



УДК: 531.36+531.384

MSC 2010: 70E18, 70F20, 70B10, 53A17

О движении олоида по горизонтальной плоскости

А. С. Кулешов, М. Хаббард, Д. Л. Петерсон, Дж. Джеде

В работе рассматривается задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух дисков, соединенных перпендикулярно друг другу так, что окружность первого диска проходит через центр второго и наоборот. Такое тело известно в западной литературе под названием олоид. Получены уравнения траекторий точек касания олоида с плоскостью.

Ключевые слова: олоид, качение, голономная система, кинематика

Введение

Рассмотрим два круглых диска одинаковой массы и одинакового радиуса. Соединим плоскости дисков перпендикулярно друг другу так, что окружность первого диска проходит через центр второго и наоборот. Полученное тело принято называть олоидом (рис. 1).

Получено 25 апреля 2011 года

После доработки 6 июня 2011 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (10-01-00292).

Кулешов Александр Сергеевич

kuleshov@mech.math.msu.su

механико-математический факультет

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

Монт Хаббард

mhubbard@ucdavis.edu

Дэйл Л. Петерсон

d1peterson@ucdavis.edu

Джилберт Джеде

ggede@ucdavis.edu

Department of Mechanical and Aeronautical Engineering

University of California

Davis, CA 95616-5294



Рис. 1. Олоид: общий вид.

Впервые олоид был упомянут в работах немецкого геометра Пауля Шаца [1–4]. Различные геометрические свойства олоида исследовались в работе [5]. На его основе сконструированы специальные машины для перемешивания жидкостей [6–8], устройства для аэрации водоемов [9, 10], движители для объектов, перемещающихся по воде [11, 12]. Несмотря на то, что олоид, катящийся без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости, представляет собой механическую систему, имеющую всего одну степень свободы, его движение является весьма необычным и нуждается в исследовании.

Ниже сформулированы основные факты из кинематики и дифференциальной геометрии, которые будут использоваться нами в дальнейшем.

Основные теоретические факты

Репер Френе и его угловая скорость. Натуральные уравнения кривой. При изучении задачи о движении точки по криволинейной траектории часто используется естественный трехгранник — репер Френе, с началом в движущейся точке, образованный единичным вектором касательной к траектории τ , главной нормалью ν и бинормалью β . Для производных этих векторов справедливы формулы Френе:

$$\frac{d\tau}{dt} = k\dot{s}\nu, \quad \frac{d\nu}{dt} = -k\dot{s}\tau + \varkappa\dot{s}\beta, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\varkappa\dot{s}\nu. \quad (1)$$

Здесь s — натуральный параметр, $k = k(s)$ — кривизна кривой (траектории точки), $\varkappa = \varkappa(s)$ — кручение кривой.

Из курса механики известно, что производные единичных векторов e_1, e_2, e_3 любого подвижного базиса удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\frac{de_i}{dt} = [\omega \times e_i], \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где ω — угловая скорость данного базиса. Поэтому формулы Френе (1) также можно представить в виде уравнений Пуассона (2); для вектора угловой скорости репера Френе Ω (его еще называют вектором Дарбу) получим выражение

$$\Omega = k\dot{s}\beta + \varkappa\dot{s}\tau.$$

В частности, если траектория движущейся точки — плоская, то $\varkappa = 0$ и

$$\Omega = k\dot{s}\beta. \quad (3)$$

В этом случае введем неподвижную систему координат Oxy в плоскости, содержащей кривую. Пусть радиус-вектор движущейся точки относительно введенной системы координат имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e}_x + y(s)\mathbf{e}_y.$$

Обозначим через $\alpha(s)$ угол между касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ к данной кривой

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{ds}\mathbf{e}_y$$

и единичным вектором \mathbf{e}_x оси Ox . Поскольку $\boldsymbol{\tau}(s)$ — единичный вектор, то его проекции на оси Ox и Oy равны $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ соответственно. С другой стороны,

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y = \frac{dx}{ds}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{ds}\mathbf{e}_y,$$

и поэтому

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha. \quad (4)$$

Более того, в соответствии с первой формулой Френе

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = (-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y) \frac{d\alpha}{ds} \boldsymbol{\nu} = k(s)\boldsymbol{\nu},$$

следовательно,

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(s). \quad (5)$$

Таким образом, по заданной кривизне кривой $k = k(s)$ можно построить параметрические уравнения этой кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$.

Теорема сложения угловых скоростей. Пусть твердое тело движется относительно некоторой неподвижной системы координат. Можно рассматривать движение твердого тела как сложное: тело движется относительно некоторой подвижной системы координат, которая, в свою очередь, известным образом движется относительно неподвижной системы координат. Абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}}$ твердого тела называется угловая скорость твердого тела относительно неподвижной системы координат, относительной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$ твердого тела — угловая скорость твердого тела относительно подвижной системы координат. Переносной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}}$ называется угловая скорость подвижной системы координат относительно неподвижной.

Теорема [13]. Абсолютная угловая скорость твердого тела равна сумме переносной и относительной угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}} = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}.$$

Угловая скорость катящейся пластинки. Пусть по неподвижной плоской кривой, заданной натуральным параметром s и имеющей кривизну $K(s)$, катится без проскальзывания пластинка, граница которой задана тем же натуральным параметром s и имеет кривизну $k(s)$. Будем считать, что закон изменения натурального параметра со временем известен: $s = s(t)$.

Лемма 1. Угловая скорость пластинки при ее движении по неподвижной кривой равна

$$\omega = (K - k) \dot{s} e_z, \quad (6)$$

где e_z — единичный вектор, перпендикулярный плоскости движения.

Доказательство. Воспользуемся теоремой сложения угловых скоростей. Свяжем с неподвижной кривой систему координат $Oxyz$, с подвижной кривой — систему координат $A\xi\eta z$ и будем следить за движением репера Френе $P\tau\nu e_z$ с началом в точке касания P кривых относительно каждой из этих систем (рис. 2).

Относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ репер Френе $P\tau\nu e_z$ вместе с точкой касания P движется по неподвижной кривой, следовательно, его абсолютная угловая скорость равна $\omega^{\text{абс}} = K(s) \dot{s} e_z$ (см. формулу (3)). Относительно подвижной системы координат $A\xi\eta z$ репер Френе вместе с точкой касания P движется по подвижной кривой, и, следовательно, его относительная угловая скорость равна $\omega^{\text{отн}} = k \dot{s} e_z$. Переносная угловая скорость — это угловая скорость подвижной системы координат относительно неподвижной, т. е., в данном случае, это и есть искомая угловая скорость подвижной кривой. Таким образом, по теореме сложения угловых скоростей получаем

$$\omega^{\text{пер}} = \omega^{\text{абс}} - \omega^{\text{отн}} = K(s) \dot{s} e_z - k(s) \dot{s} e_z = (K - k) \dot{s} e_z,$$

что и требовалось доказать.

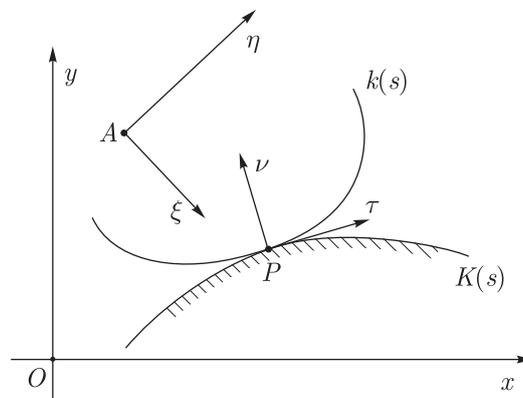


Рис. 2. Кинематика плоскопараллельного движения пластинки.

Касание плоскости двумя точками. Пусть по неподвижной горизонтальной плоскости движется твердое тело, состоящее из двух соединенных между собой пластинок. Предположим, что в каждый момент времени твердое тело имеет касание с плоскостью в двух точках A и B и скорости этих точек тела равны нулю (т. е. движение происходит без проскальзывания). Пусть кривизна границы первой пластинки в точке касания A равна $k(s)$ и закон движения точки A по границе пластинки задан: $s = s(t)$.

Лемма 2. Кривизна $K(s)$ траектории точки касания A на неподвижной плоскости связана с кривизной границы пластинки формулой

$$K = k \cos \varphi, \tag{7}$$

где φ — угол наклона пластинки к горизонтальной плоскости.

Доказательство. Введем три системы координат: $Oe_xe_ye_z$ — неподвижная система координат с вектором e_z , перпендикулярным плоскости, по которой движется пластинка, $A\tau\nu\beta$ — репер Френе границы пластинки в точке A и $A\tau_1\nu_1e_z$ — репер Френе траектории точки касания на неподвижной плоскости (рис. 3).

Поскольку движение твердого тела происходит без проскальзывания и тело касается опорной плоскости в точках A и B , то можно утверждать, что вектор угловой скорости тела коллинеарен вектору \overrightarrow{AB} . Нам понадобится даже более слабый вывод: вектор угловой скорости целиком принадлежит опорной плоскости

$$\omega = \omega_{\tau_1}\tau_1 + \omega_{\nu_1}\nu_1. \tag{8}$$

С другой стороны, по теореме сложения угловых скоростей

$$\omega = \omega^{\text{пер}} + \omega^{\text{отн}},$$

где ω — угловая скорость пластинки относительно неподвижного репера $Oe_xe_ye_z$, $\omega^{\text{отн}}$ — угловая скорость пластинки относительно репера $A\tau\nu\beta$, а $\omega^{\text{пер}}$ — угловая скорость репера $A\tau\nu\beta$ относительно неподвижного репера $Oe_xe_ye_z$. Относительная угловая скорость пластинки равна угловой скорости репера Френе $A\tau\nu\beta$ относительно пластинки, взятой с противоположным знаком (см. (3), (6)):

$$\omega^{\text{отн}} = -k\dot{s}e_\beta.$$

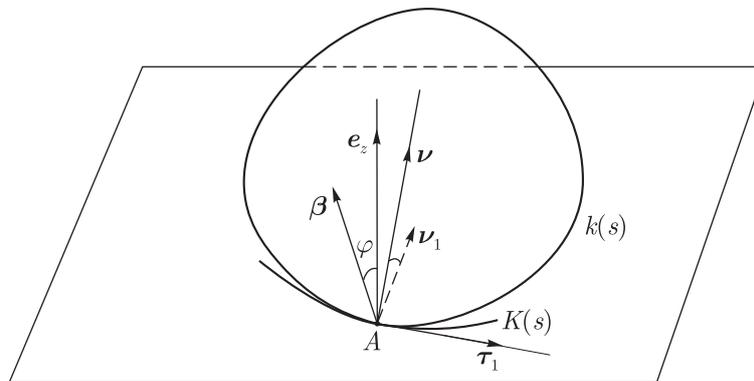


Рис. 3. К доказательству леммы 2.

Переносная угловая скорость, в свою очередь, может быть представлена в виде

$$\omega^{\text{пер}} = \omega_1^{\text{пер}} + \omega_1^{\text{отн}},$$

где $\omega_1^{\text{отн}}$ — угловая скорость репера $A\tau\nu\beta$ относительно репера $A\tau_1\nu_1e_z$, а $\omega_1^{\text{пер}}$ — угловая скорость репера $A\tau\nu_1e_z$ относительно неподвижного репера $Oe_xe_ye_z$.

Поскольку единичные векторы τ и τ_1 совпадают, то $\omega_1^{\text{отн}} = \dot{\varphi}\tau_1$, где φ — угол между векторами e_z и β или угол наклона пластинки к неподвижной плоскости; $\omega_1^{\text{пер}}$ — это угловая скорость репера Френе $A\tau_1\nu_1e_z$ при движении по траектории точки касания на плоскости, т. е. $\omega_1^{\text{пер}} = K\dot{s}e_z$, где K — кривизна траектории точки касания на плоскости. Окончательно получаем следующее выражение для угловой скорости пластинки:

$$\omega = K\dot{s}e_z + \dot{\varphi}\tau_1 - k\dot{s}\beta.$$

Учитывая, что

$$\beta = -\nu_1 \sin \varphi + \beta_1 \cos \varphi,$$

окончательно получаем:

$$\omega = \dot{\varphi}\tau_1 + k\dot{s} \sin \varphi \nu_1 - k\dot{s} \cos \varphi e_z + K\dot{s}e_z.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (8) для той же самой угловой скорости, убеждаемся, что компонента угловой скорости вдоль вектора e_z должна обращаться в нуль

$$K - k \cos \varphi = 0,$$

откуда и следует требуемое равенство.

Движение олоида

Основные системы координат. Пусть олоид движется по неподвижной горизонтальной плоскости. Введем подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с олоидом. Начало системы $Gx_1x_2x_3$ совпадает с центром масс G олоида, ось Gx_2 проходит через центры дисков, составляющих олоид, ось Gx_3 перпендикулярна плоскости первого диска, а ось Gx_1 перпендикулярна плоскости второго диска. Единичные векторы этой системы координат обозначим e_1, e_2, e_3 (рис. 4).

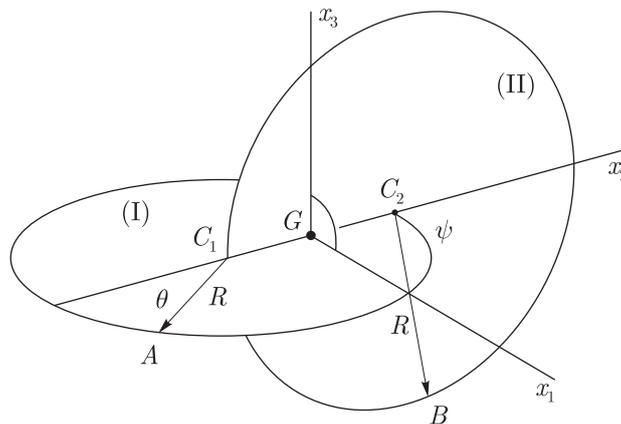


Рис. 4. Подвижная система координат и основные переменные задачи.

Пусть A и B — точки касания олоида с горизонтальной плоскостью. Положение точки A будем определять углом θ между отрицательным направлением оси Gx_2 и направлением из центра C_1 первой окружности в точку A . Заметим, что угол θ связан простейшей формулой с натуральным параметром s — длиной дуги окружности диска: $s = R\theta$. Положение

точки B будем определять углом ψ между положительным направлением оси Gx_2 и направлением из центра C_2 второй окружности в точку B (рис. 4). Тогда радиус-вектор точки A может быть записан как

$$\overrightarrow{GA} = \mathbf{r}_1 = R \sin \theta \mathbf{e}_1 - \left(\frac{R}{2} + R \cos \theta \right) \mathbf{e}_2,$$

а радиус-вектор точки B имеет вид

$$\overrightarrow{GB} = \mathbf{r}_2 = \left(\frac{R}{2} + R \cos \psi \right) \mathbf{e}_2 - R \sin \psi \mathbf{e}_3.$$

При движении олоида по горизонтальной плоскости три вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $(\mathbf{r}_1)'_{\theta}$ и $(\mathbf{r}_2)'_{\psi}$ должны лежать в этой плоскости. Соответствующее условие можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} R \sin \theta & -R - R \cos \theta - R \cos \psi & R \sin \psi \\ R \cos \theta & R \sin \theta & 0 \\ 0 & -R \sin \psi & -R \cos \psi \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находится связь между двумя параметризациями

$$\cos \psi + \cos \theta \cos \psi + \cos \theta = 0,$$

или

$$\cos \psi = -\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Используя полученное выражение, можно выразить радиус-вектор точки B через переменную θ :

$$\overrightarrow{GB} = \mathbf{r}_2 = \left(\frac{R}{2} - \frac{R \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) \mathbf{e}_2 - \frac{R \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{1 + \cos \theta} \mathbf{e}_3. \quad (9)$$

Заметим здесь интересный факт: длина вектора \overrightarrow{AB} постоянна и равна $AB = R\sqrt{3}$. Это обстоятельство впервые было отмечено еще Паулем Шацем [4].

Выражение (9) должно иметь смысл, поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$0 \leq 1 + 2 \cos \theta,$$

т. е. будем накладывать следующие ограничения на введенные параметры θ и ψ :

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{2\pi}{3} \leq \psi \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Легко видеть, что в силу специфической конструкции олоида эти предположения выполняются.

Траектории точек контакта. Запишем уравнение неподвижной плоскости, по которой движется олоид, в системе координат $Gx_1x_2x_3$. Пусть X, Y, Z — координаты произвольной точки этой плоскости относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$. Тогда уравнение плоскости можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} X - R \sin \theta & Y + \frac{R}{2} + R \cos \theta & Z \\ -R \sin \theta & R \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right) - \frac{R\sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{1 + \cos \theta} \\ R \cos \theta & R \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или, после некоторых упрощений,

$$-\sin \theta X + \cos \theta Y + \sqrt{1 + 2 \cos \theta} Z + \frac{R}{2} (2 + \cos \theta) = 0.$$

Единичный вектор

$$\mathbf{n} = -\sin \frac{\theta}{2} \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} - \cos \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \mathbf{e}_3$$

является нормальным вектором к этой плоскости. Следовательно, угол наклона первой пластинки к плоскости движения может быть записан в виде

$$\cos \varphi = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) = \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{2 \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Радиус кривизны окружности в любой ее точке равен $k = 1/R$. Поэтому, используя (7), мы можем вычислить кривизну траектории точки контакта A на неподвижной плоскости:

$$K = \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{2R \cos \frac{\theta}{2}}.$$

После того как найдено выражение для кривизны K , можно найти параметрические уравнения траектории точки A на неподвижной плоскости. Для этого введем неподвижную систему координат $Oxyz$. Начало O этой системы совпадает с точкой касания первой окружности с неподвижной плоскостью при $\theta = 0$. Ось Ox направлена по касательной к первой окружности при $\theta = 0$, ось Oz перпендикулярна плоскости движения. Ось Oy образует правую тройку с осями Ox и Oz . Пусть α — угол между касательным вектором к траектории точки A и осью Ox . Тогда по формуле (5)

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{Rd\theta} = K(\theta), \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{2 \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Интегрирование данного уравнения позволяет записать явное выражение для угла α :

$$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\theta}{2} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2}} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2}}{9 \cos \frac{\theta}{2}} (5 + 4 \cos \theta), \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3} (1 + 2 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{9 \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Воспользовавшись теперь формулами (3), (4) находим после интегрирования и некоторых тригонометрических преобразований

$$x_A(\theta) = \frac{2R\sqrt{3}}{9} \left(\arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2}} \right) + 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \right),$$

$$y_A(\theta) = \frac{8R\sqrt{3}}{9} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{2R\sqrt{3}}{9} \ln \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right), \quad -\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}.$$

Полученные соотношения представляют собой параметрические уравнения траектории точки A на неподвижной плоскости.

Рассуждая аналогично, можно получить и параметрические уравнения траектории точки B . Используем, однако, другой способ для получения этих уравнений. Запишем очевидное векторное равенство

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OA} + AB e_{AB} = \vec{OA} + R\sqrt{3} e_{AB}.$$

В скалярной форме оно имеет вид

$$x_B(\theta) = x_A(\theta) + R\sqrt{3} \cos(\alpha + \gamma),$$

$$y_B(\theta) = y_A(\theta) + R\sqrt{3} \sin(\alpha + \gamma).$$

Здесь γ — угол между единичным вектором e_{AB} вдоль направления \vec{AB} и касательным вектором τ к первой окружности в точке A . Этот касательный вектор τ имеет вид

$$\tau = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2,$$

и, следовательно,

$$\left(\vec{AB} \cdot \tau \right) = AB (e_{AB} \cdot \tau) = AB \cos \gamma = R\sqrt{3} \cos \gamma = \frac{R \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2}}, \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2}}.$$

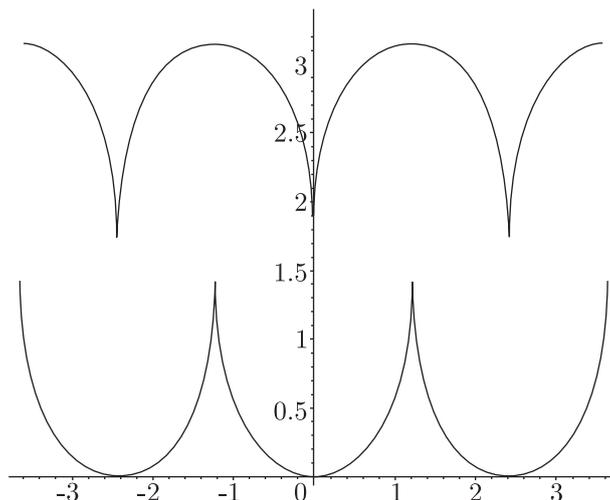


Рис. 5. Траектории точек касания олоида с плоскостью.

Имея выражения для $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \gamma$, $\cos \gamma$ в зависимости от угла θ , легко показать, что

$$\sin(\alpha + \gamma) = \frac{7}{9} + \frac{4 \cos^2 \theta}{9(1 + \cos \theta)}, \quad \cos(\alpha + \gamma) = -\frac{4(2 + \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2}}{9(1 + \cos \theta)} \sqrt{1 + 2 \cos \theta}.$$

В итоге мы получаем следующие выражения для координат x_B и y_B точки B :

$$x_B(\theta) = \frac{2R\sqrt{3}}{9} \left(\arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2}} \right) - \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{(1 + \cos \theta)} \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \right),$$

$$y_B(\theta) = \frac{7R\sqrt{3}}{9} + \frac{2R\sqrt{3}}{9 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} - \frac{2R\sqrt{3}}{9} \ln \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right), \quad -\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}.$$

Эти соотношения представляют собой параметрические уравнения траектории точки касания B на неподвижной плоскости. На рисунке 5 изображена траектория точки A (нижняя кривая) и точки B (верхняя кривая) на неподвижной плоскости Oxy .

Заключение

В данной работе получены параметрические уравнения траекторий точек касания олоида с неподвижной плоскостью, по которой он катится без проскальзывания. Разумеется, этими результатами не ограничивается задача изучения кинематики и динамики олоида и подобных ему тел. Движение такого рода объектов представляет большой интерес и нуждается в дальнейшем исследовании.

Список литературы

- [1] Schatz P. Mechanism producing wavering and rotating movements of receptacles. United States Patent 2302804, 1942 (<http://www.freepatentsonline.com/2302804.pdf>).



- [2] Schatz P. Arrangement for producing a rotary and wobbling movement of a part through the agency of an invertible kinematic chain. United States Patent 2991657, 1961 (<http://www.freepatentsonline.com/2991657.pdf>).
- [3] Schatz P. Apparatus for generating a wobble motion. United States Patent 3824866, 1973 (<http://www.freepatentsonline.com/3824866.pdf>).
- [4] Schatz P. Rhythmusforschung und Technik. Stuttgart: Freies Geistesleben, 1998. 196 pp.
- [5] Dirnbök H., Stachel H. The development of the oloid // J. Geom. Graph., 1997, vol. 1, pp. 105–118.
- [6] Urban A. Arrangement for bestowing a body with a rotary and wobbling movement. United States Patent 3186243, 1965 (<http://www.freepatentsonline.com/3186243.pdf>).
- [7] Saladin J. Apparatus for driving a rigid body for the purposes of producing a tumbling movement during rotation of the body. United States Patent 4341475, 1980 (<http://www.freepatentsonline.com/4341475.pdf>).
- [8] Saladin J. Device to drive a body that carries out a tumbling and rotating motion. United States Patent 4784338, 1988 (<http://www.freepatentsonline.com/4784338.pdf>).
- [9] Dettwiler H. Device for converting the energy of a flowable medium into a torque. United States Patent 4880353, 1989 (<http://www.freepatentsonline.com/4880353.pdf>).
- [10] Fritschi M. Device having a polysomic drive body for generating pulsed motions in a gas, liquid and/or bulk good. United States Patent 7670043, 2010 (<http://www.freepatentsonline.com/7670043.pdf>).
- [11] Meyer P. Device for the propulsion of an oloid shape tumbler body. United States Patent 5527109, 1996 (<http://www.freepatentsonline.com/5527109.pdf>).
- [12] Kuster K. Device for driving a body that performs a tumbling and rotating movement. United States Patent 4669225, 1987 (<http://www.freepatentsonline.com/4669225.pdf>).
- [13] Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В. Теоретическая механика. М.: Академия, 2010. 430 с.

Motion of the oloid on the horizontal plane

Alexander S. Kuleshov¹, Mont Hubbard², Dale Lucas Peterson³, Gilbert Gede⁴

¹Lomonosov Moscow State University

Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

^{2,3,4}Department of Mechanical and Aeronautical Engineering

University of California

Davis, CA 95616-5294

¹kuleshov@mech.math.msu.su, ²mhubbard@ucdavis.edu, ³dlpeterson@ucdavis.edu,

⁴ggede@ucdavis.edu

We present a kinematic analysis and numerical simulation of the toy known as the oloid. The oloid is defined by the convex hull of two equal radius disks whose symmetry planes are at right angles with the distance between their centers equal to their radius. The no-slip constraints of the oloid are integrable, hence the system is essentially holonomic. In this paper we present analytic expressions for the trajectories of the ground contact points, basic dynamic analysis, and observations on the unique behavior of this system.

MSC 2010: 70E18, 70F20, 70B10, 53A17

Keywords: oloid, rolling motion, holonomic system, kinematics

Received April 25, 2011, accepted June 6, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 4 (Mobile Robots), pp. 825–835 (Russian)