



УДК: 539.3

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости

Т. В. Сальникова, Д. В. Трещев, С. Р. Галлямов

Рассматривается задача о скольжении шайбы по горизонтальной плоскости под действием сил сухого трения. Модель основана на трех гипотезах. Закон взаимодействия малого элемента поверхности шайбы с плоскостью — закон Амонтона–Кулона, распределение давления по пятну контакта — линейная (вообще говоря, меняющаяся со временем) функция декартовых координат, высота шайбы невелика. Уравнения движения обладают богатой группой симметрий, благодаря чему оказался возможным подробный качественный анализ задачи.

Ключевые слова: сухое трение, закон Амонтона–Кулона

1. Введение

В этой заметке мы опишем движение однородного прямого кругового цилиндра (шайбы), скользящего по шероховатой горизонтальной плоскости Π (рис. 1). Начнем с обсуждения основных допущений **Н1–Н3**, фиксирующих используемую модель взаимодействия шайбы с плоскостью.

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039.

Сальникова Татьяна Владимировна
tatsalni@mech.math.msu.su

Трещев Дмитрий Валерьевич
treshev@mi.ras.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
Математический институт им. В. А. Стеклова
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8

Галлямов Сергей Рафаилович
galser@uni.udm.ru

Удмуртский государственный университет
Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1



Н1. Локальный закон взаимодействия шайбы с плоскостью — закон сухого трения Амонтона–Кулона.

Допущение **Н1** означает, что малый участок ds пятна контакта шайбы с плоскостью создает силу трения

$$d\vec{F} = -f \frac{\vec{u}}{u} dN, \quad (1.1)$$

где f — коэффициент трения, \vec{u} — скорость участка (корректно определенная, когда участок ds стягивается в точку), $u = |\vec{u}|$, dN — модуль силы нормальной реакции, приходящейся на участок ds .

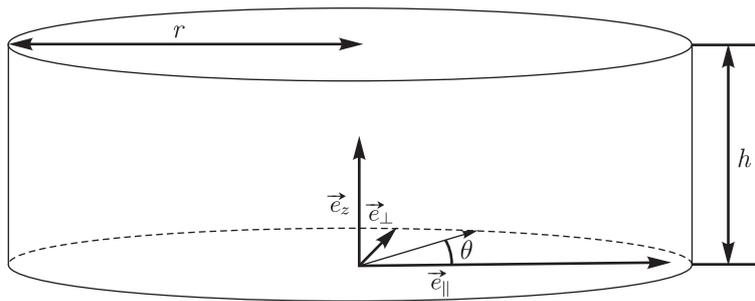


Рис. 1. Шайба на плоскости.

Пусть m , r и h — масса, радиус и высота шайбы. Введем на Π полярную систему координат ρ, ϑ с началом в центре O пятна контакта и направлением $\vartheta = 0$, совпадающим с направлением скорости центра масс шайбы. Как обычно, ϑ отсчитывается против часовой стрелки. Тогда $ds = \rho d\rho d\vartheta$, и пятно контакта имеет вид $B_r = \{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq r\}$. Пусть \vec{e}_{\parallel} и \vec{e}_{\perp} — единичные векторы, направленные вдоль лучей $\{\vartheta = 0\}$ и $\{\vartheta = \pi/2\}$. Тогда скорость центра масс и угловая скорость шайбы имеют вид $v\vec{e}_{\parallel}$ и $\omega\vec{e}_z$, $\vec{e}_z = \vec{e}_{\parallel} \times \vec{e}_{\perp}$. Отметим, что хотя по смыслу введенных обозначений величина v неотрицательна, большинство из встречающихся далее формул сохраняют смысл и при $v < 0$. Имеем следующее выражение для скорости \vec{u} :

$$\vec{u} = (v - \omega\rho \sin \vartheta)\vec{e}_{\parallel} + \omega\rho \cos \vartheta \vec{e}_{\perp}, \quad u = (\omega^2\rho^2 - 2v\omega\rho \sin \vartheta + v^2)^{1/2}.$$

Пусть $\sigma = \sigma(\rho, \vartheta)$ — плотность силы нормальной реакции.¹ Тогда трение создает результирующую силу $\vec{F} = -F_{\parallel}\vec{e}_{\parallel} - F_{\perp}\vec{e}_{\perp}$ и момент $\vec{M} = -M\vec{e}_z$ относительно точки O , где

$$F_{\parallel} = f \int_{B_r} (v - \omega\rho \sin \vartheta) u^{-1} \sigma ds, \quad (1.2)$$

$$F_{\perp} = f \int_{B_r} \omega\rho \cos \vartheta u^{-1} \sigma ds, \quad (1.3)$$

$$M = f \int_{B_r} (\omega\rho - v \sin \vartheta) \rho u^{-1} \sigma ds. \quad (1.4)$$

¹Далее σ также зависит от v и ω , но для краткости мы пишем явно только аргументы ρ и ϑ .

Имеем также условие нормировки

$$\int_{B_r} \sigma ds = N = mg, \tag{1.5}$$

где g — ускорение свободного падения.

Для однородного шара аналогичный подход был предложен в [23, 25]. Близкие по форме модели предложены в [1, 3, 4, 10–12], см. также [15–19]. В работах В. Ф. Журавлева содержится критика неголономной модели с точки зрения возможности ее применения в практических задачах. Эта критика, с нашей точки зрения, как правило, излишне категоричная, тем не менее заставила специалистов по неголономной механике по-новому взглянуть на традиционные модели и область их применимости. Впрочем, поскольку задача о скольжении шайбы (круглым основанием) по плоскости совсем не похожа на неголономную, к соответствующим дискуссиям (см., например, [6, 7, 21]) рассматриваемая далее модель не имеет прямого отношения.

Движение шайбы по плоскости изучалось в [9, 24, 26], но так как используемая нами модель взаимодействия шайбы с плоскостью по сути та же, что и в случае шара, мы остановимся также и на некоторых особенностях работ [1, 3–5, 15, 17, 23, 25].

1. В случае скольжения и качения шара по плоскости естественно считать пятно контакта малым по сравнению с размерами шара. По этой причине П. Контенсу [25] не рассматривает момент M , считая его пренебрежимо малым.

2. Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев считают плотность σ постоянной. Контенсу использует несколько более естественное выражение для σ , беря его из решения стационарной задачи теории упругости (задачи Герца). Для этой плотности В. Ф. Журавлёв сумел получить явные выражения для интегралов (1.2)–(1.4) в элементарных функциях, что, впрочем, пока не удалось существенным образом использовать для решения задач динамики.

3. В других ситуациях (диск с функцией давления по Галину, кольцо) возникают другие выражения для σ , инвариантные при вращении вокруг оси, перпендикулярной пятну контакта и проходящей через его центр. Другими словами, σ предполагается, вообще говоря, произвольной неотрицательной функцией радиуса $\rho \in [0, r]$. При этом F_{\perp} всегда оказывается равной нулю. Далее для таких плотностей мы используем, возможно, не слишком удачный термин *осесимметричные*.

В этой связи стоит отметить, что предположение об осесимметричности σ в динамических задачах, вообще говоря, не выполняется. Попытка предложить более реалистичную модель предпринята в [17]. Весьма неочевидным является даже утверждение о том, что с достаточной точностью пятно контакта можно считать кругом. Ниже мы увидим, что для шайбы с небольшим значением параметра $\delta = 2fh/r$ пятно контакта можно считать кругом, но и в этом случае при $v \neq 0$ плотность σ при $\delta \neq 0$ осесимметричной не является. С другой стороны, не исключено, что во многих случаях приближение осесимметричной σ и даже неголономная (в случае шара) модель являются вполне удовлетворительными.

4. Желая работать с простыми явными формулами для F_{\parallel} и M , В. Ф. Журавлёв предлагает использовать аппроксимации Паде первого порядка

$$\tilde{F}_{\parallel} := fN \frac{v}{|v| + a|\omega|}, \quad \tilde{M} := fN \frac{c\omega}{|\omega| + b|v|} \tag{1.6}$$

с постоянными a, b и c . (Здесь v — проекция скорости центра масс шара на прямую, параллельную этой скорости, а ω — проекция угловой скорости шара на вертикаль.) Отметим,

что в отличие от F_{\parallel} функция \tilde{F}_{\parallel} не дифференцируема по ω при $\omega = 0$, а \tilde{M} в отличие от M не дифференцируема по v при $v = 0$. Таким образом, в принципиально важных областях фазового пространства функции F_{\parallel} , M и их приближения (1.6) ведут себя качественно по-разному.

5. С. В. Болотин заметил, что в случае, когда имеются достаточные основания считать плотность σ не зависящей от v и ω , появляется естественное ограничение на вид результирующих силы и момента как функций от \vec{v} и ω . Действительно, выражение для силы (1.1) «потенциально по скоростям» в следующем смысле. В проекциях на неподвижные горизонтальные оси x, y имеем:

$$\vec{u} = (u_x, u_y), \quad \vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y), \quad \vec{v} = (v_x, v_y), \quad \vec{F} = (F_x, F_y), \\ u = \sqrt{(v_x - \omega\rho_y)^2 + (v_y + \omega\rho_x)^2}.$$

С учетом этих обозначений несложно проверить, что

$$dF_x = -\frac{\partial}{\partial v_x}(fu dN), \quad dF_y = -\frac{\partial}{\partial v_y}(fu dN), \quad dM = -\frac{\partial}{\partial \omega}(fu dN).$$

Это свойство, аналогичное «потенциальности по скоростям», возникающей в моделях, определяемых функцией диссипации Рэлея, должно сохраниться и после вычисления результирующих силы и момента по формулам (1.2)–(1.4). Таким образом, всякая естественная аппроксимация функций $\vec{F}(\vec{v}, \omega)$ и $M(\vec{v}, \omega)$ должна уважать указанную потенциальность. При этом следует иметь в виду тот факт, что в случае, если σ явно зависит от \vec{v} и ω (именно эта ситуация реализуется в настоящей статье), потенциальность, как правило, теряется.

6. Функции F_{\parallel} , F_{\perp} и M однородны степени 0 по v, ω . Поэтому их можно считать функциями одной переменной, например, угла φ на окружности $v^2 + r^2\omega^2 = \text{const}$. Из соображений четности и π -антипериодичности достаточно знать значения этих функций при φ , лежащем на отрезке $[0, \pi/2]$. При замене этих функций их аппроксимациями Паде первого порядка аппроксимирующие дробно-линейные функции также выбираются π -антипериодичными и удовлетворяющими тем же условиям четности. Единственным дополнительным условием является совпадение значений аппроксимирующих и точных функций в точках 0 и $\pi/2$.

Возникает вопрос: можно ли считать надежным приближение одной функции другой на основе того, что их значения (в данном случае на отрезке $[0, \pi/2]$) совпадают в двух точках? Ответ, по-видимому, ясен: без дополнительных аргументов нельзя. Эти аргументы должны устанавливать похожее поведение точной и аппроксимирующей функции с точки зрения класса гладкости, количества и расположения критических точек, значений в критических точках и т. д. Это замечание касается и аппроксимаций Паде более высоких порядков. Некоторое обсуждение подобных вопросов мы нашли лишь в [15, 17].

Более того, формально говоря, заменяя функцию некоторой ее аппроксимацией, мы меняем задачу. Вопрос о том, могут ли выводы, сделанные при исследовании измененной задачи, нести информацию об исходной задаче, требует отдельного исследования. Таких исследований в работах о движении твердых тел в присутствии сухого трения мы не нашли. На наш взгляд, от подобных аппроксимаций в теоретических исследованиях можно отказаться, что отчасти продемонстрировано в работах [9, 26]. Этому подходу мы пытались следовать в настоящей работе.

7. Отметим, что вопрос о структуре сил сухого трения весьма интересен сам по себе. Обсуждение моделей трения, возникающих в результате введения функций диссипации

Рэлея различной степени однородности, содержится в [2]. В работе [20] предпринята попытка посмотреть на этот вопрос с общей точки зрения в рамках лагранжевого формализма. Полученные при этом модели сухого трения, вообще говоря, отличаются от традиционно используемых в литературе и требуют экспериментальной проверки. Впрочем, это же касается и всех упомянутых выше моделей, а также модели, используемой в настоящей статье.

Для однородной шайбы на горизонтальной плоскости на первый взгляд естественно предположить, что функция σ является постоянной или, по крайней мере, осесимметричной. Но, как справедливо отмечено в [8, 22, 24, 26], таким образом распределенная нормальная реакция не могла бы скомпенсировать момент относительно центра масс шайбы, создаваемый силой трения. Поэтому, как и в [8, 22], мы вводим следующее предположение.

Н2. σ — линейная функция декартовых координат на плоскости.

В качестве мотивов для такого предположения, следуя А. П. Иванову, отметим, что, во-первых, линейная функция — следующая по простоте после постоянной, и, кроме того, именно такая плотность получается, если считать шайбу абсолютно твердой, а плоскость, — состоящей из закрепленных в нижних концах независимых пружинок, перемещающихся исключительно вдоль вертикали.² Другая возможность состоит в том, чтобы считать плоскость абсолютно твердой, а материал шайбы линейно деформируемым.³ Не вызывает сомнений, что предлагаемые ниже методы вполне применимы при замене **Н2** на более общее предположение, что σ есть сумма осесимметричной и линейной функции.

Наше заключительное допущение вызвано неотрицательностью функции σ . При малых значениях параметра $\delta = 2fh/r$ отличие σ от постоянной невелико, так что σ определена на всем круге B_r и положительна. Если увеличивать δ , то в какой-то момент приходится предположить, что σ обращается в нуль на открытом подмножестве круга B_r (соответствующая ситуация обсуждается в [22]), а при дальнейшем росте параметра δ движение оказывается невозможным (шайба опрокидывается). Чтобы иметь удобные формулы, мы предполагаем, что выполнено следующее предположение.

Н3. В процессе движения $\sigma > 0$ почти везде на B_r .

Далее мы покажем (см. параграф 5), что **Н3** выполнено на всех движениях тогда и только тогда, когда $\delta \leq 1$. Необходимость условия $\delta \leq 1$ — простой факт [8], а достаточность получена численно как результат неотрицательности функции, изображенной на рисунке 8. Простое вычисление [8] показывает, что при $\delta > 4$ поступательное скольжение невозможно: шайба падает набок. В силу этих соображений далее случай $\delta > 4$ не рассматривается. В основном мы концентрируемся на ситуации $0 \leq \delta \leq 1$.

2. Основные результаты

После предварительной работы, связанной с вычислением результирующей силы и момента трения (параграфы 4–5), мы получаем уравнения движения (6.2). Нашей задачей является качественный анализ, основные результаты которого мы сейчас изложим.

0. При любых начальных условиях шайба останавливается за конечное время (следствие 5). Простое доказательство этого эффекта в случае свободного движения системы

²Эта модель линейно упруго деформируемой плоскости отличается от модели, использованной в контактной задаче Галина, где давление распределено неравномерно по пятну контакта.

³Выражаем благодарность рецензенту за это замечание.



весьма общего вида в присутствии сухого трения имеется в [2]. Момент остановки обозначим t_0 .

1. На любом движении знак угловой скорости ω не может измениться (следствие 6).

2. Уравнения движения шайбы обладают группой симметрий, изоморфной $O(2) \times \mathbb{R}_+$ (предложение 5). Отсюда вытекает интегрируемость задачи в квадратурах (предложение 7).

3. Система имеет три особых режима. Два из них тривиальны: B_0 — чистое вращение ($v \equiv 0$) и C_0 — поступательное движение ($\omega \equiv 0$). Третий особый режим D и два типичных B и C назовем нетривиальными и обсудим чуть ниже. Все возможные движения исчерпываются движениями типа B_0, C_0, B, C и D . Режимы B и C типичны в том смысле, что наугад выбранные начальные условия с вероятностью единица дают движение одного из этих двух типов.

4. На любом нетривиальном движении скорость центра масс и угловая скорость шайбы становятся нулевыми одновременно — эффект, обнаруженный для движения шара с $\sigma = \text{const}$ в [23], а также отмеченный в более сложных моделях [1, 5, 10]. В случае шайбы соответствующие утверждения см. в [9, 26] при $\delta = 0$, а также в [8] при произвольных (небольших) значениях δ и для движения шайбы по наклонной плоскости в [13, 14].

Мы показываем (следствие 9), что на любом нетривиальном движении предел $\lim_{t \rightarrow t_0} r\omega/v$ существует и принимает одно из двух возможных значений $\pm \text{tg } \varphi_0$, где $\varphi_0 = \varphi_0(\delta)$ — постоянная, не зависящая от начальных условий (см. рис. 2). В случае $\delta = 0$ этот эффект обсуждается в [9, 26]. Там же указано значение $\text{tg } \varphi_0|_{\delta=0}$, приближенно равное $1/0.71$ [9] и $1/0.653$ [26]. Наши вычисления дают $\text{tg } \varphi_0|_{\delta=0} = 1/0.653001\dots$

График функции $\delta \mapsto \varphi_0(\delta)$ изображен на рисунке 2.

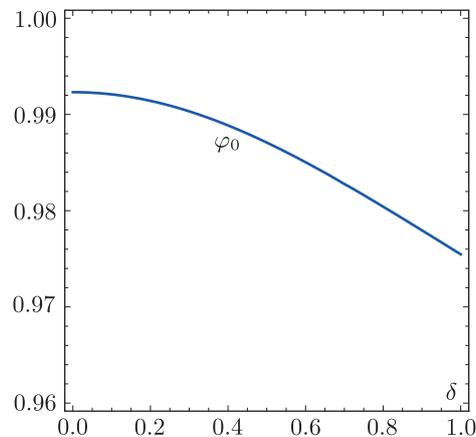


Рис. 2. График функции $\delta \mapsto \varphi_0(\delta)$.

5. Движения типа D определяются условием $r\omega/v \equiv \pm \text{tg } \varphi_0$. Остальные движения определяются следующим образом. При продолжении назад по времени на движениях типа B имеем $r\omega/v \rightarrow \infty$, а на движениях типа C имеем $r\omega/v \rightarrow 0$ (следствие 9).

6. При $\delta = 0$ центр масс шайбы движется прямолинейно. При $\delta \neq 0$ его траектория, вообще говоря, искривляется. Если $\omega > 0$ и $v \neq 0$, то траектория отклоняется вправо по ходу движения; если $\omega < 0$ и $v \neq 0$, то влево (следствие 10). Это наблюдение содержится в [8, 24] (см. также рис. 3).

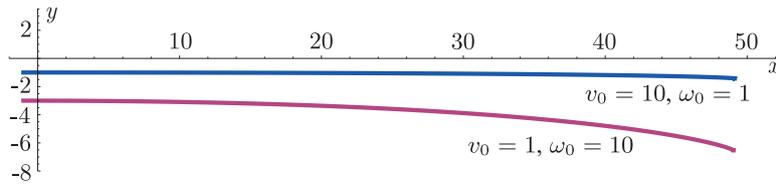


Рис. 3. Траектории центра масс, $f = 1$.

Таким образом, направление скорости центра масс на нетривиальных движениях монотонно поворачивается. Суммарный угол поворота оказывается бесконечным (следствие 13). Впрочем, это замечание носит формальный характер, поскольку бесконечность угла поворота скорости, в сущности, не наблюдаема: она реализуется при $t \rightarrow t_0$ на бесконечно малом конечном участке траектории, а также для некоторых траекторий — при $t \rightarrow -\infty$. Если выражаться несколько точнее, оценки показывают, что при $t \rightarrow t_0$ угол поворота скорости центра масс асимптотически пропорционален величине $\ln(t_0 - t)$, которая, конечно, растет, но этот рост настолько медленный, что в численных экспериментах (рис. 3) он не проявляется.

7. Следствием симметрий задачи является также следующее наблюдение. С точностью до преобразования подобия плоскости Π имеется ровно 5 возможных траекторий центра масс: точка (B_0), луч (C_0), кривая типа D и две типичные: B и C (см. рис. 3).

Кривая типа D самоподобна, то есть при любом преобразовании подобия плоскости она переходит в изометричную ей кривую. Решения класса B в некотором смысле выходят на чистые вращения, а решения класса C — на поступательные движения. Впрочем, эта интерпретация несколько вульгарна, поскольку в обоих случаях как v , так и ω стремятся к бесконечности при $t \rightarrow -\infty$. При продолжении назад по времени у траекторий класса C касательная имеет асимптотическое направление, тогда как у траекторий класса B касательная логарифмически медленно, но неограниченно вращается.

8. В конечной точке радиус кривизны любой нетривиальной траектории равен нулю, а его производная по натуральному параметру равна не зависящей от начальных условий величине $R'_0(\delta) = -\Lambda(\delta)/\delta$ (следствие 12), где Λ — слабо меняющаяся на отрезке $[0, 1]$ функция, примерно равная 7.

Вышеперечисленные свойства 1–8, в общем, претендуют на исчерпывающий качественный анализ движения шайбы по горизонтальной плоскости при предположениях **Н1–Н3**. Таким образом, на первый план выходит анализ самих предположений и возможности хотя бы частичного их ослабления.

Здесь мы ограничимся лишь следующим простым замечанием. Если разрешить коэффициенту f в локальном законе Амонтона–Кулона (1.1) слегка отклоняться от постоянной, демонстрируя зависимость от u , или разрешить функции σ немного отклоняться от линейной, или, наконец, рассмотреть значения параметра δ , несколько превосходящие 1, то задача, конечно, потеряет богатую группу симметрий, упомянутую в пункте 3, и универсальность форм следов, оставляемых шайбой на плоскости (пункт 7). Однако грубые свойства движений останутся неизменными.

В заключение отметим полученную численно зависимость времени движения шайбы и пройденного пути от значения начальной угловой скорости при неизменной скорости центра масс. На рисунке 4 приведены графики зависимости конечного положения центра масс шайбы x_0, y_0 , а также времени движения до остановки t_0 от величины начальной угловой

скорости $\omega(0)$ при начальной скорости центра масс равной $(1, 0)$. Из графиков видно, что на рассмотренном интервале изменения аргумента как x_0 , так и t_0 приблизительно линейно растут с ростом $\omega(0)$.

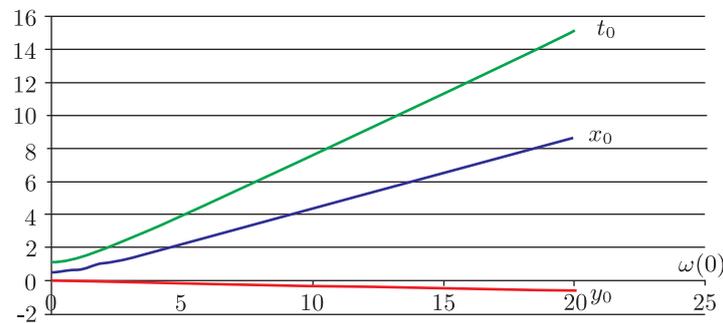


Рис. 4. Конечное положение центра масс x_0, y_0 и время движения t_0 шайбы до остановки как функции от начальной угловой скорости $\omega(0)$.

Далее несколько утверждений типа «некоторая функция положительна» или «некоторая функция обращается в нуль в единственной точке» проверяются на компьютере. В остальном наше исследование следует считать вполне строгим. Вероятно, и для этих утверждений можно найти строгое чисто теоретическое обоснование, используя соображения непрерывности, монотонности и пр. Однако мы не стремились получить такие доказательства, так как они сделали бы текст более трудным для чтения и вряд ли прояснили бы суть дела.

3. О сравнении с экспериментом

Подход к вычислению силы и момента, действующих на шайбу, анализировался в работе [19]. При этом инфинитезимальное значение силы, вытекающее из закона Амонта-на–Кулона, интегрируется по пятну контакта. В качестве основного вывода в [19] указано на качественное согласие теории и эксперимента. Вопросы количественного соответствия не обсуждаются.

В Удмуртском государственном университете на базе лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения были проведены эксперименты по исследованию свободного движения шайбы по горизонтальной поверхности. Для этого использовались резиновые и стальные шайбы высотой от 12.5 до 25 мм и диаметров 60 и 75 мм. Основное внимание уделялось эволюции величины $\varepsilon = r\omega/v$. С этой целью осуществлялась видеосъемка движения с частотой 100 кадров в секунду, также как в [27].

Предварительный анализ результатов экспериментов показал, что на протяжении основного участка движения величина ε меняется монотонно, выходя за 0.05–0.01 с до остановки шайбы на некоторое значение ε_0 . Поведение ε после выхода на ε_0 оказывается нерегулярным и слабопредсказуемым. Типичные графики ε как функции времени приведены на рисунках 5 и 6.

Таким образом, если исключить финальный участок движения, наблюдается качественное согласие экспериментально вычисленной зависимости ε от времени с предсказаниями теории. Вопрос количественного соответствия теории и эксперимента оказывается более сложным. Отметим, что значение ε_0 оказывается зависящим от типа шайбы. Более

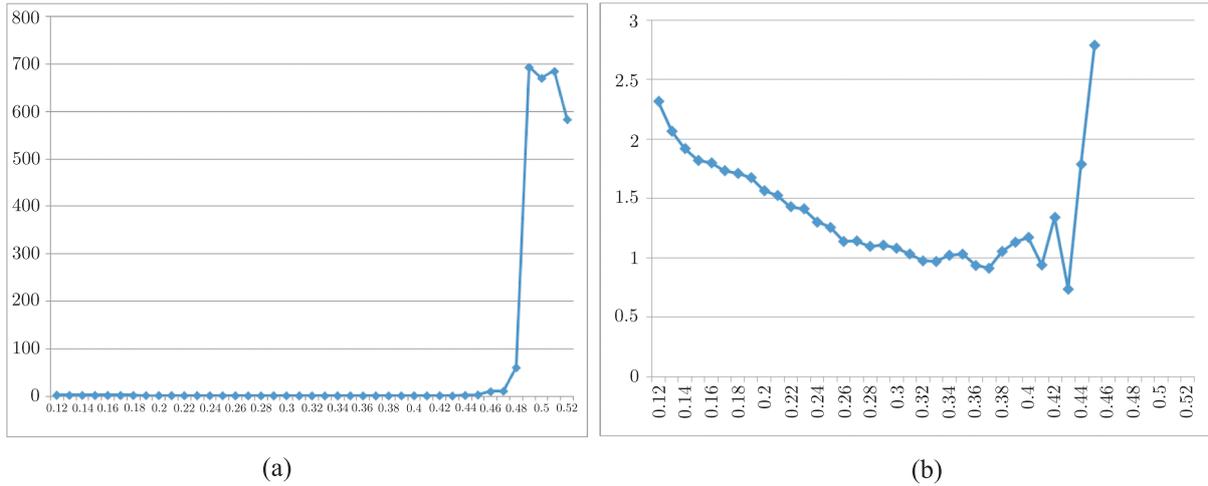


Рис. 5. Поведение ε для стальной шайбы диаметра 60 мм и высотой 19 мм: (а) съемка до полной остановки шайбы 0.52 секунды, (б) в увеличенном масштабе до 0.44 секунды.

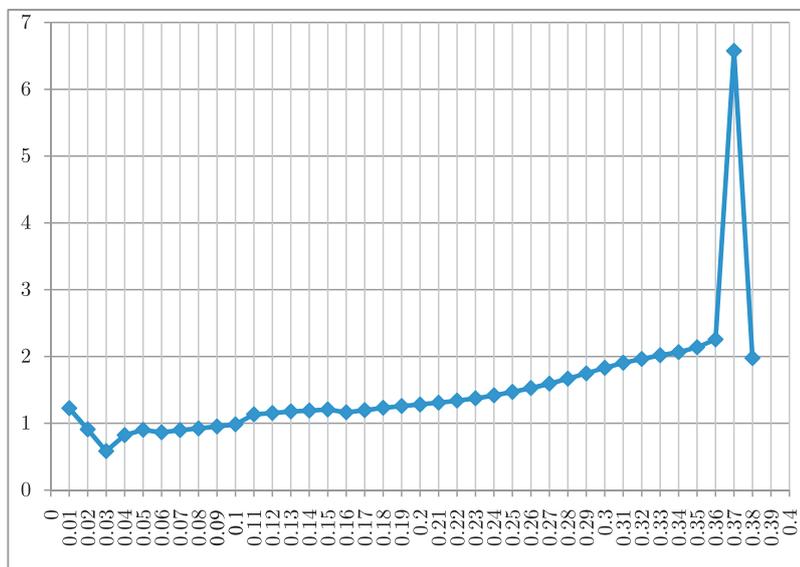


Рис. 6. Поведение ε для резиновой шайбы диаметра 74 мм и высотой 25 мм. Съемка до полной остановки шайбы 0.38 секунды.

того, ε_0 может меняться от опыта к опыту даже для одной и той же шайбы. По-видимому, это объясняется высокой чувствительностью распределения нормального давления по пятну контакта к отличию поверхности основания шайбы от идеально плоской поверхности.

Если нормальное давление концентрируется ближе к центру шайбы, то $\varepsilon_0 > 1.531$, если ближе к периферии шайбы, то $\varepsilon_0 < 1.531$. В экспериментах реализуются обе эти ситуации. Это показывает, что количественное соответствие теории и эксперимента следует искать не на пути замены гипотезы о равномерном распределении давления по пятну контакта на какой-либо другой детерминированный закон, а на переход к анализу характеристик движения, усредненных по большому числу опытов. Возможно также построение теории движения не очень плоской шайбы по не очень плоской поверхности.

В завершение вернемся к финальному участку движения шайбы. Здесь нерегулярность поведения ε как функции времени может быть объяснена двумя причинами: во-первых, большими погрешностями при экспериментальном вычислении v и ω при малых значениях скоростей; а во-вторых, физическими эффектами (например, адгезия), наблюдающимися и при малых скоростях. Влияние первой причины можно ослабить путем совершенствования методов экспериментального вычисления скоростей, в частности увеличения частоты видеосъемки. Вторая причина заслуживает дополнительного экспериментального анализа и теоретического осмысления. Эти и другие вопросы мы планируем изучить более детально в дальнейших экспериментальных исследованиях.

Экспериментальный анализ свободного движения шайбы проводился в [27]. Помимо монотонного поведения ε как функции времени в этой работе утверждается, что ε выходит на предельное значение ε_0 (в [27] $\varepsilon_0 = 0.653$, так как за ε принято отношение поступательной скорости к вращательной $\varepsilon = v/r\omega$), и приводятся соответствующие графики. Отметим, что на этих графиках отсутствует финальный участок нерегулярного поведения ε . В наших исследованиях нерегулярность поведения ε наблюдается во всех экспериментах.

4. Сила и момент

Согласно **H2** имеем:

$$\sigma(\rho, \vartheta) = a + b\rho \cos \vartheta + c\rho \sin \vartheta. \quad (4.1)$$

Условие (1.5) принимает вид

$$\pi r^2 a = N. \quad (4.2)$$

В этом разделе мы получим удобные выражения для F_{\parallel} , F_{\perp} и M . Для этого сначала надо подставить (4.1) в (1.2)–(1.4). Некоторые слагаемые в подынтегральных выражениях оказываются нечетными функциями при замене ϑ на $\pi - \vartheta$ и, следовательно, дают нулевой вклад в интегралы. С учетом этих соображений равенства (1.2)–(1.4) переписываются в виде

$$F_{\parallel} = \pi f(ar^2 I_a + cr^3 I_c), \quad F_{\perp} = \pi fbr^3 I_b, \quad M = \pi f(ar^3 \hat{I}_a + cr^4 \hat{I}_c), \quad (4.3)$$

$$I_a = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} \frac{v - \omega \rho \sin \vartheta}{u} ds, \quad I_b = \frac{1}{\pi r^3} \int_{B_r} \frac{\omega \rho^2 \cos^2 \vartheta}{u} ds,$$

$$I_c = \frac{1}{\pi r^3} \int_{B_r} \frac{(v - \omega \rho \sin \vartheta) \rho \sin \vartheta}{u} ds,$$

$$\hat{I}_a = \frac{1}{\pi r^3} \int_{B_r} \frac{(\omega \rho - v \sin \vartheta) \rho}{u} ds, \quad \hat{I}_c = \frac{1}{\pi r^4} \int_{B_r} \frac{(\omega \rho - v \sin \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta}{u} ds.$$

Функции I_a, I_b, I_c, \hat{I}_a и \hat{I}_c однородны степени 0 по v и ω . Чтобы использовать это обстоятельство, положим

$$v = Q\alpha, \quad r\omega = Q\beta, \quad \alpha = \cos \varphi, \quad \beta = \sin \varphi. \quad (4.4)$$

Тогда I_a, I_b, I_c, \hat{I}_a и \hat{I}_c оказываются функциями одной переменной φ . Удобно сделать замену переменных $\rho = r\hat{\rho}$. Опуская для краткости крышку над ρ , получаем

$$I_a = \int_{B_1} \frac{\alpha - \beta \rho \sin \vartheta}{\pi w} ds, \quad I_b = \int_{B_1} \frac{\beta \rho^2 \cos^2 \vartheta}{\pi w} ds,$$



$$\widehat{I}_a = \int_{B_1} \frac{(\beta\rho - \alpha \sin \vartheta)\rho}{\pi w} ds, \quad \widehat{I}_c = \int_{B_1} \frac{(\beta\rho - \alpha \sin \vartheta)\rho^2 \sin \vartheta}{\pi w} ds,$$

где $w = (\beta^2\rho^2 - 2\alpha\beta\rho \sin \vartheta + \alpha^2)^{1/2}$.

Чтобы лучше понять структуру функций $I_a, I_b, I_c, \widehat{I}_a$ и \widehat{I}_c , используем интегрирование по частям по переменной ϑ . Получаем:

$$\begin{aligned} I_a &= \alpha p_a, \quad I_b = \beta p_b, \quad I_c = \beta p_c = \beta(p_b - \widehat{p}_a), \quad \widehat{I}_a = \beta \widehat{p}_a, \quad \widehat{I}_c = \alpha \widehat{p}_c, \\ p_a &= \int_{B_1} \frac{(\alpha - \beta\rho \sin \vartheta)^2}{\pi w^3} ds, \quad p_b = \int_{B_1} \frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{\pi w} ds, \quad \widehat{p}_a = \int_{B_1} \frac{(\beta\rho - \alpha \sin \vartheta)^2 \rho^2}{\pi w^3} ds, \\ \widehat{p}_c &= \int_{B_1} \frac{(\beta^2\rho^2 \cos 2\vartheta + 2\alpha\beta\rho \sin^3 \vartheta - \alpha^2 \sin^2 \vartheta)\rho^2}{\pi w^3} ds. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Следствие 1. *Функции p_a, p_b и \widehat{p}_a положительны при всех значениях аргумента $\varphi \bmod 2\pi$.*

Следствие 2. *Функции $p_a, p_b, p_c, \widehat{p}_a$ и \widehat{p}_c четные и π -периодичны по φ .*

В точках $\varphi = 0$ (поступательное движение) и $\varphi = \pm\pi/2$ (чистое вращение) интегралы явно вычисляются. Используя замену

$$(\rho, \vartheta) \mapsto (\rho', \vartheta'), \quad \rho \cos \vartheta = \rho' \cos \vartheta', \quad \rho \sin \vartheta = \alpha/\beta + \rho' \sin \vartheta',$$

предложенную Журавлёвым, можно также посчитать значения интегралов при $\varphi = \pi/4$. Результаты приведены в таблице:

	p_a	p_b	p_c	\widehat{p}_a	\widehat{p}_c
0	1	1/4	0	1/4	-1/4
$\pi/4$	$\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$	$\frac{32\sqrt{2}}{45\pi}$	$-\frac{8\sqrt{2}}{45\pi}$	$\frac{8\sqrt{2}}{9\pi}$	$-\frac{8\sqrt{2}}{15\pi}$
$\pi/2$	1	1/3	-1/3	2/3	0

(4.6)

Следствие 3. *Численный эксперимент (рис. 7) показывает, что функции p_c и \widehat{p}_c неположительны и принимают нулевые значения только в точках 0 и $\pi/2$ соответственно.*

5. Вычисление плотности σ

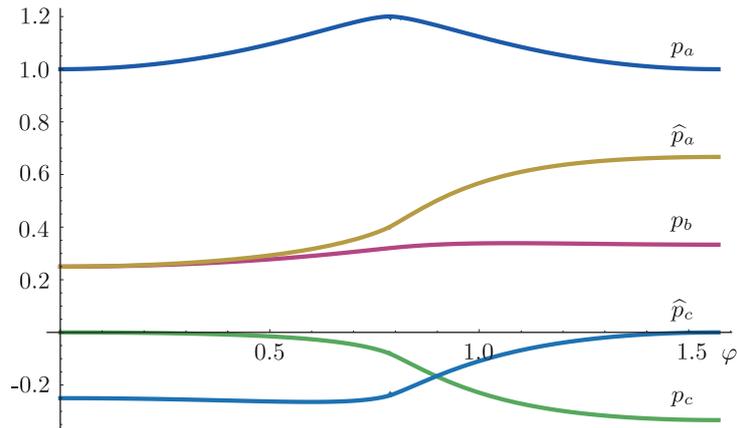
Приравнявая к нулю момент сил относительно центра масс шайбы, получаем:

$$\frac{hF_{\parallel}}{2} = \int_{B_r} \sigma(\rho, \vartheta)\rho \cos \vartheta ds, \quad \frac{hF_{\perp}}{2} = \int_{B_r} \sigma(\rho, \vartheta)\rho \sin \vartheta ds. \tag{5.1}$$

Интегралы в правых частях этих равенств вычисляются явно. Используя обозначения (4.3) и (4.5), получаем

$$\frac{\pi}{2}fh(ar^2 \cos \varphi p_a + cr^3 \sin \varphi p_c) = \frac{b\pi r^4}{4}, \quad \frac{\pi}{2}fhbr^3 \sin \varphi p_b = \frac{c\pi r^4}{4},$$



Рис. 7. Графики функций p_a, p_b, p_c, \hat{p}_a и \hat{p}_c .

откуда, с учетом (4.2), находим

$$b = \frac{\delta \cos \varphi p_a}{p_d} \frac{N}{\pi r^3}, \quad c = \delta \sin \varphi p_b b, \quad p_d = 1 - \delta^2 \sin^2 \varphi p_b p_c, \quad \delta = \frac{2fh}{r}. \quad (5.2)$$

Отметим, что, согласно следствию 3, $p_d \geq 1$ при всех $\varphi \bmod 2\pi$.

Условие неотрицательности σ на B_r имеет вид $a^2 \geq (b^2 + c^2)r^2$. Подробнее:

$$p_d^2 \geq \delta^2 \cos^2 \varphi p_a^2 (1 + \delta^2 \sin^2 \varphi p_b^2). \quad (5.3)$$

При $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$ неравенство принимает вид $\delta \leq 1, \delta \leq 1.1263\dots, 0 \leq 1$ соответственно.

Предложение 4. Плотность σ неотрицательна всюду на B_r тогда и только тогда, когда $0 \leq \delta \leq 1$.

Действительно, при $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$ неравенство принимает вид $\delta \leq 1, \delta \leq 1.1263\dots, 0 \leq 1$ соответственно. Следовательно, при $\delta > 1$ плотность σ отрицательна на открытых множествах круга B_r при $\varphi = 0$.

При $\varphi \neq 0, \pi/4, \pi/2$ мы не можем строго проверить неравенство (5.3). Однако компьютерное вычисление (рис. 8) свидетельствует о том, что при $\delta \in [0, 1]$ плотность σ неотрицательна и имеет нуль на B_r лишь при $\delta = 1, \varphi = 0$, причем элементарная проверка показывает, что этот нуль достигается лишь в одной точке круга B_r . ■

6. Уравнения движения

Положим

$$\frac{F_{\parallel}}{m} = \cos \varphi p_{\parallel} J, \quad \frac{F_{\perp}}{m} = \sin \varphi \cos \varphi p_{\perp} J, \quad \frac{2M}{mr} = \sin \varphi p_{\omega} J, \quad J = \frac{fN}{m}.$$

Тогда, согласно (4.3), (4.5) и (5.2),

$$p_{\parallel} = \frac{p_a}{p_d}, \quad p_{\perp} = \frac{\delta p_a p_b}{p_d}, \quad p_{\omega} = 2 \left(\hat{p}_a + \frac{\delta^2 \cos^2 \varphi p_a p_b \hat{p}_c}{p_d} \right).$$

Таким образом, из следствия 1 вытекает



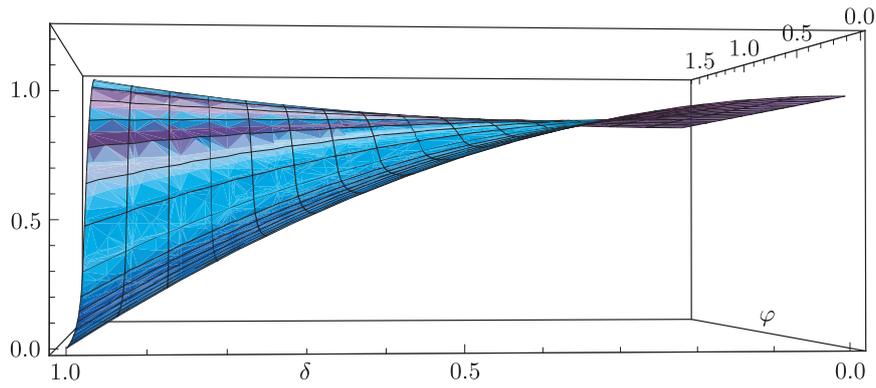


Рис. 8. График функции $(\varphi, \delta) \mapsto p_a^2 - \delta^2 \cos^2 \varphi p_a^2 (1 + \delta^2 \sin^2 \varphi p_b^2)$, $\delta \in [0, 1]$, $\varphi \bmod 2\pi$.

Следствие 4. Функции p_{\parallel} и p_{\perp}/δ положительны при всех $\varphi \bmod 2\pi$. Если параметр δ достаточно мал, то p_{ω} также положительна при всех $\varphi \bmod 2\pi$.

Численный эксперимент (см. рис. 9) показывает, что $p_{\omega} > 0$ при всех $\delta \in [0, 2]$.

Ввиду (4.6) имеем следующую таблицу значений для p_{\parallel} , p_{\perp} и p_{ω} :

	p_{\parallel}	p_{\perp}	p_{ω}	
0	1	$\delta/4$	$(4 - \delta^2)/8$	(6.1)
$\pi/4$	$\frac{5400\sqrt{2}\pi}{(45\pi)^2 + (16\delta)^2}$	$\frac{7680\delta}{(45\pi)^2 + (16\delta)^2}$	$\frac{16\sqrt{2}}{9\pi} \frac{(45\pi)^2 - 2(32\delta)^2}{(45\pi)^2 + (16\delta)^2}$	
$\pi/2$	$9/(9 + \delta^2)$	$3\delta/(9 + \delta^2)$	$4/3$	

Результаты компьютерных вычислений этих функций представлены на рисунках 9 и 10.

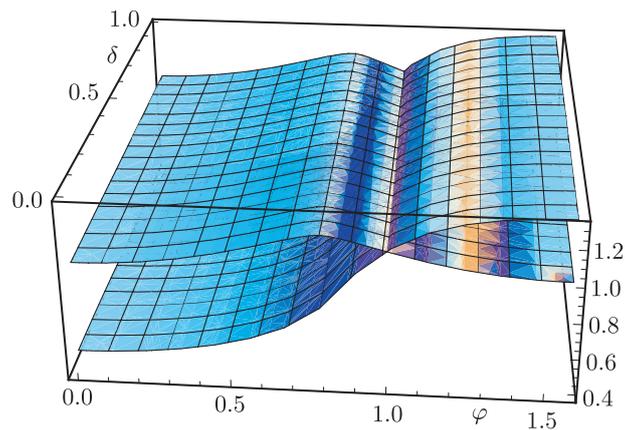
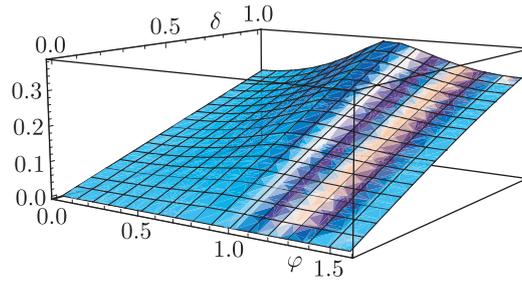


Рис. 9. Графики функций $(\varphi, \delta) \mapsto p_{\parallel}$ и $(\varphi, \delta) \mapsto p_{\omega}$, $\delta \in [0, 1]$, $\varphi \bmod 2\pi$.

Пусть \vec{e}_x и \vec{e}_y — неподвижный ортонормированный базис в плоскости Π и v_x, v_y — проекции скорости центра масс шайбы на эти направления. Тогда $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и уравнения

Рис. 10. График функции $(\varphi, \delta) \mapsto p_{\perp}$, $\delta \in [0, 1]$, $\varphi \bmod 2\pi$.

движения шайбы принимают вид

$$\dot{\vec{v}} = -(\cos \varphi p_{\parallel} E + \sin \varphi \cos \varphi p_{\perp} \Omega) \frac{\vec{v}}{v} J, \quad r\dot{\omega} = -\sin \varphi p_{\omega} J, \quad (6.2)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Первое уравнение (6.2) вытекает из теоремы об изменении импульса, а второе — из теоремы об изменении кинетического момента относительно центра масс.

Предложение 5. Система (6.2) допускает группу симметрий $O(2) \times \mathbb{R}_+$:

$$(\vec{v}, \omega, t) \mapsto (\lambda A \vec{v}, \lambda \det A \omega, \lambda t), \quad (6.3)$$

где A — ортогональная матрица, а λ — положительное число.

Инвариантность системы (6.2) относительно группы преобразований (6.3) следует из того, что преобразование (6.3) меняет φ на $\det A \varphi$, и из тождества

$$A^T \Omega A = (\det A) \Omega \quad \text{для любого оператора } A \in O(2).$$

Благодаря симметриям (6.3) вместе с любым решением $\vec{v}(t), \omega(t)$ система (6.2) имеет решение $\lambda A \vec{v}(\lambda^{-1}t), \lambda \det A \omega(\lambda^{-1}t)$. Чтобы использовать явно эти симметрии, запишем систему в новых координатах (Q, φ, ψ) , где

$$v_x = Q \cos \varphi \cos \psi, \quad v_y = Q \cos \varphi \sin \psi, \quad r\omega = Q \sin \varphi. \quad (6.4)$$

(Отметим, что обозначения (6.4) и (4.4) согласованны. Угол ψ определяет направление скорости \vec{v} на плоскости Π . Получаем следующие уравнения:

$$\dot{Q} = -(\cos^2 \varphi p_{\parallel} + \sin^2 \varphi p_{\omega}) J, \quad (6.5)$$

$$Q \dot{\varphi} = \sin \varphi \cos \varphi (p_{\parallel} - p_{\omega}) J, \quad (6.6)$$

$$Q \dot{\psi} = -\sin \varphi p_{\perp} J. \quad (6.7)$$

Согласно следствию 4 имеем $\dot{Q} < \text{const}(\delta) < 0$, откуда вытекает

Следствие 5. На любом решении системы (6.5)–(6.7) Q обращается в нуль (то есть шайба останавливается) за конечное время.

Следствие 6. Поверхность $\varphi = 0$ в фазовом пространстве системы (6.5)–(6.7) инвариантна, откуда вытекает, что знак угловой скорости ω на решении измениться не может.



7. Эволюция угла φ

Второе уравнение в системе (6.5)–(6.7) отделяется. В новом времени τ ,

$$Q d\tau = J dt, \quad d/d\tau = (') \tag{7.1}$$

оно имеет вид

$$\varphi' = \sin \varphi \cos \varphi (p_{\parallel} - p_{\omega}). \tag{7.2}$$

На решениях системы (6.5)–(6.7) Q монотонно убывает, и движение заканчивается за конечное время в тот момент, когда Q становится равным нулю. Далее мы также установим (следствие 11), что Q обращается в нуль в некоторый момент времени t_0 с асимптотикой $Q(t) = q(t_0 - t) + O((t_0 - t)^2)$, где q – положительная постоянная. С другой стороны, при $t \rightarrow -\infty$ функция Q растет приблизительно линейно. Поэтому оба интеграла

$$\int_t \frac{dt}{Q}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad \text{и} \quad \int_t^t \frac{dt}{Q}, \quad t \nearrow t_0,$$

расходятся. Это означает, что отображение $t \mapsto \tau$ является диффеоморфизмом между $(-\infty, t_0)$ и \mathbb{R} . В частности, уравнение (7.2) естественно изучать при τ , меняющемся от $-\infty$ до $+\infty$. Переменную φ будем считать лежащей на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

Пользуясь таблицей (6.1), получаем неравенства

$$(p_{\parallel} - p_{\omega})|_{\varphi=0} > 0, \quad (p_{\parallel} - p_{\omega})|_{\varphi=\pi/4} > 0, \quad (p_{\parallel} - p_{\omega})|_{\varphi=\pi/2} < 0.$$

Следствие 7. «Тривиальные» положения равновесия $\varphi = 0, \pm\pi/2$ уравнения (7.2) неустойчивы.

Следствие 8. Существует по крайней мере одно решение $\varphi_0 \in (\pi/4, \pi/2)$ уравнения $p_{\parallel}(\varphi) - p_{\omega}(\varphi) = 0$. Ввиду четности функций p_{\parallel} и p_{ω} точка $-\varphi_0$ также является решением того же уравнения.

Предложение 6. Уравнение $p_{\parallel}(\varphi) - p_{\omega}(\varphi) = 0$ имеет на интервале $(0, \pi/2)$ единственное решение, причем $\frac{d}{d\varphi}(p_{\parallel} - p_{\omega}) \neq 0$ в точке φ_0 .

Строгое доказательство предложения 6 нам неизвестно. Убедительным свидетельством истинности предложения 6 является компьютерное решение уравнения $p_{\parallel} - p_{\omega} = 0$, результаты которого представлены на рисунках 2 и 9. ■

Следствие 9. Согласно следствию 7 и предложению 6, фазовый портрет уравнения (7.2) имеет вид, изображенный на рисунке 11, причем стремление решений к положениям равновесия экспоненциально быстрое при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

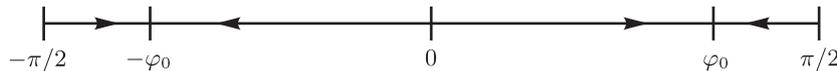


Рис. 11. Фазовый портрет уравнения (7.2).

Итак, имеется пять качественно различных решений уравнения (7.2). Это положения равновесия $\varphi = \pm\pi/2$ (тип B_0), $\varphi = 0$ (тип C_0), $\varphi = \pm\varphi_0$ (тип D) и две пары «типичных» решений: типы B и C – асимптотические при $t \rightarrow -\infty$ к B_0 и C_0 соответственно.

8. Динамика в переменных φ, ψ, τ

В этом параграфе мы обсуждаем проекцию траекторий на сферу

$$S^2 = \{(\varphi, \psi): \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], \psi \bmod 2\pi\}.$$

Объединяя уравнения (6.6) и (6.7), получаем поток на сфере, задаваемый системой

$$\varphi' = \sin \varphi \cos \varphi (p_{\parallel} - p_{\omega}), \quad \psi' = -\sin \varphi p_{\perp}. \quad (8.1)$$

При $\varphi \in (0, \pi/2)$ имеем $\psi' < 0$, а при $\varphi \in (-\pi/2, 0)$ имеем $\psi' > 0$.

Следствие 10. Если $\omega > 0$ и $v \neq 0$, то траектория центра масс отклоняется вправо по ходу движения; если $\omega < 0$ и $v \neq 0$, то влево.

Согласно следствию 2 система (8.1) обратима, то есть соответствующее векторное поле меняется на противоположное при инволюции $\varphi \mapsto -\varphi$. Множество неподвижных точек инволюции совпадает с множеством поступательных движений шайбы ($\omega \equiv 0$). Эта обратимость, конечно, не противоречит диссипативности системы (6.5)–(6.7), поскольку (8.1) — всего лишь подсистема, к тому же записанная в новом времени τ .

В координатах φ, ψ типичные предельные при $\tau \rightarrow \infty$ режимы имеют вид $\varphi = \pm\varphi_0$, $\psi = \mp\tau \sin \varphi_0 + \text{const}$. Кроме них имеются исключительные режимы $\varphi = 0$, $\psi = \text{const}$, отвечающие прямолинейным поступательным движениям шайбы, а также $\varphi = \pm\pi/2$, отвечающие чистым вращениям шайбы.

9. О системе (6.2)

Предложение 7. Система (6.2) интегрируема в квадратурах.

Действительно, интегрируемость системы (8.1) очевидна. Уравнение (6.5) записывается в виде $(\ln Q)' = -\cos^2 \varphi p_{\parallel} - \sin^2 \varphi p_{\omega}$, откуда находим Q как функцию от τ . Затем из уравнения (7.1) находим $t = t(\tau)$. ■

При φ , близких к φ_0 , уравнение (6.5) принимает вид $\dot{Q} = -p_{\parallel}(\varphi_0)J + O(\varphi - \varphi_0)$. Таким образом, имеем

Следствие 11. При t , стремящемся к моменту остановки t_0 , верно асимптотическое равенство $Q(t) = p_{\parallel}(\varphi_0)(t_0 - t) + O((t_0 - t)^2)$.

Как обычно, интегрируемость в квадратурах — довольно формальное свойство, не дающее почти никакой информации о динамике. Поэтому сосредоточимся на качественном анализе системы (6.2).

Размерность группы Ли (6.3) равна 2. С учетом автономности системы (6.2) это означает, что пространство решений разбивается на дискретный набор классов эквивалентности так, что решения, расположенные в одном классе, переводятся друг в друга преобразованием вида (6.3) и сдвигом времени. Всего таких классов шесть:

A — положения равновесия ($v \equiv \omega \equiv 0$), B_0 — чистые вращения ($\varphi \equiv \pm\pi/2$), C_0 — поступательные движения ($\varphi \equiv 0$), D — специальные движения с $\varphi \equiv \pm\varphi_0$. Остальные (типичные) движения делятся на два класса: B — асимптотические при $t \rightarrow -\infty$ к B_0 и C — асимптотические при $t \rightarrow -\infty$ к C_0 .



10. Движение центра масс

В этом параграфе мы опишем траектории центра масс для движений A, B_0, C_0, B, C и D .

A . В этом случае шайба не движется.

B_0 . Здесь центр масс также остается неподвижным.

C_0 . В этом случае траектория центра масс — луч.

B, C, D . В этих случаях траектории центра масс более сложные. Займемся их описанием.

Предложение 8. *Траектории центра масс в случае B переводятся друг в друга преобразованиями подобия плоскости. Это же верно и для случая C . Траектории центра масс в случае D переводятся друг в друга движениями плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим две траектории $\vec{s}_j, j = 1, 2$, центра масс, отвечающие движениям $\vec{v}^{(j)}(t), \omega^{(j)}(t)$ из какого-нибудь одного класса (B или C):

$$\vec{s}_j(t) = \vec{s}_{0j} + \int_{t_j}^t \vec{v}^{(j)}(t) dt, \quad \vec{s}_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_{0j}(t) = \begin{pmatrix} x_{0j}(t) \\ y_{0j}(t) \end{pmatrix}.$$

Так как решения $\vec{v}^{(j)}(t), \omega^{(j)}(t)$ системы (6.2) лежат в одном классе эквивалентности, имеем:

$$\vec{v}^{(2)}(t) = \lambda A \vec{v}^{(1)}(\lambda^{-1}(t - t_*)), \quad \lambda > 0, \quad A \in O(2), \quad t_* \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\vec{s}_2(t) = \vec{s}_{02} + A \lambda^2 \int_{\lambda^{-1}(t_2 - t_*)}^{\lambda^{-1}(t - t_*)} \vec{v}^{(1)}(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad \tilde{t} = \lambda^{-1}(t - t_*),$$

так что $\vec{s}_2(t) = \vec{\Delta} + A \lambda^2 \vec{s}_1(\lambda^{-1}(t - t_*))$ для некоторого вектора $\vec{\Delta}$.

Анализ случая D основан на том, что любые две траектории типа D уравнений (6.5)–(6.7) переводятся друг в друга сдвигом времени $t \mapsto t + \hat{t}$, поворотом $\psi \mapsto \psi + \hat{\psi}$, а также, если необходимо, отражением $\psi \mapsto -\psi$. Подробности опустим. ■

Остановимся на траекториях центра масс в случаях B и C подробнее.

Пусть R — радиус кривизны траектории центра масс шайбы. Тогда $mv^2/R = F_{\perp}$. Следовательно,

$$R = \frac{v^2}{\sin \varphi \cos \varphi p_{\perp} J} = \frac{Q^2 \cos \varphi}{\sin \varphi p_{\perp} J}.$$

Таким образом, для почти всех начальных условий в конечной точке траектории $R = 0$. Пусть s — натуральный параметр на траектории, принимающий в конечной точке значение s_0 . Вычислим dR/ds в точке s_0 . Поскольку $ds = Q \cos \varphi dt$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{ds} &= \frac{1}{Q \cos \varphi J} \frac{d}{dt} \frac{Q^2 \cos \varphi}{\sin \varphi p_{\perp}} = \frac{2\dot{Q}}{\sin \varphi p_{\perp} J} + O(Q) = \\ &= -\frac{2(\cos^2 \varphi p_{\parallel} + \sin^2 \varphi p_{\omega})}{\sin \varphi p_{\perp}} + O(Q). \end{aligned}$$

Так как при $s = s_0$ выполняются равенства $\varphi = \varphi_0, Q = 0$ и $p_{\parallel} = p_{\omega}$, получаем

Следствие 12.

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{dR}{ds} = R'_0 = -\frac{2p_{\parallel}(\varphi_0)}{\sin \varphi_0 p_{\perp}(\varphi_0)} = -\frac{2}{\delta \sin \varphi_0 p_b}.$$

Напомним, что угол ψ определяет направление скорости центра масс шайбы на плоскости Π . Поэтому приращение $\Delta\psi$ угла ψ на траектории естественно назвать числом ее оборотов. Величину $\Delta\psi$ можно вычислить следующим образом:

$$\Delta\psi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\psi}{d\varphi} d\varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{p_{\perp} d\varphi}{\cos \varphi (p_{\parallel} - p_{\omega})}, \quad (10.1)$$

где φ_1 и φ_2 соответствуют начальной и конечной точке траектории.

Для траекторий типа B имеем: $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \varphi_0$ или $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = -\varphi_0$. В случае C : $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_0$ или $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\varphi_0$. Интеграл (10.1) расходится в случае B как в нижнем, так и в верхнем пределе, а в случае C — только в верхнем пределе интегрирования. В итоге получаем

Следствие 13. Полное количество оборотов $\Delta\psi$ траекторий центра масс в случаях B и C равно бесконечности.

Список литературы

- [1] Андронов В. В., Журавлёв В. Ф. Сухое трение в задачах механики. М.—Ижевск: РХД, 2010. 184 с.
- [2] Вильке В. Г. Избранные задачи механики. М.: МГУ, 2010. 70 с.
- [3] Журавлёв В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, № 5, с. 762–767.
- [4] Журавлёв В. Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // МТТ, 2003, № 4, с. 81–88.
- [5] Журавлёв В. Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // МТТ, 2006, № 6, с. 3–9.
- [6] Журавлёв В. Ф. Отклик на статью А. В. Борисова и И. С. Мамаева «Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем». Ответ А. В. Борисова // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 2, с. 365–369.
- [7] Журавлёв В. Ф. Ответ А. В. Борисову // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 3, с. 671–674.
- [8] Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ, 2009, т. 73, № 2, с. 189–203.
- [9] Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // МТТ, 1981, № 4, с. 17–28.
- [10] Ишханян М. В., Карапетян А. В. Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с учетом трения скольжения, верчения и качения // МТТ, 2010, № 2, с. 3–14.
- [11] Карапетян А. В. Двухпараметрическая модель трения и ее свойства // ПММ, 2009, т. 73, № 4, с. 515–519.
- [12] Карапетян А. В. О моделировании сил трения в динамике шара на плоскости // ПММ, 2010, т. 75, № 4, с. 531–535.
- [13] Карапетян А. В., Русинова А. М. О динамике диска на наклонной плоскости с трением // МТТ, 2011 (принято к печати).



- [14] Русинова А. М. О динамике диска на наклонной плоскости с трением в рамках динамически совместной модели трения // ПММ, 2011, т. 75, № 3, с. 396–401.
- [15] Киреенков А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // МТТ, 2002, № 1, с. 60–67.
- [16] Киреенков А. А. Метод вычисления силы трения и момента сил трения в комбинированной модели сухого трения для круговых площадок контакта // МТТ, 2003, № 3, с. 48–53.
- [17] Киреенков А. А. Связанные модели трения скольжения и качения // Докл. РАН, 2008, т. 419, № 6, с. 759–762.
- [18] Киреенков А. А. Связанная модель трения скольжения и качения в динамике тел на шероховатой плоскости // МТТ, 2008, № 3, с. 116–131.
- [19] Киреенков А. А., Семендяев С. В., Филатов В. Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // МТТ, 2010, № 6, с. 192–202.
- [20] Козлов В. В. Лагранжева механика и сухое трение // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 855–868.
- [21] Козлов В. В. Замечания о сухом трении и неголономных связях // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 903–906
- [22] Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. М.: ГИИЛ, 1951. 467 с.
- [23] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1993. 521 с.
- [24] Самсонов В. А. О трении при скольжении и верчении тела // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 1981, № 2, с. 76–78.
- [25] Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie // Kreiselprobleme gyrodinamics: Symp. Celerina, 1962 / H/ Ziegler. Berlin: Springer, 1963. P. 201–216 [Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77].
- [26] Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett., 2003, vol. 90, no. 24, 248302, 4 pp.
- [27] Weidman P. D., Malhotra Ch. P. On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction // Phys. D, 2007, vol. 233, pp. 1–13.

On the motion of free disc on the rough horizontal plane

Tatyana V. Salnikova¹, Dmitrii V. Treschev², Sergei R. Gallyamov³

^{1,2}Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia
Steklov Mathematical Institute
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia

³Udmurt State University
Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

¹tatsalni@mech.math.msu.su, ²treschev@mi.ras.ru, ³galser@uni.udm.ru

We consider the problem of a disk sliding on a horizontal plane under the action of dry friction forces. The model is based on three hypotheses. The law of interaction of a small element of the disk's surface with the plane is the Amontons–Coulomb law, the pressure distribution over the contact patch is a linear (generally speaking, time-dependent) function of Cartesian coordinates, the height of the disk is not high. The equations of motion possess a rich group of symmetry, which enables a detailed qualitative analysis of the problem.

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Keywords: dry friction, Amontons–Coulomb law

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 83–101 (Russian)

