Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 43–55.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45

О бигамильтоновой структуре систем Чаплыгина и Борисова – Мамаева – Фёдорова при нулевой константе площадей. II

А. В. Цыганов

Во второй части работы основной целью было построение новых рациональных потенциалов, которые можно добавить к интегралам движения в случае Чаплыгина и случае Борисова – Мамаева – Фёдорова, с сохранением свойства интегрируемости. Данные потенциалы, допускающие разделение переменных в неголономных эллиптических координатах, являются естественными обобщениями известных потенциалов, допускающих разделение переменных в обычных эллиптических (сфероконических) координатах на сфере.

Ключевые слова: неголономная механика, шар Чаплыгина, скобки Пуассона

1. Введение

Данный текст является второй частью работы [16], в которой мы рассматриваем динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью, которое катится без проскальзывания по поверхности второй неподвижной сферы радиуса a. В подвижной системе координат, связанной с главными осями шара, угловой момент шара относительно точки касания имеет вид

$$M = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})\omega - d(\gamma, \omega)\gamma, \quad d = mb^2. \tag{1.1}$$

Здесь ω — вектор угловой скорости, m — масса, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции и b — радиус подвижной сферы, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор нормали к сфере в точке

Получено 7 ноября 2011 года
После доработки 29 ноября 2011 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

контакта, а $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Скобки $(.\,,.)$ обозначают обычное скалярное произведение трехмерных векторов.

Соответствующие уравнения движения зависят от отношения радиусов сфер $\kappa = a/(a+b)$

$$\dot{M} = M \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \kappa\gamma \times \omega, \tag{1.2}$$

где $\times$ обозначает векторное произведение. При $\kappa = \pm 1$ уравнения движения (1.2) обладают следующими интегралами движения:

$$H_1 = (M, \omega), \quad H_2 = (M, M), \quad C_1 = (\gamma, \gamma), \quad C_2 = (\gamma, \mathbf{B}M), \tag{1.3}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{I_1+d} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{I_2+d} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{I_3+d} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

и

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \operatorname{tr}\mathbf{A}^{-1} + (\kappa - 1)\mathbf{A}^{-1}, \quad \text{и} \quad \mathrm{g}(\gamma) = \frac{1}{1 - d(\gamma, \mathbf{A}\gamma)}. \tag{1.5}$$

При $\kappa = 1$ мы получаем систему Чаплыгина, а при $\kappa = -1$ — систему Борисова – Мамаева – Фёдорова, или БМФ-систему [16]. Инвариантная мера не зависит от κ и для обеих систем одинакова:

$$\mu = \sqrt{\mathrm{g}(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}M. \tag{1.6}$$

Первая часть данной работы [16] была посвящена деформациям скобок Пуассона в случае нулевого значения интеграла площадей $C_2 = 0$ и вычислению соответствующих переменных разделения, которые по определению являются каноническими переменными

$$\{\mathrm{q}_i, \mathrm{q}_k\} = \{\mathrm{p}_i, \mathrm{p}_k\} = 0, \qquad \{\mathrm{q}_i, \mathrm{p}_k\} = \delta_{ik} \tag{1.7}$$

относительно исходной кинематической скобки Пуассона и удовлетворяют невырожденной системе разделенных уравнений

$$\Phi_i(\mathrm{q}_i, \mathrm{p}_i, H_1, \ldots, H_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{где } \det\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial H_j}\right] \neq 0, \tag{1.8}$$

связывающих каждую пару переменных $(\mathrm{q}_i, \mathrm{p}_i)$ с интегралами движения $H_1, \ldots, H_n$. В этом случае поверхности уровня интегралов $H_1, \ldots, H_n$ образуют слоение, каждый лист которого представим в виде прямого произведения одномерных геометрических объектов, задаваемых уравнениями (1.8).

Во второй части работы мы сравним данные геометрические переменные разделения со сфероконическими переменными, которые использовал Чаплыгин для интегрирования уравнений движения в случае $C_2 = 0$ [7]. Также мы покажем, как в методе Якоби геометрические переменные разделения можно использовать для построения различных интегрируемых обобщений исходной неголономной системы.

2. Переменные разделения для системы Чаплыгина при $\kappa = 1$ и $C_2 = 0$

Так как $C_2 = 0$, то наше фазовое пространство эквивалентно кокасательному расслоению единичной сферы. В терминах сферических координат ϕ, θ на сфере и сопряженных импульсов p_ϕ, p_θ бивектор Пуассона P_g для системы Чаплыгина имеет вид

$$P_g = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial\theta}p_\phi - \dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial\phi}p_\theta\right) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где g — функция, входящая в определение инвариантной меры (1.6), см. определение координат (1.11) и бивектора Пуассона (2.7) в [16]. По определению, переменные разделения должны быть каноническими переменными (1.7) относительно скобки Пуассона, задаваемой данным бивектором.

2.1. Сфероконические координаты

Следуя [7], на сфере $(\gamma, \gamma) = 1$ определим сфероконические координаты u_1, u_2 как корни уравнения

$$\frac{\gamma_1^2}{\lambda - e_1} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda - e_2} + \frac{\gamma_3^2}{\lambda - e_3} = 0, \quad \text{где} \quad e_i = \frac{d}{I_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

При этом

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{(u_1 - e_i)(u_2 - e_i)}{(e_j - e_i)(e_k - e_i)}}, \quad i \neq j \neq k, \tag{2.3}$$

а сопряженные относительно скобки (2.1) канонические импульсы p_{u_1}, p_{u_2} определяются соотношениями

$$M_i = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}(u)}}\frac{2\varepsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k(e_j - e_k)}{u_1 - u_2}\Big((e_i - u_1)p_{u_1} - (e_i - u_2)p_{u_2}\Big), \tag{2.4}$$

где ε_{ijm} полностью антисимметричный тензор и функция g (1.5) имеет вид

$$\mathrm{g}(u) = \frac{e_1e_2e_3}{d^3a_1a_2a_3}\frac{1}{(1 + u_1)(1 + u_2)}.$$

Из определения сфероконических (2.3) следует, что

$$\dot\gamma_i = \frac{\gamma_i}{2}\left(\frac{\dot u_1}{u_1 - e_i} + \frac{\dot u_2}{u_2 - e_i}\right), \tag{2.5}$$

а из уравнений движения (1.2) можно получить следующее выражение для угловой скорости шара:

$$\omega = \frac{\dot\gamma \times \mathbf{I}\gamma}{(\gamma, \mathbf{I}\gamma)} \tag{2.6}$$

(см. [6]). Поэтому, согласно (1.1), выражения для оставшихся динамических переменных M через скорости имеют вид

$$M_i = \frac{d\,\varepsilon_{ijk}\,\gamma_j\,\gamma_k\,(e_j - e_k)}{2}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\frac{\dot u_1}{(e_j-u_1)(e_k-u_1)} + \frac{1-u_1}{u_1}\frac{\dot u_2}{(e_j-u_2)(e_k-u_2)}\right). \tag{2.7}$$

Тем самым можно достаточно легко получить выражения для интегралов движения

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{u_1-u_2}{d\mathrm{g}(u)}\left(\frac{1}{u_2}\frac{\dot u_1^2}{\varphi(u_1)} - \frac{1}{u_1}\frac{\dot u_2^2}{\varphi(u_2)}\right),\\ H_2 &= \frac{u_1-u_2}{\mathrm{g}(u)}\left(\frac{1+u_2}{u_2^2}\frac{\dot u_1^2}{\varphi(u_1)} - \frac{1+u_1}{u_1^2}\frac{\dot u_2^2}{\varphi(u_2)}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

и воспроизвести квадратуры Чаплыгина

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_1}{\sqrt{\mathrm{g}(u)}\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{F(u_1)}} - \frac{\mathrm{d}u_2}{\sqrt{\mathrm{g}(u)}\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{F(u_2)}} &= -1,\\ \frac{\mathrm{u}_1 du_1}{\sqrt{\mathrm{g}(u)}\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{F(u_1)}} - \frac{u_2\mathrm{d}u_2}{\sqrt{\mathrm{g}(u)}\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{F(u_2)}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь

$$F(u) = \varphi(u)\Big(d(1+u)H_1 - uH_2\Big) \quad \text{и} \quad \varphi(u) = \frac{4da_1a_2a_3}{e_1e_2e_3}\,(1+u)(e_1-u)(e_2-u)(e_3-u).$$

Данные квадратуры (2.9) интегрируются стандартным образом после замены времени

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{\mathrm{g}(u)}\,\mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

предложенной Чаплыгиным [7].

Если теперь вместо скоростей $\dot q_{1,2}$ подставить канонически сопряженные моменты $p_{1,2}$ то мы получим разделенные уравнения

$$\Phi(u,p_u) = d^2\varphi(u)p_u^2 - d(1+u)H_1 + uH_2 = 0, \qquad u = u_{1,2}, \quad p_u = p_{u_{1,2}}. \tag{2.11}$$

2.2. Деформированные эллиптические координаты

Использовать сфероконических переменные Чаплыгина (2.2) не всегда удобно. Например, переход к пределу $d \to 0$, когда система с математической точки зрения становится голономной и совпадает с волчком Эйлера, требует дополнительных усилий.

Для того чтобы изучить данный предел, мы рассмотрим другие переменные разделения для системы Чаплыгина. Следуя [15, 16], определим деформированные эллиптические координаты q_1 и q_2 как корни уравнения

$$\mathrm{g}(\gamma)\left(\frac{\gamma_1^2(1-da_1)}{\lambda-a_1} + \frac{\gamma_2^2(1-da_2)}{\lambda-a_2} + \frac{\gamma_3^2(1-da_3)}{\lambda-a_3}\right) = 0, \tag{2.12}$$

где a_i — это элементы диагональной матрицы $\mathbf{A}$ (1.4). Легко проверить, что эти переменные связаны друг с другом тривиальным точечным преобразованием

$$u_k = \frac{d\mathrm{q}_k}{1-d\mathrm{q}_k}. \tag{2.13}$$

В отличие от переменных Чаплыгина (2.2), переменные q_k переходят в обычные эллиптические (сфероконические) координаты на сфере в пределе $d \to 0$.

При этом вместо выражения (2.3) мы получим

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}(1-da_i)}}\sqrt{\frac{(\mathrm{q}_1-a_i)(\mathrm{q}_2-a_i)}{(a_j-a_i)(a_k-a_i)}}, \qquad i\neq j\neq k, \tag{2.14}$$

вместо (2.5) — следующие выражения для скоростей:

$$\dot\gamma_i = \frac{\gamma_i}{2}\left(\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{\mathrm{q}_1-a_i}+\frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{\mathrm{q}_2-a_i}-\frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}\right), \tag{2.15}$$

где функция $\mathrm{g}(\gamma)$ (1.5) равна

$$\mathrm{g} = \frac{(1-d\mathrm{q}_1)(1-d\mathrm{q}_2)}{(1-da_1)(1-da_2)(1-da_3)}.$$

Используя соотношение (2.6), легко получить выражение для оставшихся динамических переменных

$$M_i = \frac{\varepsilon_{ijk}\,\gamma_j\,\gamma_k\,(a_j-a_k)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{q}_2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{(a_j-\mathrm{q}_1)(a_k-\mathrm{q}_1)}+\frac{1}{\mathrm{q}_1}\frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{(a_j-\mathrm{q}_2)(a_k-\mathrm{q}_2)}\right)$$

и интегралы движения

$$H_1 = \frac{\mathrm{q}_1-\mathrm{q}_2}{4\mathrm{g}}\left(\frac{1}{\mathrm{q}_2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{\varphi(\mathrm{q}_1)}-\frac{1}{\mathrm{q}_1}\frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{\varphi(\mathrm{q}_2)}\right),\quad H_2 = \frac{\mathrm{q}_1-\mathrm{q}_2}{4\mathrm{g}}\left(\frac{1}{\mathrm{q}_2^2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{\varphi(\mathrm{q}_1)}-\frac{1}{\mathrm{q}_1^2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{\varphi(\mathrm{q}_2)}\right),$$

где $\varphi(\mathrm{q}) = (1-d\mathrm{q})(a_1-\mathrm{q})(a_2-\mathrm{q})(a_3-\mathrm{q})$. Квадратуры в данном случае имеют такой же вид, как и ранее,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{q}_1}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_1)}}-\frac{d\mathrm{q}_2}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_2)}} &= -1,\\ \frac{\mathrm{q}_1d\mathrm{q}_1}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_1)}}-\frac{\mathrm{q}_2d\mathrm{q}_2}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_2)}} &= 0,\end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$\mathrm{F}(\mathrm{q}) = 4\varphi(\mathrm{q})(\mathrm{q}H_2-H_1).$$

Данные квадратуры (2.16) интегрируются стандартным образом после той же самой замены времени (2.10).

Сопряженные относительно скобки (2.1) канонические импульсы $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$ определяются соотношениями

$$M_i = \frac{2\varepsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k(a_j-a_k)\sqrt{\mathrm{g}}}{\mathrm{q}_1-\mathrm{q}_2}\Big((a_i-\mathrm{q}_1)(1-d\mathrm{q}_1)\mathrm{p}_1-(a_i-\mathrm{q}_2)(1-d\mathrm{q}_2)\mathrm{p}_2\Big). \tag{2.17}$$

Подставляя выражения в определения интегралов движения $H_{1,2}$ (1.3), легко доказать, что переменные разделения для системы Чаплыгина лежат на двух копиях гиперэллиптической кривой рода 2, задаваемой разделенным уравнением

$$\Phi(\mathrm{q},\mathrm{p}) = 4(1-d\mathrm{q})(a_1-\mathrm{q})(a_2-\mathrm{q})(a_3-\mathrm{q})\,\mathrm{p}^2-\mathrm{q}H_2+H_1 = 0,\quad \mathrm{q}=\mathrm{q}_{1,2},\quad \mathrm{p}=\mathrm{p}_{1,2}. \tag{2.18}$$

При $d = 0$ мы получаем стандартные эллиптические переменные на T^*S и стандартные разделенные уравнения для волчка Эйлера [15].

3. Переменные разделения для БМФ-системы при $\kappa = -1$ и $C_2 = 0$

Как и ранее, фазовое пространство эквивалентно кокасательному расслоению единичной сферы. В терминах деформированных сферических координат ϕ, θ на сфере и сопряженных импульсов p_ϕ, p_θ бивектор Пуассона P_η для БМФ-системы имеет вид

$$P_\eta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & (1+\eta) \\ & & & \\ * & * & 0 & -\dfrac{1}{2}\left((1+\eta)\dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial\theta}p_\phi - \dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial \phi}p_\theta\right) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где g — функция, входящая в определение инвариантной меры (1.6), и

$$\eta = \frac{2d\left(b_3^2 - (b_1+b_2)b_3 + b_1b_2\right)\sin^2\theta}{b_3^2\big((b_1+b_2)-2d\big)},$$

см. определение деформированных сферических координат (1.11) и бивектора Пуассона (2.12) в [16].

3.1. Деформированные эллиптические координаты

Следуя [3, 4, 16], определим деформированные эллиптические координаты q_1 и q_2 как корни уравнения

$$\mathrm{g}(\gamma)\left(\frac{\gamma_1^2(1-da_1)}{\lambda - c_1} + \frac{\gamma_2^2(1-da_2)}{\lambda - c_2} + \frac{\gamma_3^2(1-da_3)}{\lambda - c_3}\right) = 0, \qquad c_i = \frac{a_i}{b_i}, \tag{3.2}$$

где a_i и b_i — это элементы диагональных матриц $\mathbf{A}$ (1.4) и $\mathbf{B}$ (1.5) соответственно.

В отличие от случая Чаплыгина (2.13), для БМФ-системы не существует дробно-линейного точечного преобразования $\mathrm{q}_i \to u_i$

$$\mathrm{q}_i = \frac{\mu_i u_i + \nu_i}{\varrho_i u_i + \sigma_i}, \qquad \mu_i, \nu_i, \varrho_i, \sigma_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$$

переводящего деформированные эллиптические координаты (3.1) в сфероконические координаты (2.2).

Функция $\mathrm{g}(\gamma)$ (1.5) в этом случае имеет вид

$$\mathrm{g} = \frac{(1-d\beta\mathrm{q}_1)(1-d\beta\mathrm{q}_2)}{(1-da_1)(1-da_2)(1-da_3)} + \frac{4\,d\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2}{a_1a_2a_3}, \qquad \beta = \sum b_k - 2d.$$

Вместо (2.14) мы имеем следующие выражения:

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}(1-da_i)}}\sqrt{\frac{(\mathrm{q}_1 - c_i)(\mathrm{q}_2 - c_i)}{(c_j - c_i)(c_k - c_i)}}, \qquad i \neq j \neq k \tag{3.3}$$

— для исходных физических координат,

$$\dot{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{2}\left(\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{\mathrm{q}_1 - c_i} + \frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{\mathrm{q}_2 - c_i} - \frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}\right) \tag{3.4}$$

— для их скоростей. Как и ранее, используя уравнения движения, можно легко получить выражения для оставшихся динамических переменных

$$M_i = \frac{\varepsilon_{ijk}\,\gamma_j\,\gamma_k\,(a_k - a_j)}{2b_j b_k}\left(\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{\mathrm{q}_2(c_j - \mathrm{q}_1)(c_k - \mathrm{q}_1)} + \frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{\mathrm{q}_1(c_j - \mathrm{q}_2)(c_k - \mathrm{q}_2)}\right). \tag{3.5}$$

Все выражения для динамических переменных при замене $\kappa = -1$ на $\kappa = 1$ переходят в выражения из предыдущего параграфа, так как при замене знака у κ нужно также положить

$$\kappa = 1, \quad b_1 = b_2 = b_3 = \operatorname{tr}\mathbf{A}^{-1} = 1, \quad \text{так что} \quad c_i = a_i,$$

и сменить знак в выражении (3.5).

Если положить

$$\begin{aligned}
\psi(\mathrm{q}) &= (c_1 - \mathrm{q})(c_2 - \mathrm{q})(c_3 - \mathrm{q}),\\
\alpha_1(\mathrm{q}) &= d b_1 b_2 b_3 \mathrm{q}^2 - (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3)\mathrm{q} + 2,\\
\alpha_2(\mathrm{q}) &= \left(d(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3) - \frac{4}{a_1 a_2 a_3}\right)\mathrm{q} + b_1 + b_2 + b_3 - 2d,
\end{aligned}$$

то интегралы движения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\mathrm{q}_2 - \mathrm{q}_1}{4(1 - da_1)(1 - da_2)(1 - da_3)b_1 b_2 b_3\,\mathrm{g}^2}\left(\frac{\alpha_1(\mathrm{q}_2)}{\mathrm{q}_2^2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{\psi(\mathrm{q}_1)} - \frac{\alpha_1(\mathrm{q}_1)}{\mathrm{q}_1^2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{\psi(\mathrm{q}_2)}\right),\\
H_2 &= \frac{\mathrm{q}_2 - \mathrm{q}_1}{4(1 - da_1)(1 - da_2)(1 - da_3)b_1 b_2 b_3\,\mathrm{g}^2}\left(\frac{\alpha_2(\mathrm{q}_2)}{\mathrm{q}_2^2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_1}{\psi(\mathrm{q}_1)} - \frac{\alpha_2(\mathrm{q}_1)}{\mathrm{q}_1^2}\frac{\dot{\mathrm{q}}_2}{\psi(\mathrm{q}_2)}\right),
\end{aligned}$$

откуда непосредственно следуют выражения для квадратов скоростей

$$\dot{\mathrm{q}}_i^2 = -\frac{4\,\mathrm{g}\,\mathrm{q}_k^2}{(\mathrm{q}_1 - \mathrm{q}_2)^2}\,\psi(\mathrm{q}_i)\,(\alpha_2(\mathrm{q}_i)H_1 - \alpha_1(\mathrm{q}_i)H_2) \tag{3.6}$$

и искомые квадратуры

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{q}_1}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_1)}} - \frac{d\mathrm{q}_2}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_2)}} &= -1,\\
\frac{\mathrm{q}_1\,d\mathrm{q}_1}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_1)}} - \frac{\mathrm{q}_2\,d\mathrm{q}_2}{\sqrt{\mathrm{g}}\,dt}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{q}_2)}} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\mathrm{F}(\mathrm{q}) = 4\psi(\mathrm{q})(\alpha_1(\mathrm{q})H_2 - \alpha_2(\mathrm{q})H_1).$$

Данные квадратуры (2.16) интегрируются стандартным образом после той же самой замены времени (2.10). Таким образом, мы независимо воспроизвели результаты работ [3, 4].

Канонические относительно скобки Пуассона (3.1) моменты p_k можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}
M_i = \frac{2\varepsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k(c_j - c_k)\sqrt{\mathrm{g}}}{b_i(\mathrm{q}_1 - \mathrm{q}_2)}&\times\\
\times\left((c_i - \mathrm{q}_1)\left(1 - \frac{d(2 - b_1 b_2 \mathrm{q}_1)}{b_3}\right)\mathrm{p}_1 - (c_i - \mathrm{q}_2)\left(1 - \frac{d(2 - b_1 b_2 \mathrm{q}_2)}{b_3}\right)\mathrm{p}_2\right)&,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

см. определение (4.36) в первой части [16]. Используя это определение, можно построить разделенные уравнения

$$\Phi(\mathrm{q},\mathrm{p}) = 4\left(1 - \frac{d(2 - b_1 b_2 \mathrm{q})}{b_3}\right)^2 (\mathrm{q} - c_1)(\mathrm{q} - c_2)(\mathrm{q} - c_3)\mathrm{p}^2 - \alpha_1(\mathrm{q})\, H_2 + \alpha_2(\mathrm{q}) H_1 = 0. \quad (3.9)$$

Далее мы воспользуемся этими разделенными уравнениями при построении интегрируемых обобщений системы БМФ в методе Якоби.

4. Интегрируемые деформации при нулевом значении интеграла площадей

В книге [10], обсуждая введение эллиптических координат и решение уравнений движения методом разделения переменных с помощью этих координат, Якоби пишет: «Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит в введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена».

Выше мы рассмотрели некоторые деформации эллиптических координат для двух неголономных интегрируемых систем. Теперь же мы покажем, как эти переменные можно использовать для построения новых интегрируемых систем. Идея Якоби очень проста. Действительно, возьмем вместо исходных разделенных уравнений (1.8) новые разделенные уравнения

$$\widetilde{\Phi}_i(\mathrm{q}_i, \mathrm{p}_i, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \quad \text{где } \det\left[\frac{\partial \widetilde{\Phi}_i}{\partial \mathcal{H}_j}\right] \neq 0.$$

Решая эти уравнения относительно $\mathcal{H}_i$, мы получим новые функционально независимые интегралы движения в инволюции относительно исходной скобки Пуассона.

Если рассматривать, как в нашем случае, точечные преобразования координат, то изменение разделенных уравнений вида

$$\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i + V_i(\mathrm{q}_i) \quad (4.1)$$

приводит к добавлению различных потенциалов в гамильтонианы

$$\mathcal{H}_j = H_j + U_j(\gamma). \quad (4.2)$$

Для голономных систем на сфере при $d = 0$ различные потенциалы, допускающие разделение переменных, построены в работах [1, 9, 17].

В методе Якоби мы получаем функции $\mathcal{H}_j$, которые коммутируют друг с другом относительно исходной скобки Пуассона, например (2.1) или (3.1). Легко проверить, что данные функции являются интегралами движения уравнений движения вида

$$\dot{M} = M \times \omega + \frac{\kappa}{2}\gamma \times \frac{\partial U_1}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \kappa\gamma \times \omega, \quad (4.3)$$

при $\mathrm{C}_2 = 0$. Физический смысл данных уравнений, которые для неголономных систем выводятся с помощью неопределенных множителей Лагранжа, обсуждается в обзоре [5], см. также перечисленные в нем ссылки.

4.1. Система Чаплыгина, $\kappa = 1$ и $C_2 = 0$

Рассмотрим преобразования исходных разделенных уравнений (2.18)

$$4(1-d\mathrm{q})(a_1-\mathrm{q})(a_2-\mathrm{q})(a_3-\mathrm{q})\,\mathrm{p}^2-\mathrm{q}\mathcal{H}_2+\mathcal{H}_1+V(\mathrm{q})=0,\quad \mathrm{q}=\mathrm{q}_{1,2},\quad \mathrm{p}=\mathrm{p}_{1,2},$$

где потенциал V не зависит от номера уравнения, как в (4.1).

В этом случае мы получаем так называемые однородные системы типа Штеккеля и можем построить для них 2×2 матрицы Лакса [13–15] и производящую функцию [1, 17] для потенциалов U_j (4.2)

$$\mathrm{G}(\lambda)=\frac{\phi(\lambda)}{e(\lambda)},$$

где $\phi(\lambda)$ — произвольный полином с постоянными коэффициентами, а

$$e(\lambda)=\mathrm{g}(\gamma)\,\left(\frac{\gamma_1^2(1-da_1)}{\lambda-a_1}+\frac{\gamma_2^2(1-da_2)}{\lambda-a_2}+\frac{\gamma_3^2(1-da_3)}{\lambda-a_3}\right).$$

Также можно рассматривать потенциал V как линейную комбинацию степенных потенциалов

$$V_m=\mathrm{q}^m,$$

где m — положительное или отрицательное число [1, 17]. В этом случае потенциалы $U_j^{(m)}$ с разными m связаны рекуррентными соотношениями [17], которые так же можно использовать для построения полного семейства потенциалов, допускающих разделение переменных в данной координатной системе.

Например, для $V_2=\mathrm{q}^2$ мы получим неголономную интегрируемую систему с интегралами движения

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1^{(2)}&=(M,\omega)+U_1^{(2)}, &\qquad U_1^{(2)}&=-\mathrm{g}(\gamma)\,\left(\frac{(\gamma,\mathbf{A}^{-1}\gamma)}{a_1a_2a_3}-da_1a_2a_3\right),\\
\mathcal{H}_2^{(2)}&=(M,M)+U_2^{(2)}, &\qquad U_2^{(2)}&=\mathrm{g}(\gamma)\left((\gamma,\mathbf{A}\gamma)-d(\mathbf{A}\gamma,\mathbf{A}\gamma)\right).
\end{aligned}$$

При $V_3=\mathrm{q}^3$ мы получим потенциалы

$$\begin{aligned}
U_1^{(3)}&=\mathrm{g}(\gamma)\left(\frac{(\gamma,\mathbf{A}^{-1}\gamma)}{a_1a_2a_3}-da_1a_2a_3\right)\times\left(\mathrm{g}(\gamma)\left((\gamma,\mathbf{A}\gamma)-d(\mathbf{A}\gamma,\mathbf{A}\gamma)\right)-\operatorname{tr}\mathbf{A}\right)\\
U_2^{(3)}&=\mathrm{g}^2(\gamma)\left(\left(\sum_{i=1}^{3}(a_j+a_k)(1-da_i)\gamma_i^2\right)^2-\frac{\sum_{i=1}^{3}a_ja_k(1-da_i)\gamma_i^2}{\mathrm{g}(\gamma)}\right),
\end{aligned}$$

а при

$$V_{-1}=\frac{a_1a_2a_3}{\mathrm{q}}$$

получим неголономный аналог потенциала Брадена

$$\begin{aligned}
U_1^{(-1)}&=\frac{(a_2+a_3)(1-da_1)\gamma_1^2+(a_1+a_3)(1-da_2)\gamma_2^2+(a_1+a_2)(1-da_3)\gamma_3^2}{\dfrac{(1-da_1)\gamma_1^2}{a_1}+\dfrac{(1-da_2)\gamma_2^2}{a_2}+\dfrac{(1-da_3)\gamma_3^2}{a_3}}\\
U_2^{(-1)}&=\frac{1}{\mathrm{g}(\gamma)\left(\dfrac{(1-da_1)\gamma_1^2}{a_1}+\dfrac{(1-da_2)\gamma_2^2}{a_2}+\dfrac{(1-da_3)\gamma_3^2}{a_3}\right)}.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Так как в данные потенциалы входит функция $\mathrm{g}(\gamma)$ (1.5), то рассмотренные нами потенциалы $U_j^{(m)}$ при $m=-1,2,3$, как и потенциалы при других значениях m, являются рациональными функциями от γ, в отличие от полиномиальных потенциалов приведенных в [8].

Для некоторых деформаций можно подобрать потенциал $V(q)$ (4.1) так, чтобы потенциалы U_j (4.2) не зависели от параметра d. Например, если положить

$$V_{cl}=\frac{\mathrm{q}^2-(a_1+a_2+a_3)\mathrm{q}+d\mathrm{q}(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)-da_1a_2a_3}{1-d\mathrm{q}}, \tag{4.5}$$

то мы получим интегралы движения

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{cl} &= (M,\omega)-(a_2a_3\gamma_1^2+a_1a_3\gamma_2^2+a_1a_2\gamma_3^2),\\ \mathcal{H}_2^{cl} &= (M,M)+a_1\gamma_1^2+a_2\gamma_2^2+a_3\gamma_3^2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

которые по форме совпадают с интегралами движения для системы Клебша. Интегрируемость данной системы при $C_2\neq 0$ доказана в работе [11]. Но это не всегда возможно; например, при

$$V_{ros}=\sum_i^3\frac{(a_ja_k-a_jq-a_kq+a_iq)(1-da_i)e_i}{a_i-q} \tag{4.7}$$

интегралы движения

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{ros} &= (M,\omega)+\sum_{i=1}^3\frac{e_i\Big(a_k(1-da_j)\gamma_j^2+a_j(1-da_k)\gamma_k^2\Big)}{\gamma_i^2}, \qquad i\neq j\neq k,\\ \mathcal{H}_2^{ros} &= (M,M)-\frac{1}{\mathrm{g}(\gamma)}\left(\frac{e_1}{\gamma_1^2}+\frac{e_2}{\gamma_2^2}+\frac{e_3}{\gamma_3^2}\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

при $d=0$ переходят в известные интегралы движения для системы Рософатиуса [12], но не совпадают с ними.

Как обычно, любые линейные комбинации указанных потенциалов U_j также определяют интегрируемые потенциалы, разделяющиеся в деформированных эллиптических координатах.

4.2. БМФ-система, $\kappa=-1$ и и $C_2=0$

Подставляя $\mathrm{q}=\mathrm{q}_{1,2}$ и $\mathrm{p}=\mathrm{p}_{1,2}$ в уравнение

$$4\left(1-\frac{d(2-b_1b_2\mathrm{q})}{b_3}\right)^2(\mathrm{q}-c_1)(\mathrm{q}-c_2)(\mathrm{q}-c_3)\mathrm{p}^2-\alpha_1(\mathrm{q})\,\mathcal{H}_2+\alpha_2(\mathrm{q})\mathcal{H}_1+V(\mathrm{q})=0,$$

получим систему уравнений для функций $\mathcal{H}_{1,2}$, которые находятся в инволюции относительно скобок Пуассона (3.1).

В случае $V_0=\mathrm{const}$, $V_1=q$ и $V_2=q^2$ решения системы разделенных уравнений эквивалентны интегралам движения для системы Клебша (4.6):

$$\mathcal{H}_1^{cl}=(M,\omega)-\frac{1}{a_1a_2a_3}(\gamma,\mathbf{A}^{-1}\gamma),\qquad \mathcal{H}_2^{cl}=(M,M)+(\gamma,\mathbf{A}\gamma). \tag{4.9}$$

Как и для системы Чаплыгина (4.6), данные функции $\mathcal{H}_{1,2}$ являются интегралами движения динамических уравнений (4.3) и при ненулевом значении интеграла площадей $C_2 \neq 0$, доказательство может быть найдено в [2].

Например, если

$$V_1 = -\frac{(1-da_1)(1-da_2)(1-da_3)b_1b_2b_3}{d\,\beta}\,\mathrm{q},$$

где $\beta = b_1 + b_2 + b_3 - 2d$, мы получим

$$U_1^{(1)} = \frac{1}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{3}\Big(2a_i + b_ia_ja_k(1-da_i)\Big)\gamma_i^2 - \frac{2}{d}\right), \quad U_2^{(1)} = (a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2 + a_3\gamma_3^2) - \frac{1}{d}, \qquad (4.10)$$

а для

$$V_2 = \frac{2(1-da_1)(1-da_2)(1-da_3)b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}\,\mathrm{q}^2$$

получим

$$\begin{aligned} U_1^{(2)} &= 2\left(\frac{1-da_1}{a_1}\gamma_1^2 + \frac{1-da_2}{a_2}\gamma_2^2 + \frac{1-da_3}{a_3}\gamma_3^2\right), \\ U_2^{(2)} &= \frac{(1-da_1)(\beta+b_1)}{a_1}\,\gamma_1^2 + \frac{(1-da_2)(\beta+b_2)}{a_1}\,\gamma_2^2 + \frac{(1-da_3)(\beta+b_3)}{a_1}\,\gamma_3^2. \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Повторим, что интегралы движения (4.10)–(4.11) эквивалентны интегралам (4.9).

Другие потенциалы V_m приводят к нетривиальным деформациям, но соответствующие интегралы движения довольно сложны. Поэтому вместо потенциалов $V_m = q^m$ мы рассмотрим другое семейство потенциалов

$$\widetilde{V}_m = \alpha_2(q)q^m,$$

для которых потенциалы $\widetilde{U}_2^{(m)}$ выглядят весьма похоже на классические потенциалы на сфере [1, 17], допускающие разделение в сфероконических переменных.

Например, аналогом системы Брадена (4.4) при

$$\widetilde{V}_{-1} = \frac{a_1a_2a_3\,\alpha_2(q)}{q}$$

будет система с потенциалом

$$\widetilde{U}_2^{(-1)} = \frac{b_1^2\gamma_1^2 + b_2^2\gamma_2^2 + b_3^2\gamma_3^2}{\mathrm{g}(\gamma)}\;\frac{1}{\dfrac{(1-da_1)\gamma_1^2}{c_1} + \dfrac{(1-da_2)\gamma_2^2}{c_2} + \dfrac{(1-da_3)\gamma_3^2}{c_3}}.$$

Потенциал

$$\widetilde{V}_1 = \alpha_2(\mathrm{q})\mathrm{q}$$

снова приводит к квадратичному потенциалу, эквивалентному потенциалу Клебша,

$$\widetilde{U}_2^{(1)} = b_1^2\gamma_1^2 + b_2^2\gamma_2^2 + b_3^2\gamma_3^2,$$

а потенциал

$$\widetilde{V}_2 = \alpha_2(\mathrm{q})\mathrm{q}^2$$

— к потенциалу

$$\widetilde{U}_2^{(2)} = \mathrm{g}(\gamma)\ \left(b_1^2\gamma_1^2 + b_2^2\gamma_2^2 + b_3^2\gamma_3^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} b_i(1-da_i)\Big(a_i(a_j-a_k)^2 - a_ja_k(a_j+a_k)\Big)\gamma_i^2\right).$$

Если же взять потенциал, аналогичный потенциалу (4.7),

$$\widetilde{V}_{ros} = \sum_{i=1}^{3} \frac{e_ib_1b_2b_3(c_i-c_j)(c_i-c_k)(1-da_i)\alpha_2(\mathrm{q})}{c_i-\mathrm{q}},$$

то мы получим некий аналог потенциала Рособхатиуса [12]

$$U_2^{ros} = \frac{b_1^2\gamma_1^2 + b_2^2\gamma_2^2 + b_3^2\gamma_3^2}{\mathrm{g}(\gamma)}\left(\frac{e_1}{\gamma_1^2} + \frac{e_2}{\gamma_2^2} + \frac{e_3}{\gamma_3^2}\right).$$

Список данных потенциалов можно легко продолжить, решая соответствующую систему разделенных уравнений.

Как и ранее, любые линейные комбинации указанных потенциалов также определяют интегрируемые потенциалы, которые могут быть получены с помощью производящей функции или рекуррентных соотношений. Более того, как и ранее, для данных однородных систем типа Штеккеля мы можем построить 2×2 матрицы Лакса, используя теорию отображения Абеля – Якоби [9, 13, 14].

Мы благодарим А. В. Борисова за неподдельный интерес к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] Bogoyavlenskii O. I. Integrable cases of the dynamics of a rigid body, and integrable systems on the spheres S^n // Math. USSR-Izv., 1986, vol. 27, pp. 203–218.

[2] Борисов А. В., Федоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, № 6, с. 102–105.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, № 4, с. 475–478.

[4] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.

[5] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338.

[7] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, № 1, с. 139–168.

[8] Dragović V., Gajić B., Jovanović B. Generalizations of classical integrable nonholonomic rigid body systems // J. Phys. A, 1998, vol. 31, no. 49, pp. 9861–9869.

[9] Eilbeck J. C., Ènol'skii V. Z., Kuznetsov V. B., Tsiganov A. V. Linear r-matrix algebra for classical separable systems // J. Phys. A, 1994, vol. 27, pp. 567–578.

[10] Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Reimer, 1884. 300 pp. [Якоби К. Г. Лекции по динамике. Л.: Гостехиздат, 1936. 272 с.]

[11] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, вып. 3, с. 85–107.

[12] Rosochatius E. Über die Bewegung eines Punktes: Inaugural Dissertation, Univ. Göttingen. Berlin, 1877.

[13] Tsiganov A. V. The Stäckel systems and algebraic curves // J. Math. Phys., 1999, vol. 40, pp. 279–298.

[14] Tsiganov A. V. Duality between integrable Stäckel systems // J. Phys. A, 1999, vol. 32, pp. 7965–7982.

[15] Tsiganov A. V. Integrable Euler top and nonholonomic Chaplygin ball // J. Geomet. Mech., 2011, vol. 3, pp. 337–362; см. также: arXiv:1002.1123 (2010).

[16] Цыганов А. В. Деформации канонической скобки Пуассона для неголономных систем Чаплыгина и Борисова–Мамаева–Фёдорова при нулевой константе площадей: 1 // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 577–601.

[17] Wojciechowski S. Integrable one-particle potentials related to the Neumann systems and the Jacobi problem of geodesic motion on an ellipsoid // Phys. Lett. A, 1985, vol. 107, pp. 106–111.

On the bi-Hamiltonian structure of the Chaplygin and Borisov – Mamaev – Fedorov systems at a zero constant of areas. II

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034, Russia
andrey.tsiganov@gmail.com

The main aim of the second part of the paper is a construction of the rational potentials, which may be added to the Hamiltonians of the Chaplygin and Borisov – Mamaev – Fedorov systems without loss of integrability. All these potentials may be considered as natural nonholonomic generalizations of the standard separable potentials associated with an elliptic (or sphero-conical) coordinate system on the sphere.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45
Keywords: nonholonomic mechanics, Chaplygin sphere, Poisson brackets

Received November 7, 2011, accepted November 29, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 43–55 (Russian)