрать управляющие моменты  $\mu_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , таким образом, чтобы реализовать предписанное движение  $\gamma(t)$ .*

Проблема устойчивости управляемого движения относительно возмущений управляющих моментов требует отдельного рассмотрения (так, устойчивость одного из простейших движений — прямолинейного движения — анализируется в работе [6]).

### 3. Свободное движение

Рассмотрим свободное движение тележки с омниколесами, при этом в уравнениях (2.2) необходимо положить  $\mu_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Отметим, что простейшие устойчивые решения свободной системы используются в управлении системой методом гейтов [15, 16]: требуемое сложное перемещение системы достигается путем простейших движений свободной системы, которые «сопрягаются» при помощи управляемых движений.

Выберем подвижную систему координат таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{J}\mathbf{r}_c + \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2). \quad (3.1)$$

При этом уравнения движения представляются в форме

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Gamma} + m\mathbf{E})\dot{\mathbf{v}} &= m\omega^2\mathbf{r}_c - m\omega\mathbf{J}\mathbf{v}, & \hat{I}\dot{\omega} &= -m\omega(\mathbf{v}, \mathbf{r}_c), \\ \dot{x} &= v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, & \dot{y} &= v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, & \dot{\varphi} &= \omega. \end{aligned}$$

Эта система допускает интеграл энергии и линейный интеграл:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \left( (\Gamma_1 + m)v_1^2 + (\Gamma_2 + m)v_2^2 + \hat{I}\omega^2 \right), \\ \mathcal{F} &= \hat{I}\omega + (\Gamma_1 + m)\xi_2 v_1 - (\Gamma_2 + m)\xi_1 v_2, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_c = (\xi_1, \xi_2)$ . Вследствие того, что  $\mathbf{\Gamma}$  является суммой неотрицательно определенных симметричных матриц, собственные числа  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — неотрицательны.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При таком выборе подвижных осей энергия системы задается диагональной квадратичной формой (в то время как в системе центра масс она не диагональна).

**1. Приведенная система.** Рассмотрим отдельно приведенную систему, описывающую эволюцию переменных  $v_1, v_2, \omega$ . Имеется три различных случая, когда система (путем обезразмеривания) может быть приведена к наиболее простой форме.

1)  $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$

После замены  $v_1 = \xi_2 u_1, v_2 = -\xi_1 u_2$  уравнения представляются в форме

$$\begin{aligned} a_1 \dot{u}_1 &= \omega(\omega - u_2), & a_2 \dot{u}_2 &= -\omega(\omega - u_1), & b\dot{\omega} &= -\omega(u_1 - u_2), \\ a_1 &= \frac{(\Gamma_1 + m)\xi_2}{m\xi_1}, & a_2 &= \frac{(\Gamma_2 + m)\xi_1}{m\xi_2}, & b &= \frac{\hat{I}}{m\xi_1\xi_2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$



а интегралы принимают вид

$$\mathcal{F} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + b\omega, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}(a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + b\omega^2).$$

2)  $\xi_1 = 0, \xi_2 \neq 0$

После замены  $v_1 = \xi_2 u_1, v_2 = -\xi_2 u_2$  получим:

$$\begin{aligned} a_1 \dot{u}_1 &= -\omega u_2, & a_2 \dot{u}_2 &= -\omega(\omega - u_1), & b\dot{\omega} &= \omega u_2, \\ a_1 &= \frac{\Gamma_1 + m}{m}, & a_2 &= \frac{\Gamma_2 + m}{m}, & b &= \frac{\hat{I}}{m\xi_2^2}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

интегралы:

$$\mathcal{F} = a_1 u_1 + b\omega, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}(a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + b\omega^2).$$

3)  $\xi_1 = \xi_2 = 0$

Система имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 \dot{v}_1 &= \omega v_2, & a_2 \dot{v}_2 &= -\omega v_1, & \dot{\omega} &= 0, \\ a_1 &= \frac{\Gamma_1 + m}{m}, & a_2 &= \frac{\Gamma_2 + m}{m}, \end{aligned}$$

интегралы —

$$\mathcal{F} = \omega, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}(a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2).$$

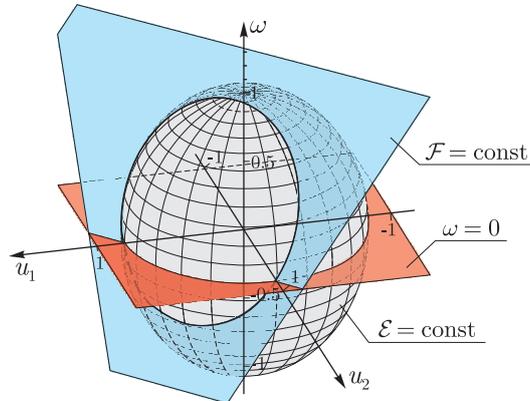


Рис. 3. Пересечение поверхностей постоянной энергии  $\mathcal{E} = \text{const}$  и линейного интеграла  $\mathcal{F} = \text{const}$  при  $a_1 = 1.5, a_2 = 1.4, b = 1$ .

Случаи 1 и 2 схожи между собой, траектории (как приведенной, так и полной) системы образуют двухпараметрическое семейство, определяемое значениями интегралов  $\mathcal{F} = f, \mathcal{E} = h$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Начальные условия для переменных  $x, y, \varphi$  не добавляют новых параметров, так как могут быть исключены выбором неподвижных осей.

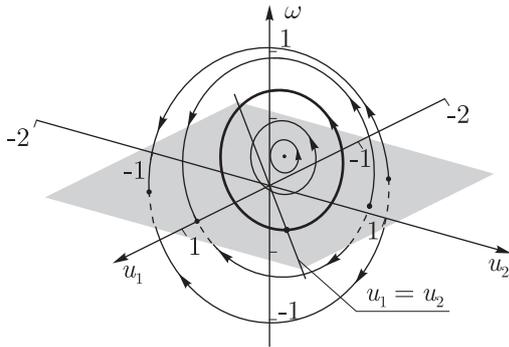


Рис. 4. Характерный вид траекторий приведенной системы в случае 1 при  $a_1 = 1.5$ ,  $a_2 = 1.4$ ,  $b = 1$ .

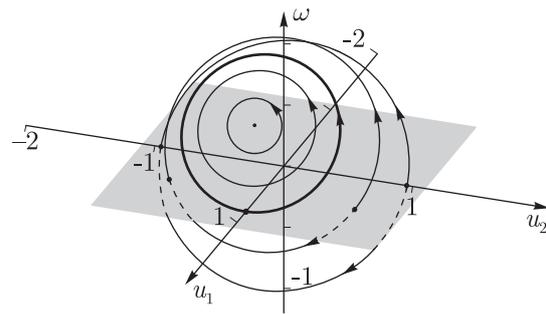


Рис. 5. Характерный вид траекторий приведенной системы в случае 2 при  $a_1 = 1.5$ ,  $a_2 = 1.1$ ,  $b = 1$ .

В трехмерном пространстве переменных  $u_1, u_2, \omega$  траектории задаются пересечением «эллипсоида энергии»  $\mathcal{E} = h$  с плоскостью линейного интеграла  $\mathcal{F} = f$  (см. рис. 3–5), при этом, согласно (3.2), (3.3), плоскость  $\omega = 0$  заменена неподвижными точками приведенной системы. Таким образом, можно выделить 4 типа траекторий приведенной системы:

- 1 тип — неподвижные точки, в которых плоскость линейного интеграла касается эллипсоида энергии,
- 2 тип — неподвижные точки, лежащие в плоскости  $\omega = 0$ ,
- 3 тип — задаваемые кривыми асимптотические траектории, которые пересекают плоскость  $\omega = 0$  и из которых исключены точки пересечения с этой плоскостью,
- 4 тип — периодические траектории, определяемые кривыми, не пересекающими плоскость  $\omega = 0$ .

**2. Бифуркационная диаграмма.** Рассмотрим плоскость значений первых интегралов  $\mathbb{R}^2 = \{(f, h)\}$ ; тем точкам этой плоскости, которые отвечают возможным значениям интегралов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ , соответствуют траектории приведенной системы одного из указанных выше типов. Неподвижные точки системы типа 1 в данном случае являются критическими траекториями рассматриваемой системы, им на плоскости  $(f, h)$  соответствует бифуркационная кривая  $\sigma_1$ , которая определяется уравнением

$$h = \frac{f^2}{2(a_1 + a_2 + b)} \quad (\text{случай 1}), \quad h = \frac{f^2}{2(a_1 + b)} \quad (\text{случай 2}).$$

Эта кривая ограничивает снизу область возможных значений первых интегралов  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ . Неподвижные точки на плоскости  $\omega = 0$  (то есть типа 2) являются критическими траекториями рассматриваемой системы, если их касается кривая пересечения интегралов  $\mathcal{E} = \text{const}$  и  $\mathcal{F} = \text{const}$  (см. рис. 4, 5); им соответствует бифуркационная кривая  $\sigma_2$ , задаваемая уравнением

$$h = \frac{f^2}{2(a_1 + a_2)} \quad (\text{случай 1}), \quad h = \frac{f^2}{2a_1} \quad (\text{случай 2}).$$

Эта кривая на плоскости  $(f, h)$  отделяет область значений интегралов, которые соответствуют периодическим траекториям типа 3, от области, отвечающей траекториям типа 4 (см. рис. 6).

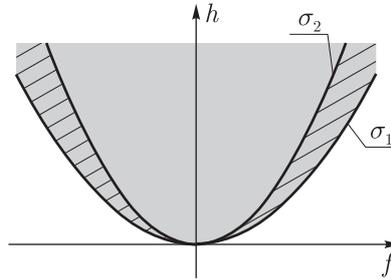


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма системы в случаях 1, 2. Серым цветом обозначена область возможных значений первых интегралов. Заштрихована область, отвечающая периодическим траекториям приведенной системы.

Уравнения приведенной системы в первых двух случаях легко интегрируются после замены времени

$$\omega dt = d\varphi.$$

*Случай 1.* Траектория системы (3.2) представляется в форме

$$\begin{aligned}\omega(\varphi) &= C + A \sin(\omega_0 \varphi) + B \cos(\omega_0 \varphi), \\ u_1(\varphi) &= C - \frac{Ab}{a_1 + a_2} (\sin(\omega_0 \varphi) + a_1 \omega_0 \cos(\omega_0 \varphi)) - \frac{Bb}{a_1 + a_2} (\cos(\omega_0 \varphi) - a_2 \omega_0 \sin(\omega_0 \varphi)), \\ u_2(\varphi) &= C' - \frac{Ab}{a_1 + a_2} (\sin(\omega_0 \varphi) - a_1 \omega_0 \cos(\omega_0 \varphi)) - \frac{Bb}{a_1 + a_2} (\cos(\omega_0 \varphi) + a_1 \omega_0 \sin(\omega_0 \varphi)), \\ \omega_0^2 &= \frac{a_1 + a_2 + b}{a_1 a_2 b}.\end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $A, B, C$  связаны с интегралами  $\mathcal{F}, \mathcal{E}$  соотношениями

$$\mathcal{F} = (a_1 + a_2 + b)C, \quad 2\mathcal{E} = (a_1 + a_2 + b) \left( C^2 + \frac{b}{a_1 + a_2} (A^2 + B^2) \right).$$

Траектория тележки на плоскости в этом случае определяется квадратурами

$$\dot{\varphi} = \omega(\varphi), \quad \dot{x} = \xi_2 u_1(\varphi) \cos \varphi + \xi_1 u_2(\varphi) \sin \varphi, \quad \dot{y} = \xi_2 u_1(\varphi) \sin \varphi - \xi_1 u_2(\varphi) \cos \varphi.$$

*Случай 2.* Траектории системы (3.3) задаются соотношениями

$$\begin{aligned}\omega(\varphi) &= C + A \sin(\omega_0 \varphi) + B \cos(\omega_0 \varphi), \\ u_1(\varphi) &= C - \frac{b}{a_1} (A \sin(\omega_0 \varphi) + B \cos(\omega_0 \varphi)), \\ u_2(\varphi) &= \omega_0 b (A \cos(\omega_0 \varphi) - B \sin(\omega_0 \varphi)), \\ \omega_0^2 &= \frac{a_1 + b}{a_1 a_2 b},\end{aligned}$$

где постоянные интегрирования удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{F} = (a_1 + b)C, \quad 2\mathcal{E} = (a_1 + b) \left( C^2 + \frac{b}{a_1} (A^2 + B^2) \right).$$

Соответствующие квадратуры для  $x, y, \varphi$  имеют вид

$$\dot{\varphi} = \omega(\varphi), \quad \dot{x} = \xi_2(u_1(\varphi) \cos \varphi + u_2(\varphi) \sin \varphi), \quad \dot{y} = \xi_2(u_1(\varphi) \sin \varphi - u_2(\varphi) \cos \varphi).$$

*Случай 3* — наиболее простой: траектория в пространстве переменных  $\omega, v_1, v_2$  представляет собой эллипсы, образующиеся при пересечении эллиптического цилиндра  $\mathcal{E} = h = \text{const}$  плоскостями  $\mathcal{F} = f = \text{const}$ . Закон движения по траектории определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_0 t + \varphi_0, \\ v_1 &= \frac{A \sin(\kappa_1 \kappa_2 \varphi) + B \cos(\kappa_1 \kappa_2 \varphi)}{\kappa_2}, \quad v_2 = \frac{A \cos(\kappa_1 \kappa_2 \varphi) - B \sin(\kappa_1 \kappa_2 \varphi)}{\kappa_1}, \\ \omega_0 &= f, \quad A^2 + B^2 = 2\kappa_1^2 \kappa_2^2 h, \quad \varphi_0 = \text{const}, \end{aligned}$$

где  $\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}, \kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$ . (Здесь  $A, B$  — постоянные интегрирования, которые могут рассматриваться как неоднозначные интегралы системы.) Проинтегрировав соотношения для  $x, y$ , находим

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2\omega_0 \kappa_1 \kappa_2} \left( -\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\omega_1} (A \cos \omega_1 \varphi - B \sin \omega_1 \varphi) - \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\omega_2} (A \cos \omega_2 \varphi + B \sin \omega_2 \varphi) \right), \\ y - y_0 &= \frac{1}{2\omega_0 \kappa_1 \kappa_2} \left( -\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\omega_1} (A \sin \omega_1 \varphi + B \cos \omega_1 \varphi) - \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\omega_2} (A \sin \omega_2 \varphi - B \cos \omega_2 \varphi) \right), \\ \omega_1 &= 1 + \kappa_1 \kappa_2, \quad \omega_2 = 1 - \kappa_1 \kappa_2. \end{aligned}$$

Как и выше, величина  $A^2 + B^2$ , выраженная из этих уравнений, является однозначной периодической функцией по  $\varphi \bmod 2\pi$ ; она определяет инвариантную поверхность в конфигурационном пространстве  $(x, y, \varphi)$ , диффеоморфную тору, и задается соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{\kappa_1^2}{(1 + \kappa_1^2)^2} \eta_1^2 + \frac{\kappa_2^2}{(1 + \kappa_2^2)^2} \eta_2^2 = \text{const}, \\ \eta_1 &= (x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi, \quad \eta_2 = -(x - x_0) \sin \varphi + (y - y_0) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Проекция этой поверхности на плоскость переменных  $(x, y)$  определяет область, в которой происходит движение точки  $O$  (эта область имеет форму кольца).

**3. Абсолютное движение.** Рассмотрим характерный вид движений тележки, соответствующий различным типам траекторий приведенной системы. Движение описывается траекторией начала подвижных осей  $(x(t), y(t))$  и углом поворота платформы  $\varphi(t)$ .

1. Неподвижным точкам типа 1 соответствуют решения приведенной системы

$$\omega = \Omega^{(0)} = \text{const}, \quad v_1 = V_1^{(0)} = \text{const}, \quad v_2 = V_2^{(0)} = \text{const}.$$

Интегрируя уравнения для  $x, y, \varphi$ , находим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \Omega^{(0)} t + \varphi_0, \\ \begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi(t)\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi(t)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi(t)\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi(t)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{(0)}/\Omega^{(0)} \\ V_2^{(0)}/\Omega^{(0)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Таким образом, тележка равномерно вращается вокруг вертикальной оси, при этом точка  $O$  движется по окружности радиуса  $\frac{(V_1^{(0)})^2 + (V_2^{(0)})^2}{(\Omega^{(0)})^2}$  (угловые скорости обоих движений совпадают).

2. Неподвижным точкам типа 2 (то есть на плоскости  $\omega = 0$ ) соответствуют

$$\omega = 0, \quad v_1 = V_1^{(0)} = \text{const}, \quad v_2 = V_2^{(0)} = \text{const},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 = \text{const}, & x(t) &= x_0 + V_x t, & y(t) &= y_0 + V_y t, \\ V_x &= V_1^{(0)} \cos \varphi_0 + V_2^{(0)} \sin \varphi_0 = \text{const}, & V_y &= -V_1^{(0)} \sin \varphi_0 + V_2^{(0)} \cos \varphi_0 = \text{const}, \end{aligned}$$

то есть тележка движется по прямой; при этом в случае, когда центр масс находится впереди по отношению к началу координат, определенному соотношением (3.1), эти движения являются устойчивыми, в противном случае они неустойчивы.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Устойчивость рассматривается по отношению к вариациям начальных скоростей.

3. Асимптотическим траекториям типа 3 отвечают движения тележки, при которых она стремится при  $t \rightarrow \pm\infty$  к прямолинейному равномерному движению. При этом за время движения тележка поворачивается на некоторый конечный угол вокруг вертикальной оси.

4. Периодическим траекториям типа 4 соответствуют наиболее сложные движения тележки. Тележка в этом случае вращается вокруг вертикальной оси с переменной угловой скоростью, не меняя направления вращения, траектория начала подвижной системы координат представляет собой сложную кривую в кольцевой области на плоскости, состоящую из повторяющихся участков, поворачивающихся относительно некоторой точки на плоскости.

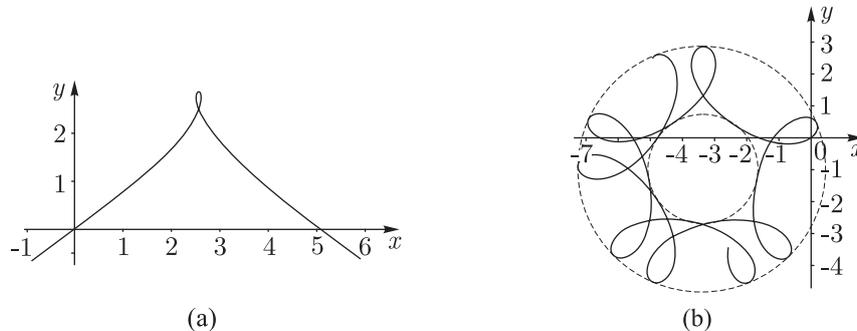
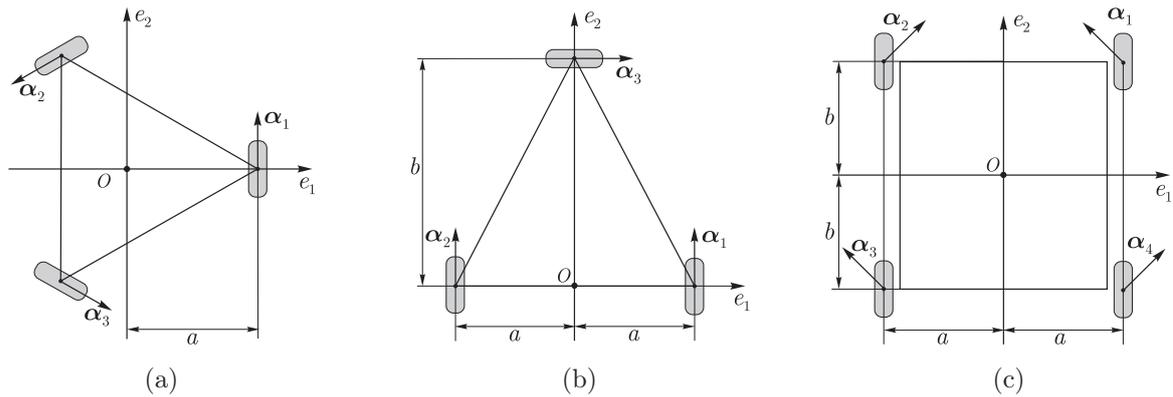


Рис. 7. Характерный вид траекторий начала координат  $O$  на плоскости в случае асимптотического (а) и периодического (б) движения приведенной системы ( $b = 1$ ,  $a_1 = 1.5$ ,  $a_2 = 1.1$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1$ ).

**Примеры.** Рассмотрим три встречающиеся в литературе схемы крепления омниколес к платформе (расположение колес и направления осей роликов в них показаны на рис. 8). В первых двух тележках используются обычные омниколеса (ось роликов лежит в плоскости колеса), в последнем случае — меканум-колеса (ось роликов закреплена в ободке под углом  $45^\circ$ ).



$\Gamma = \text{diag}\left(\frac{3}{2}m_w, \frac{3}{2}m_w\right)$ $\eta_1 = \frac{2mc_1}{2m + 3m_w}, \quad \eta_2 = \frac{2mc_2}{2m + 3m_w}$ $\xi_1 = \frac{3m_w c_1}{2m + 3m_w}, \quad \xi_2 = \frac{3m_w c_2}{2m + 3m_w}$	$\Gamma = \text{diag}(m_w, 2m_w)$ $\eta_1 = \frac{mc_1}{m + 2m_w}, \quad \eta_2 = \frac{mc_2 + m_w b}{m + m_w}$ $\xi_1 = \frac{2m_w c_1}{m + 2m_w}, \quad \xi_2 = -\frac{m_w(b - c_2)}{m + m_w}$	$\Gamma = \text{diag}(2m_w, 2m_w)$ $\eta_1 = \frac{mc_1}{m + 2m_w}, \quad \eta_2 = \frac{mc_2}{m + 2m_w}$ $\xi_1 = \frac{2m_w c_1}{m + 2m_w}, \quad \xi_2 = \frac{2m_w c_2}{m + 2m_w}$
---	--	--

Рис. 8. Возможные схемы тележек с омниколесами и соответствующие им значения параметров, встречающихся в уравнениях движения.

В каждом из рассматриваемых случаев выберем систему координат, связанную с тележкой, как показано на рисунке 8. Будем предполагать, что координаты центра масс в этой системе

$$\mathbf{r}_c^{(0)} = (c_1, c_2).$$

Для каждой из схем колеса предполагаются одинаковыми (в первых двух тележках используются обычные омниколеса, в последней — меканум-колеса), обозначим через приведенную массу колеса  $m_w$  величину

$$m_w = \frac{I_w}{s_w^2 h_w^2},$$

где  $I_w$  — момент инерции колеса относительно оси,  $h_w$  — его радиус,  $s_w = 1$  для омниколеса и  $s_w = \frac{\sqrt{2}}{2}$  для меканум-колеса.

Используя соотношение (2.2), находим положение начала системы координат  $O'$ , в которой энергия системы диагональна, соответствующие координаты обозначим  $(\eta_1, \eta_2)$ . Вычисляя положение центра масс в новой системе координат, находим величины  $(\xi_1, \xi_2)$ . Соответствующие выражения для этих величин приведены на рисунке 8.

#### 4. Тележка на поверхности сферы

Пусть тележка с омниколесами движется по поверхности неподвижной сферы (в поле тяжести, см. рис. 9).

В этом случае удобно рассмотреть тележку как твердое тело с неподвижной точкой, в качестве которой выбирается центр сферы. Выберем подвижную систему координат  $Oe_1e_2e_3$  с началом в центре сферы и осями, совпадающими с главными осями инерции



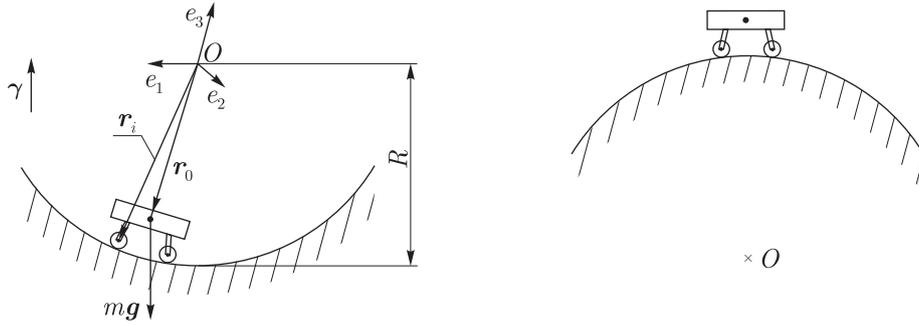


Рис. 9

системы. Обозначим угловую скорость тележки  $\boldsymbol{\omega}$ , а полную угловую скорость каждого колеса  $\boldsymbol{\omega}_i$ ; если угол поворота колеса относительно тележки  $\psi_i$ , то выполнены соотношения

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} + \dot{\psi}_i \mathbf{n}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\mathbf{n}_i$  — единичный вектор, направленный вдоль оси колеса. Для скорости точки контакта  $Q_i$  колеса со сферой имеем

$$\mathbf{V}_{Q_i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{h_i}{R - h_i} \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $R, h_i$  — радиусы сферы и колеса соответственно. Используя это соотношение, представим уравнения связей (1.1) в форме

$$f_i = \dot{\psi}_i + \frac{1}{s_i h_i} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i) = 0, \quad s_i = \frac{(\mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)}{R},$$

где  $\boldsymbol{\alpha}_i$  — единичный вектор вдоль оси ролика в точке контакта. В выбранной системе координат векторы  $\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i$  — постоянны.

Будем предполагать, что для каждого колеса ось вращения проходит через центр масс колеса и является его главной осью инерции: тогда кинетическая энергия системы представляется в форме

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \sum_i (m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 + (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)) = \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) + \sum J_i \dot{\psi}_i (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}_i) + \frac{1}{2} \sum_i J_i \dot{\psi}_i^2, \\ \mathbf{I} &= \mathbf{I}_0 + \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + \mathbf{I}_i, \quad J_i = (\mathbf{n}_i, \mathbf{I}_i \mathbf{n}_i), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{I}_0$  — тензор инерции каркаса относительно центра сферы,  $\mathbf{I}_i$  — тензор инерции колеса относительно его центра масс, а  $\mathbf{I}$  — тензор инерции всей тележки относительно центра сферы. Вследствие того что ось вращения колеса совпадает с его главной осью инерции, выполнено соотношение  $\mathbf{I}_i \mathbf{n}_i = J_i \mathbf{n}_i$ .

Уравнения Феррерса в подвижных осях в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right)' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\omega}} - mg\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_k}\right)' &= \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{\psi}_k} + M_k = \lambda_k + M_k, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_0$  — вектор из центра сферы в центр масс тележки,  $\boldsymbol{\gamma}$  — орт вертикали. Исключая при помощи второго уравнения и связи (4.1) неопределенные множители  $\lambda_i$ , находим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_i \left[ \frac{J_i}{s_i^2 h_i^2} (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\rho}_i) \boldsymbol{\rho}_i - \frac{J_i}{s_i h_i} ((\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\rho}_i) \mathbf{n}_i + (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}_i) \boldsymbol{\rho}_i) \right] + \\ + \boldsymbol{\omega} \times \left( \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} - \sum_i \frac{J_i}{s_i h_i} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}_i) \mathbf{n}_i \right) &= - \sum \mu_i \boldsymbol{\rho}_i - mg\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \boldsymbol{\rho}_i &= \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i, \end{aligned}$$

где  $\mu_i = \frac{M_i}{s_i h_i}$ . Добавляя кинематическое соотношение, описывающее эволюцию неподвижного орта  $\boldsymbol{\gamma}$  в подвижных осях, окончательно перепишем уравнение движения в форме

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \widehat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} &= - \sum_i \mu_i \boldsymbol{\rho}_i - mg\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \widehat{\mathbf{I}} &= \mathbf{I} + \sum_i \left( \frac{J_i}{s_i^2 h_i^2} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i - \frac{J_i}{s_i h_i} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right), \\ \widehat{\mathbf{J}} &= \mathbf{I} - \sum_i \frac{J_i}{s_i h_i} \mathbf{n}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если матрицы  $\widehat{\mathbf{I}}$ ,  $\widehat{\mathbf{J}}$  одновременно диагонализуются (то есть  $[\widehat{\mathbf{I}}, \widehat{\mathbf{J}}] = 0$ ) и  $\mu_i$  не зависят от угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , то уравнения (4.2) допускают стандартную инвариантную меру  $d\boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\gamma}$ .

Без управляющих моментов ( $\mu_i = 0, i = 1, \dots, n$ ) и в отсутствие поля тяжести ( $g = 0$ ) уравнения аналогичны случаю Эйлера в динамике твердого тела

$$\widehat{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \widehat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.3)$$

и допускают три дополнительных интеграла

$$F_0 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad F_1 = (\widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \widehat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}), \quad E = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$$

(интеграл  $E$  совпадает с кинетической энергией системы, вычисленной с учетом связей).

В случае отсутствия управляющих моментов ( $\mu_i = 0$ ) и наличия поля тяжести ( $g \neq 0$ ) имеется лишь два интеграла:

$$F_0 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad E = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + mg(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\gamma}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если матрицы  $\widehat{\mathbf{I}}$ ,  $\widehat{\mathbf{J}}$  одновременно диагонализуются, то система (4.3) эквивалентна задаче, исследованной в работе [2] (см. также § 3 гл. 3 в книге [1]). Если кроме того пара



собственных значений каждой из матриц  $\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}$  совпадает, то система (4.2) при  $\mu_i = 0$  интегрируется в квадратурах.

ПРИМЕР. Рассмотрим подробнее тележку на сфере, для которой схема крепления колес изображена на рисунке 8b. Если все колеса имеют одинаковый радиус  $h$ , то при выборе осей  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  в соответствии с рисунком 8b получим

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}_1 = (a, 0, \sqrt{R_w^2 - a^2}), \quad \mathbf{r}_2 = (-a, 0, \sqrt{R_w^2 - a^2}), \quad \mathbf{r}_3 = (0, b, \sqrt{R_w^2 - b^2}), \quad R_w = R - h.$$

При этом  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i = R_w \mathbf{n}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и для матриц  $\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}$  получим

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m_w R_w^2 \left(1 - \frac{2h}{R_w}\right) \begin{pmatrix} 2 \left(1 - \frac{a^2}{R_w^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{b^2}{R_w^2} & -\frac{b}{R_w} \sqrt{1 - \frac{b^2}{R_w^2}} \\ 0 & -\frac{b}{R_w} \sqrt{1 - \frac{b^2}{R_w^2}} & \frac{2a^2 + b^2}{R_w^2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{I} - m_w h R_w \begin{pmatrix} 2 \left(1 - \frac{a^2}{R_w^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{b^2}{R_w^2} & -\frac{b}{R_w} \sqrt{1 - \frac{b^2}{R_w^2}} \\ 0 & -\frac{b}{R_w} \sqrt{1 - \frac{b^2}{R_w^2}} & -\frac{2a^2 + b^2}{R_w^2} \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{I}}$  коммутируют при условии

$$2h = R,$$

то есть уравнения (4.2) допускают в этом случае инвариантную меру с постоянной плотностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это условие по форме совпадает с условием существования интеграла в задачах о качении шара по сфере [2].

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: РХД, 2001. 384 с.
- [2] Борисов А. В., Цыгвинцев А. В. Показатели Ковалевской в классической динамике: I, II // Regul. Chaotic Dyn., 1996, vol. 1, no. 1, pp. 15–37.

- [3] Зобова А. А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 4, с. 771–783.
- [4] Зобова А. А., Татаринцов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // *ПММ*, 2009, т. 73, вып. 1, с. 13–22.
- [5] Лобас Л. Г. Неголономные модели колесных экипажей. Киев: Наукова думка, 1986. 232 с.
- [6] Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // *ПММ*, 2010, т. 74, вып. 4, с. 610–619.
- [7] Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2007, № 6, с. 142–149.
- [8] Татаринцов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, 2003, вып. 3, с. 67–76.
- [9] Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // *Journal of Systems and Control Engineering*, 2003, vol. 217, pp. 457–467
- [10] Campion G., Bastin G., d'Andréa-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1996, vol. 12, no. 1, pp. 47–62. Рус. пер: Кампион Г., Бастен Ж., Д'Андреа-Новель Б. Структурные свойства и классификация кинематических и динамических моделей колесных мобильных роботов // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 4, с. 733–769.
- [11] Ferrière L., Campion G., Raucent B. ROLLMOBS, a new drive system for omnimobile robots // *Robotica*, 2001, vol. 19, pp. 1–9.
- [12] Fedorov Yu. N., Kozlov V. V. Various aspects of  $n$ -dimensional rigid body dynamics // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 1995, vol. 168, pp. 141–171.
- [13] Nagarajan U., Mampetta A., Kantor G. A., Hollis R. L. State transition, balancing, station keeping, and yaw control for a dynamically stable single spherical wheel mobile robot // *IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA) (Kobe, Japan, 2009)*, pp. 998–1003.
- [14] Nagarajan U., Kantor G., Hollis R. L. Trajectory planning and control of an underactuated dynamically stable single spherical wheeled mobile robot // *IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA) (Kobe, Japan, 2009)*, pp. 3743–3748.
- [15] Ostrowski J. P. The mechanics and control of undulatory robotic locomotion: Ph. D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1995. 149 p.
- [16] Ostrowski J. P., Desai J. P., Kumar V. Optimal gait selection for nonholonomic locomotion systems // *Internat. J. Robotics Res.*, 2000, vol. 19, no. 3, pp. 225–237.
- [17] Yoon J.-C., Ahn S.-S., Lee Y.-J. Spherical robot with new type of two-pendulum driving mechanism // *Proc. 15th IEEE Internat. Conf. on Intelligent Engineering Systems (INES) (Poprad, High Tatras, Slovakia, 2011)*, pp. 275–279.
- [18] Zhan Q., Cai Y., Yan C. Design, analysis and experiments of an omni-directional spherical robot // *IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA) (Shanghai, China, 2011)*, pp. 4921–4926.

## An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Aleksander A. Kilin<sup>2</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Institute of Computer Science,  
Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>aka@rcd.ru, <sup>3</sup>mamaev@rcd.ru



We consider a nonholonomic model of the dynamics of an omni-wheel vehicle on a plane and a sphere. An elementary derivation of equations is presented, the dynamics of a free system is investigated, a relation to control problems is shown.

MSC 2010: 70F25, 70E18, 70E55, 70E60

Keywords: omni-wheel, roller-bearing wheel, nonholonomic constraint, dynamical system, invariant measure, integrability, controllability

Received October 3, 2011, accepted December 5, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 4 (Mobile Robots), pp. 785–801 (Russian)