



УДК: 531.36,531.38,531.66

MSC 2010: 70E55, 70F35, 70K42, 70E50

О периодическом движении твердого тела, несущего материальную точку, при наличии его соударений с горизонтальной плоскостью

А. П. Маркеев

Рассматривается материальная система, образованная «несущим» твердым телом (оболочкой) и «несомым» телом (материальной точкой). Система движется в однородном поле тяжести над неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. Центральный эллипсоид инерции оболочки является эллипсоидом вращения. Материальная точка движется по заданному гармоническому закону вдоль отрезка прямой, жестко связанного с оболочкой и лежащего на оси ее динамической симметрии. При движении оболочка может соударяться с плоскостью. Величина коэффициента восстановления при ударе считается произвольной. Получены условия существования периодического движения оболочки, когда ее ось симметрии занимает неизменное вертикальное положение, а сама оболочка вращается вокруг вертикали с постоянной произвольной по величине угловой скоростью. Исследована устойчивость этого периодического движения в линейном приближении.

Ключевые слова: динамика систем твердых тел, соударение, периодическое движение, устойчивость

1. Уравнения движения

Пусть твердое тело массы m_1 движется в однородном поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат с началом в точке O этой плоскости, ось Oz направлена вертикально вверх (рис. 1). С телом жестко

Получено 29 ноября 2011 года

После доработки 26 декабря 2011 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00322), программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4149.2012.1) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (УдГУ, дог. № 11.G34.31.0039).

Маркеев Анатолий Павлович

markeev@ipmnet.ru

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1



связем систему координат $O_1\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс O_1 тела и осями, направленными вдоль его главных центральных осей инерции. Полагаем, что тело является динамически симметричным с осью симметрии $O_1\zeta$. Экваториальный и аксиальный моменты инерции обозначим через A и C соответственно.

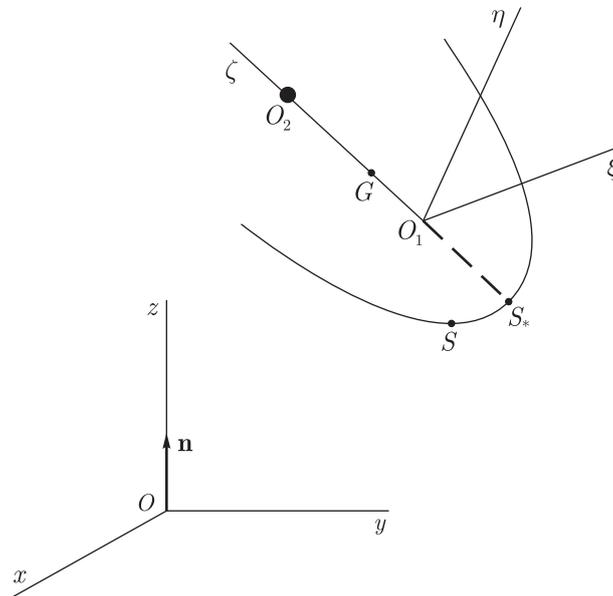


Рис. 1. Системы координат для описания движения тела, несущего материальную точку.

Предположим, что вдоль отрезка, жестко закрепленного на оси симметрии тела, движется материальная точка O_2 массы m_2 . Ее координаты в системе $O_1\xi\eta\zeta$ — заданные функции времени: $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\zeta_2 = \zeta_2(t)$.

Центр масс G рассматриваемой системы — твердое тело, несущее материальную точку, лежит на оси $O_1\zeta$, причем

$$\mathbf{GO}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2, \quad \mathbf{GO}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2. \quad (1.1)$$

Пусть S — ближайшая к неподвижной плоскости Oxy точка поверхности «несущего» тела. Если задано уравнение поверхности тела, то координаты ξ, η, ζ точки S в системе $O_1\xi\eta\zeta$ можно выразить через компоненты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в этой системе единичного вектора \mathbf{n} вертикальной оси Oz .

Во время движения «несущее» твердое тело может соударяться с плоскостью. Коэффициент восстановления e при ударе считаем произвольным ($0 \leq e \leq 1$), а плоскость абсолютно гладкой.

Уравнения, описывающие движение рассматриваемой системы на промежутке времени, включающем в себя и интервалы свободного полета системы над плоскостью, и моменты соударений, получим из теоремы об изменении количества движения системы \mathbf{Q} и теоремы об изменении ее кинетического момента \mathbf{K} относительно точки G .

У р а в н е н и я с в о б о д н о г о д в и ж е н и я. В случае свободного движения имеем такие два векторных уравнения

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -(m_1 + m_2)g\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = 0, \quad (1.2)$$

где g — ускорение свободного падения. Если x, y, z — координаты центра масс системы в неподвижной системе $Oxyz$, то первое из векторных уравнений движения (1.2) запишется в виде трех скалярных уравнений

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g. \quad (1.3)$$

Получим скалярную форму второго из уравнений (1.2). Для этого перепишем его в виде

$$\frac{d\tilde{\mathbf{K}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0, \quad (1.4)$$

где первое слагаемое представляет собой вектор, компоненты которого равны производным по времени от проекций вектора \mathbf{K} на оси, жестко связанной с несущим телом системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ в (1.4) — мгновенная угловая скорость несущего тела, ее проекции на оси $O_1\xi, O_1\eta$ и $O_1\zeta$ будем обозначать, соответственно, через p, q и r .

Для нахождения проекций компонент вектора \mathbf{K} на оси системы $O_1\xi\eta\zeta$ запишем его в виде суммы

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \quad (1.5)$$

где \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 — кинетические моменты несущего тела и материальной точки O_2 относительно центра масс G системы. Имеем [1]

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{O_1} + m_1 \mathbf{G}O_1 \times \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{K}_2 = m_2 \mathbf{G}O_2 \times (\mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}_1O_2 + \mathbf{V}_{2r}). \quad (1.6)$$

Здесь \mathbf{V}_1 — абсолютная скорость точки O_1 , \mathbf{V}_{2r} — скорость точки O_2 относительно несущего тела, а \mathbf{K}_{O_1} — кинетический момент несущего тела относительно его центра масс. В системе координат $O_1\xi\eta\zeta$ вектор \mathbf{K}_{O_1} задается компонентами Ap, Aq, Cr .

Принимая во внимание, что вектор \mathbf{V}_{2r} коллинеарен вектору $\mathbf{G}O_2$, из (1.1), (1.5) и (1.6) можно найти, что

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{O_1} + \mu(\zeta_2^2 \boldsymbol{\omega} - \zeta_2 r \mathbf{O}_1O_2), \quad \left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right). \quad (1.7)$$

Следовательно, проекции вектора \mathbf{K} на оси $O_1\xi, O_1\eta$ и $O_1\zeta$ равны, соответственно, $(A + \mu\zeta_2^2)p, (A + \mu\zeta_2^2)q$ и Cr , а векторное уравнение (1.4) запишется в виде трех скалярных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d[(A + \mu\zeta_2^2)p]}{dt} + (C - A - \mu\zeta_2^2)qr &= 0, \\ \frac{d[(A + \mu\zeta_2^2)q]}{dt} - (C - A - \mu\zeta_2^2)rp &= 0, \\ \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.3) следует, что в случае свободного движения центр масс системы G движется по параболе или вертикальной прямой. Движение же несущего тела относительно его центра масс O_1 описывается уравнениями (1.8). К этим уравнениям следует еще добавить кинематические уравнения. Для дальнейшего нам достаточно трех кинематических уравнений Пуассона:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \quad (1.9)$$

Динамические уравнения (1.8) могут быть исследованы независимо от кинематических уравнений (1.9).

Уравнения, соответствующие моментам соударений. Получим связь кинематических величин, характеризующих движение системы до и после соударения несущего тела с плоскостью.

Так как плоскость абсолютно гладкая, то ударный импульс \mathbf{I} вертикален и классические уравнения теории удара имеют вид [2]

$$\Delta \mathbf{Q} = I \mathbf{n}, \quad \Delta \mathbf{K} = I \mathbf{GS} \times \mathbf{n}. \quad (1.10)$$

Имеет место очевидное равенство

$$\mathbf{GS} = \mathbf{O}_1 \mathbf{S} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2. \quad (1.11)$$

Учтя, что $\mathbf{Q} = (m_1 + m_2) \mathbf{V}_G$, где \mathbf{V}_G — скорость центра масс в неподвижной системе координат $Oxyz$ и приняв во внимание полученные выше выражения для компонент вектора \mathbf{K} в связанной с несущим телом системе координат $O_1 \xi \eta \zeta$, из (1.10), (1.11) находим следующие соотношения:

$$\dot{x}^+ = \dot{x}^-, \quad \dot{y}^+ = \dot{y}^-, \quad \dot{z}^+ = \dot{z}^- + \frac{I}{m_1 + m_2}, \quad (1.12)$$

$$\dot{p}^+ = \dot{p}^- + \frac{I}{A + \mu \zeta_2^2} [\eta \gamma_3 - \zeta \gamma_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \gamma_2 \zeta_2],$$

$$\dot{q}^+ = \dot{q}^- + \frac{I}{A + \mu \zeta_2^2} [\zeta \gamma_1 - \xi \gamma_3 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \gamma_1 \zeta_2], \quad (1.13)$$

$$\dot{r}^+ = \dot{r}^- + \frac{I}{C} [\xi \gamma_2 - \eta \gamma_1].$$

Здесь верхними индексами «-» и «+» обозначены значения величин до и после удара. Координаты ξ, η, ζ точки S , которой несущее тело соударяется с плоскостью, а также величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \zeta_2$ не отмечены индексами «-» и «+», так как они во время удара не изменяются.

Уравнения (1.12), (1.13) содержат величину модуля ударного импульса I . Следуя классической теории удара, для вычисления I воспользуемся соотношением

$$(\mathbf{V}_S^+, \mathbf{n}) = -e(\mathbf{V}_S^-, \mathbf{n}), \quad (1.14)$$

где \mathbf{V}_S — скорость точки S поверхности несущего тела в неподвижной системе координат $Oxyz$, а e — коэффициент восстановления.

Из очевидного равенства

$$(m_1 + m_2) \mathbf{V}_G = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 (\mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 + \mathbf{V}_{2r})$$

и формулы $\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}_1 \mathbf{S}$ находим

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{V}_{2r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GS}.$$

Поэтому

$$(\mathbf{V}_S, \mathbf{n}) = \dot{z} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\zeta}_2 \gamma_3 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{GS} \times \mathbf{n}). \quad (1.15)$$



Из (1.12)–(1.15) находим

$$I = -\frac{1+e}{k} \left[\dot{z}^- - \frac{m_2}{m_1+m_2} \dot{\zeta}_2 \gamma_3 + p^- (\eta \gamma_3 - \zeta \gamma_2 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \gamma_2 \zeta_2) + \right. \\ \left. + q^- (\zeta \gamma_1 - \xi \gamma_3 - \frac{m_2}{m_1+m_2} \gamma_1 \zeta_2) + r^- (\xi \gamma_2 - \eta \gamma_1) \right]. \quad (1.16)$$

Здесь введено обозначение

$$k = \frac{1}{m_1+m_2} + \frac{(\eta \gamma_3 - \zeta \gamma_2 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \gamma_2 \zeta_2)^2}{A + \mu \zeta_2^2} + \\ + \frac{(\zeta \gamma_1 - \xi \gamma_3 - \frac{m_2}{m_1+m_2} \gamma_1 \zeta_2)^2}{A + \mu \zeta_2^2} + \frac{(\xi \gamma_2 - \eta \gamma_1)^2}{C}. \quad (1.17)$$

Величина $\dot{\zeta}_2$ в (1.16) вычисляется в момент соударения.

Соотношения (1.3), (1.8), (1.9), (1.12), (1.13) с учетом равенств (1.16), (1.17) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение рассматриваемой материальной системы «несущее тело — материальная точка» на промежутках времени, включающих в себя как интервалы свободного полета, так и моменты соударений несущего тела с плоскостью.

2. Существование периодического движения

Пусть S_* — точка пересечения оси $O_1\zeta$ с поверхностью несущего тела в области отрицательных значений ζ , расстояние от центра масс O_1 несущего тела до точки S_* обозначим через d . Предположим, что плоскость, касательная к поверхности несущего тела в точке S_* , перпендикулярна оси $O_1\zeta$. Тогда существуют частные решения уравнений движения, отвечающие таким движениям системы, в которых ось $O_1\zeta$ динамической симметрии несущего тела вертикальна, а само тело вращается вокруг этой оси с постоянной произвольной по величине угловой скоростью r_0 ; при этом материальная точка O_2 совершает произвольно заданное движение вдоль оси $O_1\zeta$. В этих движениях $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = -d$, а

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0, \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = \text{const}, \quad \dot{y} = \text{const}, \quad \dot{z}^+ = -e\dot{z}^- + (1+e)\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\zeta}_2. \quad (2.2)$$

Пусть материальная точка O_2 движется вдоль оси $O_1\zeta$ по гармоническому закону с частотой σ :

$$\zeta_2 = \zeta_2(\sigma t) = \zeta_2^* + a \sin(\sigma t + \alpha), \quad (2.3)$$

где ζ_2^* , a , α — постоянные величины.

Среди движений (2.1)–(2.3) выделим движение с периодом τ , для которого за время между двумя последовательными соударениями несущего тела с плоскостью материальная точка O_2 совершает целое число j колебаний вдоль оси $O_1\zeta$, то есть

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma} j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$



При этом потребуем, чтобы каждое соударение происходило при одной и той же высоте центра тяжести системы над плоскостью и при одной и той же величине его предударной скорости; отсюда следует, что центр тяжести O_1 несущего тела после каждого соударения взлетает на одну и ту же высоту над плоскостью.

Последнее требование налагает ограничения на начальную фазу α , частоту σ и амплитуду a колебаний материальной точки O_2 вдоль оси $O_1\zeta$ несущего тела. Укажем эти ограничения.

Пусть $t = 0$ — момент первого соударения. Перед соударением (при $t = -0$) имеем

$$z = z^- = d + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\zeta_2^* + a \sin \alpha), \quad \dot{z} = \dot{z}^-. \quad (2.5)$$

Непосредственно после соударения (при $t = +0$) величина z будет такой же, как перед соударением ($z = z^+ = z^-$), а значение \dot{z}^+ , согласно (2.2), (2.3), задается равенством

$$\dot{z}^+ = -e\dot{z}^- + (1 + e) \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \sigma \cos \alpha. \quad (2.6)$$

В промежутке между первым и вторым соударениями координата $z(t)$ меняется по закону

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + \dot{z}^+ t + z^-. \quad (2.7)$$

Согласно сформулированному выше требованию, перед вторым соударением должны выполняться равенства

$$z(\tau) = z^-, \quad \dot{z}(\tau) = \dot{z}^-. \quad (2.8)$$

Отсюда и из (2.4)–(2.7) получаем

$$\dot{z}^- = -\frac{1}{2} g \tau = -\frac{\pi g}{\sigma} j, \quad (2.9)$$

$$\cos \alpha = \frac{(m_1 + m_2)g}{2m_2 a \sigma} \frac{1 - e}{1 + e} \tau = \frac{\pi(m_1 + m_2)g}{m_2 a \sigma^2} \frac{1 - e}{1 + e} j. \quad (2.10)$$

Из последнего равенства следует, в частности, что для существования движения с периодом (2.4) необходимо, чтобы частота колебаний материальной точки вдоль оси симметрии несущего тела превосходила некоторую критическую величину, задаваемую неравенством

$$\sigma^2 \geq \frac{\pi(m_1 + m_2)g}{m_2 a} \frac{1 - e}{1 + e} j. \quad (2.11)$$

Отметим еще, что для рассматриваемых периодических движений ударный импульс $I = (m_1 + m_2)g\tau$, $\dot{z}^+ = -\dot{z}^-$, а скорости \dot{z}_{O_1} и V_{S_*} центра масс O_1 несущего тела и точки S_* , которой оно соударяется с плоскостью, удовлетворяют соотношениям

$$\dot{z}_{O_1}^+ = V_{S_*}^+ = -e\dot{z}_{O_1}^- = -eV_{S_*}^- = \frac{e}{1 + e} g\tau. \quad (2.12)$$

Если удар абсолютно упругий ($e = 1$), то периодическое движение существует, либо когда материальная точка O_2 покоится относительно несущего тела ($a = 0$), либо когда $\cos \alpha = 0$, то есть когда в моменты соударений несущего тела с плоскостью величина ζ_2 принимает одно из своих экстремальных значений $\zeta_2 = \zeta_2^* \pm a$ (в эти моменты относительная скорость точки O_2 равна нулю).

3. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость периодического движения по отношению к возмущениям величин направляющих косинусов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ вектора вертикали \mathbf{n} и проекций p, q, r вектора угловой скорости ω несущего тела на оси связанной с ним системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Ограничимся анализом устойчивости в первом (линейном) приближении.

Л и н е а р и з а ц и я у р а в н е н и й д в и ж е н и я. Положим

$$\gamma_1 = x_1, \quad \gamma_2 = x_2, \quad \gamma_3 = 1 + x_3, \quad p = x_4, \quad q = x_5, \quad r = r_0 + x_6.$$

На интервалах времени, отвечающих свободному движению системы над плоскостью, из (1.8) и (1.9) получаем следующие линеаризованные уравнения возмущенного движения:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_0x_2 - x_5, \quad \frac{dx_2}{dt} = -r_0x_1 + x_4, \quad \frac{dx_3}{dt} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{d[(A + \mu\zeta_2^2)x_4]}{dt} + (C - A - \mu\zeta_2^2)r_0x_5 = 0,$$

$$\frac{d[(A + \mu\zeta_2^2)x_5]}{dt} - (C - A - \mu\zeta_2^2)r_0x_4 = 0, \quad \frac{dx_6}{dt} = 0. \tag{3.2}$$

В этой системе уравнений функция ζ_2 задается равенствами (2.3), (2.10).

Получим линеаризованные уравнения (1.13), отвечающие моментам соударений. Пусть R — радиус кривизны поверхности несущего тела в точке S_* . В малой окрестности точки S_* уравнение поверхности запишем в виде ряда по степеням ξ, η

$$F(\xi, \eta, \zeta) = -d - \zeta + \frac{1}{2R}(\xi^2 + \eta^2) + \dots = 0,$$

а для единичного вектора вертикали \mathbf{n} имеем выражение

$$\mathbf{n} = -\frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}.$$

В невозмущенном движении имеем $x_1 = 0, x_2 = 0$ и $\xi = 0, \eta = 0$. Если пренебречь членами выше первой степени относительно x_1, x_2 , то для случая возмущенного движения получим

$$\xi = -Rx_1, \quad \eta = -Rx_2, \quad \zeta = -d.$$

Воспользовавшись этим представлением и учтя, что величины x_1, x_2, x_3 при ударе не изменяются, из (1.13), (1.16), (1.17) находим соотношения, связывающие кинематические характеристики несущего тела до и после удара, в первом приближении относительно величин x_i ($i = 1, 2, \dots, 6$):

$$x_1^+ = x_1^-, \quad x_2^+ = x_2^-, \quad x_3^+ = x_3^-, \tag{3.3}$$

$$x_4^+ = x_4^- - w x_2^-, \quad x_5^+ = x_5^- + w x_1^-, \quad x_6^+ = x_6^-. \tag{3.4}$$

Здесь введено обозначение

$$w = \frac{(m_1 + m_2)g\tau}{A + \mu(\zeta_2^* + a \sin \alpha)^2} (R - z^-), \tag{3.5}$$

а величина z^- вычисляется согласно первому из равенств (2.5).



В системе (3.1)–(3.4) уравнения для x_3, x_6 отделяются, причем x_3 и x_6 постоянны. Поэтому условия устойчивости в первом приближении определяются из уравнений для переменных x_1, x_2, x_4, x_5 .

Условия устойчивости. Пусть $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_4, x_5)$, где T — знак транспонирования. Из (3.3), (3.4) имеем следующее равенство, связывающее до- и послеударные значения вектора \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{Y}\mathbf{x}^-, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 1 & 0 \\ w & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Пусть $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы уравнений относительно x_1, x_2, x_4, x_5 , получаемой из (3.1), (3.2), удовлетворяющая условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица. Матрицу $\mathbf{X}(t)$ можно выписать в явном виде, так как удается найти общее решение первых двух уравнений из системы (3.2):

$$x_4 = \frac{c_1 \sin \chi(t) + c_2 \cos \chi(t)}{A + \mu \zeta_2^2(\sigma t)}, \quad x_5 = \frac{c_1 \cos \chi(t) - c_2 \sin \chi(t)}{A + \mu \zeta_2^2(\sigma t)},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, $\zeta_2(\sigma t)$ задается равенством (2.3), а

$$\chi(t) = r_0 \left(t - C \int_0^t \frac{dv}{A + \mu \zeta_2^2(\sigma v)} \right).$$

Матрицу $\mathbf{X}(t)$ запишем в блочной форме

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & -\frac{A + \mu \zeta_2^2(0)}{Cr_0}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \\ \mathbf{0} & \frac{A + \mu \zeta_2^2(0)}{A + \mu \zeta_2^2(\sigma t)} \mathbf{R}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos r_0 t & \sin r_0 t \\ -\sin r_0 t & \cos r_0 t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & \sin \chi(t) \\ -\sin \chi(t) & \cos \chi(t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{x}^{(0)}$ значение вектора \mathbf{x} перед первым соударением, и пусть $\mathbf{X}(\tau)$ — значение матрицы (3.7) в момент времени τ , равный периоду рассматриваемого движения. Тогда перед вторым соударением значение $\mathbf{x}^{(1)}$ вычисляется по формуле $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{Z}\mathbf{x}^{(0)}$, где $\mathbf{Z} = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{Y}$. Перед $(m+1)$ -м соударением $\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{Z}^m \mathbf{x}^{(0)}$. Необходимым условием устойчивости в первом приближении является отсутствие у характеристического уравнения матрицы \mathbf{Z} корней с модулями, большими единицы.

Вычисления показывают, что характеристическое уравнение является возвратным и записывается в виде

$$\varrho^4 - a_1 \varrho^3 + a_2 \varrho^2 - a_1 \varrho + 1 = 0, \quad (3.8)$$



$$a_1 = 2(\cos r_0\tau + \cos \chi(\tau)) - 2u(\sin r_0\tau - \sin \chi(\tau)),$$

$$a_2 = 2 + 4 \cos r_0\tau \cos \chi(\tau) + 4u \sin(\chi(\tau) - r_0\tau) + 2u^2[1 - \cos(\chi(\tau) - r_0\tau)],$$

где

$$u = \frac{(m_1 + m_2)g\tau}{Cr_0}(R - z^-), \quad \chi(\tau) = r_0(1 - CJ)\tau,$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv}{A + \mu[\zeta_2^* + a \sin(v + \alpha)]^2}.$$

Значения коэффициентов характеристического уравнения не изменяются при изменении знака величины r_0 . Поэтому далее, не ограничивая общности, считаем, что $r_0 \geq 0$.

Рассмотрим частный случай, когда в невозмущенном периодическом движении несущее тело движется поступательно. Перейдя в уравнении (3.8) к пределу при $r_0 \rightarrow 0$, получим его в виде

$$f^2(\varrho) = 0, \tag{3.9}$$

$$f(\varrho) = \varrho^2 - [2 - (m_1 + m_2)g\tau^2 J(R - z^-)]\varrho + 1 = 0.$$

Уравнение (3.9) не имеет корней с модулями, большими единицы, если модуль коэффициента при первой степени ϱ многочлена $f(\varrho)$ не превосходит 2. Это будет в том случае, когда

$$0 \leq R - z^- \leq \frac{4}{(m_1 + m_2)g\tau^2 J}. \tag{3.10}$$

Следовательно, для устойчивости поступательного движения несущего тела при наличии его периодических соударений с плоскостью необходимо, чтобы высота z^- центра тяжести системы при ударе не превосходила величину радиуса кривизны R поверхности тела в точке S_* ; при этом радиус кривизны не должен быть больше некоторой критической величины, задаваемой неравенством (3.10).

В общем случае достаточные условия устойчивости в первом приближении задаются системой неравенств [3]

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2. \tag{3.11}$$

При выполнении этих неравенств уравнение (3.8) имеет только простые корни, причем их модули равны единице. Вне области, задаваемой неравенствами (3.11), уравнение (3.8) имеет хотя бы один корень с модулем, большим единицы.

Анализ системы неравенств (3.11) аналогичен соответствующему исследованию, проведенному в статье [4]. Результаты удобно представить графически в плоскости безразмерных параметров ε, δ , вводимых равенствами

$$\varepsilon = \frac{Cr_0J}{4}\tau, \quad \delta = \frac{4(m_1 + m_2)g}{C^2r_0^2J}(R - z^-).$$

На рисунке 2 сплошными линиями показаны кривые $\delta = -\frac{\text{tg}\varepsilon}{\varepsilon}$, а штриховыми — кривые $\delta = \frac{\text{ctg}\varepsilon}{\varepsilon}$. Этими кривыми плоскость ε, δ разбивается на множество областей, где выполняются необходимые условия устойчивости, и множество областей, в которых выполняются

достаточные условия неустойчивости рассматриваемого периодического движения твердого тела, несущего материальную точку. Оба эти множества счетны. На рисунке показано несколько из упомянутых областей.

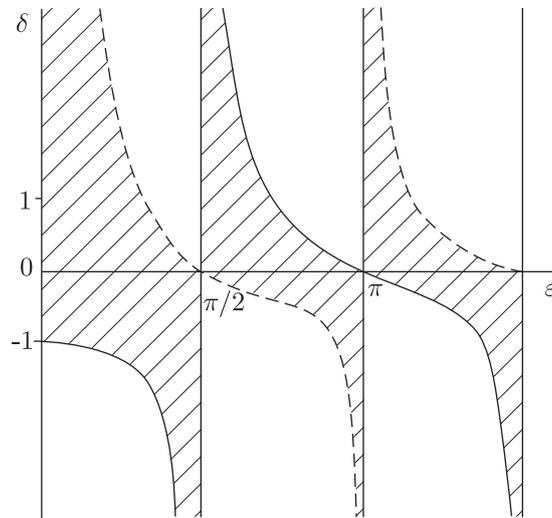


Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости.

Области, в которых характеристическое уравнение (3.8) не имеет корней с модулями, большими единицы, на рисунке заштрихованы. В этих областях выполняется необходимое условие устойчивости изучаемого периодического движения. Однако строгое решение вопроса об устойчивости во всех таких областях требует анализа нелинейных уравнений возмущенного движения.

В каждой из незаштрихованных на рисунке областей уравнение (3.8) имеет хотя бы один корень с модулем, большим единицы. Здесь имеет место неустойчивость рассматриваемого периодического движения, причем не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи [5].

Список литературы

- [1] Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
- [2] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
- [3] Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч.: Т. 2 / А. М. Ляпунов. М.–Л.: АН СССР, 1954. С. 327–401.
- [4] Маркеев А. П. Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ, 1984, т. 48, № 3, с. 363–369.
- [5] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

On a periodic motion of a rigid body carrying a material point in the presence of impacts with a horizontal plane

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

A material system consisting of a “carrying” rigid body (a shell) and a body “being carried” (a material point) is considered. The system moves in a uniform field of gravity over a fixed absolutely smooth horizontal plane. The central ellipsoid of inertia of the shell is an ellipsoid of rotation. The material point moves according to the harmonic law along a straight-line segment rigidly attached to the shell and lying on its axis of dynamical symmetry. During its motion, the shell may collide with the plane. The coefficient of restitution for an impact is supposed to be arbitrary. The periodic motion of the shell is found when its symmetry axis is situated along a fixed vertical, and the shell rotates around this vertical with an arbitrary constant angular velocity. The conditions for existence of this periodic motion are obtained, and its stability in the linear approximation is studied.

MSC 2010: 70E55, 70F35, 70K42, 70E50

Keywords: rigid body dynamics, collision, periodic motion, stability

Received November 29, 2011, accepted December 26, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 71–81 (Russian)