



УДК: 531.4

MSC 2010: 37G15, 37G25

Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах

А. П. Иванов

Рассматриваются динамические системы с разрывной правой частью. Известно, что траектории таких систем негладкие, а фундаментальная матрица решений разрывна. Это обуславливает наличие так называемых разрывных бифуркаций, в результате которых мультипликаторы меняются скачкообразно. Предложен метод ступенчатого сглаживания, позволяющий свести разрывные бифуркации к последовательности типичных бифуркаций: седло-узел, удвоение периода или Хопфа. Полученные результаты применяются к анализу известной системы с трением «ползун на ленте», служащей популярной моделью для описания фрикционных автоколебаний тормозной колодки. Ранее эта модель исследовалась лишь численно, что не позволяло сделать общие выводы о наличии автоколебаний. Новый метод позволяет провести полное качественное исследование возможных типов разрывных бифуркаций в этой системе и выделить области параметров, соответствующие устойчивым периодическим режимам.

Ключевые слова: негладкие динамические системы, разрывные бифуркации, осциллятор с сухим трением

1. Понятие разрывной бифуркации

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} f_+(x, t), & \text{при } H(x) > 0, \\ f_-(x, t), & \text{при } H(x) < 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

Получено 14 марта 2012 года

После доработки 7 мая 2012 года

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039) и гранта РФФИ (грант № 11-01-00354а).

Иванов Александр Павлович

apivanov@orc.ru

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9



с потерей гладкости (или даже непрерывности) на многообразии переключения $\Xi: H(x) = 0$. К такому типу относятся релейные системы управления, механические системы с ударами или сухим трением и даже некоторые модели биологических, социальных или экономических систем [1, 2]. Одна из специфических особенностей таких систем — нетипичные бифуркации периодических траекторий, возникающие при непрерывном изменении какого-либо параметра λ . В гладких системах о наличии и типе бифуркации можно судить по корням характеристического уравнения (мультипликаторам) ρ_j ($j = 1, \dots, n$), отслеживая пересечения их годографов с единичной окружностью на комплексной плоскости. В негладкой системе (1.1) мультипликаторы могут изменяться скачком, «перепрыгивая» через единичную окружность. Будем называть *разрывной бифуркацией* качественные изменения фазового портрета, сопутствующие разрывам хотя бы одной из функций $\rho_j(\lambda)$.

Пусть $x^*(t)$ — некоторое решение системы (1.1), пересекающее при $t = t^*$ многообразие Ξ , то есть при $t < t^*$ выполнено

$$H(x^*(t)) > 0, \quad \frac{dx^*}{dt} = f_+(x^*, t), \quad (1.2)$$

а при $t > t^*$

$$H(x^*(t)) < 0, \quad \frac{dx^*}{dt} = f_-(x^*, t) \quad (1.3)$$

(значение $dx^*(t^*)/dt$ не определено). Тогда вариация $y = x - x^*$ для $t < t^*$ допускает оценку

$$y(t) = Y(t)y_0 + o(\|y_0\|), \quad y_0 = y(t_0), \quad (1.4)$$

где фундаментальная матрица решений $Y(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному матричному уравнению

$$\dot{Y}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f_+(x^*(t), t)Y(t), \quad Y(t_0) = I_n, \quad (1.5)$$

где I_n — единичная матрица (аналогичная формула с заменой f_+ на f_- справедлива и для $t > t^*$, если $t_0 > t^*$).

Пусть выполнены условия трансверсальности пересечения вида

$$H_x f_+ \neq 0, \quad H_x f_- \neq 0, \quad H_x = \text{grad } H(x), \quad (1.6)$$

где H_x — вектор-строка, а f_{\pm} — векторы-столбцы. Тогда в момент пересечения матрица $Y(t)$ меняется скачком в соответствии с формулой [3]

$$Y(t^* + 0) - Y(t^* - 0) = \frac{(f_- - f_+) H_x}{H_x f_+} Y(t^* - 0) \quad (1.7)$$

(здесь числитель дроби — квадратная матрица, а знаменатель — скаляр).

Если имеется τ — периодическое движение с одним или несколькими пересечениями поверхности разрыва, удовлетворяющими условиям (1.6), то его мультипликаторы ρ_j ($j = 1, \dots, n$) — это собственные значения матрицы монодромии $Y(t_0 + \tau)$, удовлетворяющей уравнениям (1.5) с условиями разрыва (1.7). При наличии зависимости правой части системы (1.1) от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ данное периодическое решение допускает продолжение по параметру до тех пор, пока

$$|\rho_j| \neq 1 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.8)$$



Хотя бы одно из неравенств (1.8) обращается в равенство, имеет место бифуркация, причем в типичном случае один из мультипликаторов равен единице или минус единице, либо пара комплексно-сопряженных мультипликаторов по модулю равна единице [4].

Важно отметить, что при сделанных предположениях функции $\rho_k(\lambda)$ ($k = 1, \dots, n$) непрерывны, поэтому наличие разрыва правых частей в (1.1) несущественно. Иная ситуация возникает при нарушении условий трансверсальности (1.6), то есть касании периодической траектории и поверхности разрыва Ξ . При этом формула (1.7) не применима, так как знаменатель обращается в нуль. К наиболее драматическим последствиям приводит эволюция такой траектории, которая для значений $\lambda < \lambda_0$ целиком лежит в области $H(x) > 0$, а при $\lambda < \lambda_0$ имеет точку касания с Ξ . Если допустить, что для $\lambda > \lambda_0$ часть траектории проходит в области $H(x) < 0$, то некоторые мультипликаторы в силу (1.7) бесконечно велики. Примером такой ситуации служат виброударные системы в процессе перехода от безударного режима к движениям с периодическими ударами. Соответствующая бифуркация рассмотрена в [5].

Ниже изучается более «мягкая» ситуация: будем предполагать, что существует конечный предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} \frac{(f_- - f_+) H_x}{H_x f_+} Y(t^* - 0) = \Delta Y. \quad (1.9)$$

В этом случае формальное применение соотношения (1.7) приводит к скачкообразному изменению мультипликаторов при $\lambda = \lambda_0$. Строго говоря, при этом нельзя судить о поведении рассматриваемого периодического движения даже в том случае, когда все мультипликаторы лежат при $\lambda < \lambda_0$ внутри единичного круга и остаются в нем при $\lambda > \lambda_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На первый взгляд, условие (1.9), подразумевающее стремление к нулю всех элементов квадратной матрицы размерности n , весьма ограничительно и не имеет практического значения. На самом же деле оно выполнено, в частности, для случая так называемой бифуркации «касание-скольжение», подразумевающей наличие у траекторий при $\lambda > \lambda_0$ исчезающе малых (при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$) участков, проходящих по поверхности разрыва Ξ . В этом случае

$$f_- = f_+ + \alpha H_x^T, \quad \alpha = \max \{0, -H_x f_+ / H_x^2\}. \quad (1.10)$$

В определении (1.10) параметр α имеет смысл множителя Лагранжа для идеальной односторонней связи $H \geq 0$. Участок скольжения оканчивается, когда величина $H_x f_+(t, x)$ меняет знак с минуса на плюс. Подстановка формулы (1.10) в (1.9) дает

$$\Delta Y = -\frac{H_x^T H_x}{H_x^2} Y(t^* - 0), \quad (1.11)$$

то есть сингулярность отсутствует.

ПРИМЕР 1. Уравнения вертикального движения тяжелой частицы на вибрирующей платформе имеют вид

$$\ddot{q} = -g, \quad q \geq h(t), \quad (1.12)$$

где $q, h(t)$ — вертикальные перемещения частицы и платформы (функция $h(t)$ задана), g — ускорение свободного падения. Для представления в виде (1.1) положим

$$x_1 = q - h(t), \quad x_2 = \dot{x}_1, \quad H(x) = x_1.$$

Будем считать удары неупругими, а область $H(x) < 0$ (формально недостижимую) ассоциировать с фазой контакта частицы с опорой, при этом к силе тяжести добавится односторонняя реакция опоры:

$$f_+ = (x_2, -g - \ddot{h})^T, \quad f_- = \left(0, \max \{0, -g - \ddot{h}\}\right)^T.$$

При выполнении в момент удара неравенства $g + \ddot{h} < 0$ в формуле (1.7) получаем

$$\Delta Y = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y(t^* - 0) \Rightarrow Y(t^* + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t^* - 0).$$

ПРИМЕР 2. Известная модель фрикционных автоколебаний (ползун на ленте) описывается системой [6, 7]

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = F(t, q, v) + T(u - v), \quad (1.12)$$

где F — активная сила, T — сила сухого трения, $u = \text{const}$ — скорость ленты. В этом примере $H = u - v$, а область $H < 0$ сопоставим совместному движению ползуна и ленты без проскальзывания,

$$x = (q, v)^T, \quad H_x = (0, -1), \quad f_+ = (v, F - T)^T, \quad f_- = (v, 0)^T. \quad (1.13)$$

В формуле (1.10) имеем $\alpha = T - F$, а в формуле (1.11)

$$\Delta Y = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y(t^* - 0) \Rightarrow Y(t^* + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t^* - 0). \quad (1.14)$$

К настоящему времени имеется значительное число публикаций, посвященных бифуркациям в негладких системах (см. обзор [8], монографию [2]). В основном исследования имеют численный характер и сводятся к построению фазовых портретов для различных значений параметров. Среди аналитических результатов можно выделить построение нормальной формы для различных типов бифуркаций со скольжением [9, 10].

Данная работа посвящена исследованию разрывных бифуркаций путем их редукции к последовательности стандартных бифуркаций: седло-узел, удвоение периода, Хопфа.

2. Метод «ступенчатого сглаживания»

Будем обозначать символом M_1 систему (1.1), (1.10). Наряду с ней, рассмотрим однопараметрическое семейство систем M_γ , определяемых той же формулой (1.1), причем

$$f_- = f_+ + \alpha\gamma H_x^T, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

В граничном случае $\gamma = 1$ получаем систему M_1 , а система M_0 не имеет разрыва. Каждая из систем M_γ в интервале $\gamma \in (0, 1)$ имеет разрыв на поверхности Ξ , причем разность между функциями (1.10) и (2.1) в каждой точке стремится к нулю при $\gamma \rightarrow 1$. Это обстоятельство поясняет термин «ступенчатое сглаживание». Будем считать, что в некоторой области расширенного фазового пространства системы (1.1) выполнены неравенства

$$\|x\| \leq X, \quad \|x_\gamma\| \leq X, \quad \left\| \frac{\partial f_+}{\partial x} \right\| \leq C_1, \quad \|H_x\| \leq D_1, \quad \|H_{xx}\| \leq D_2, \quad (2.2)$$

где $\|\bullet\|$ обозначает евклидову норму вектора (матрицы). Установим свойства траекторий $x_\gamma(t)$ системы M_γ .



Теорема 1. Для любых $t_0 \in \mathbb{R}, \tau > 0, \gamma \in [0, 1]$ отображение

$$P_\gamma: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad P_\gamma(x_\gamma(t_0)) = x_\gamma(t_0 + \tau) \tag{2.3}$$

непрерывно по параметру γ . Кроме того, если траектория $x_\gamma(t)$ не имеет в интервале $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ касаний поверхности переключения Ξ , то производная отображения (2.3) также непрерывна по γ .

Доказательство. Для оценки разности решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ систем M_{γ_1} и M_{γ_2} введем функцию

$$d(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|. \tag{2.4}$$

Производную по времени от функции (2.4), выражаемую формулой

$$\dot{d}(t) = (x_1(t) - x_2(t), \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) / d(t), \tag{2.5}$$

оценим для четырех возможных случаев расположения траекторий.

1) $H(x_1(t)) > 0, H(x_2(t)) > 0$, тогда

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| = \|f_+(x_1(t)) - f_+(x_2(t))\| \leq C_1 \|x_1(t) - x_2(t)\|.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{d}(t) \leq C_1 d(t). \tag{2.6}$$

2) В случае $H(x_1(t)) \leq 0, H(x_2(t)) \leq 0$ имеем

$$\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) = f_+(x_1(t)) - f_+(x_2(t)) + \alpha\gamma_1 H_x^T(x_1(t)) - \gamma_2\alpha H_x^T(x_2(t)).$$

Добавляя и вычитая в правой части данной формулы слагаемое $\gamma_2\alpha H_x^T(x_1(t))$, придем к оценке

$$\dot{d}(t) \leq (C_1 + \alpha\gamma_2 D_2) d(t) + \alpha(\gamma_1 - \gamma_2) X D_1. \tag{2.7}$$

3) Если $H(x_1(t)) > 0, H(x_2(t)) \leq 0$, то

$$\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) = f_+(x_1(t)) - f_+(x_2(t)) - \gamma_2\alpha H_x^T(x_2(t)).$$

По формуле Тейлора,

$$H(x_1) = H(x_2) + (x_1 - x_2, H_x^T(x_2)) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) H_{xx}(\xi)(x_1 - x_2)^T,$$

где точка ξ лежит на сегменте, соединяющем x_1 и x_2 . Так как в рассматриваемом случае $H(x_1) > H(x_2)$, то

$$(x_1 - x_2, -H_x^T(x_2)) \leq \frac{1}{2}(x_1 - x_2) H_{xx}(\xi)(x_1 - x_2)^T.$$

Следовательно,

$$\dot{d}(t) \leq (C_1 + X D_2) d(t). \tag{2.8}$$

4) Случай $H(x_1(t)) \leq 0, H(x_2(t)) > 0$ аналогичен предыдущему; здесь также выполняется неравенство (2.8).

Объединяя формулы (2.6)–(2.8), приходим к соотношению

$$\dot{d}(t) \leq A d(t) + (\gamma_1 - \gamma_2) B, \quad A = C_1 + D_2 \max\{\alpha\gamma_2, X\}, \quad B = \alpha X D_1. \tag{2.9}$$



Согласно неравенству Гронуолла [4], из формулы (2.9) следует, что

$$d(t_0 + \tau) \leq (d(t_0) + B(\gamma_1 - \gamma_2)/A) \exp \{A\tau\}. \quad (2.10)$$

Тем самым свойство непрерывности доказано.

Дифференцируемость отображения (2.3) следует из формул (1.5), (1.11), описывающих изменение фундаментальной матрицы решений. При обратном пересечении поверхности Ξ выполнено неравенство $f_+ H_x \geq 0$, в определении (1.10) $\alpha = 0$, и разрыва матрицы Y не происходит. В тех точках $x(t_0)$, из которых выходят траектории, касающиеся поверхности переклочки Ξ , производная $Y(\tau)$ отображения (2.3) имеет скачкообразный разрыв: из любой окрестности точки $x(t_0)$ исходят как траектории, пересекающие Ξ (при этом матрица Y меняется скачком по формуле (1.11)), так и траектории, минуящие эту поверхность.

Следствие. Допустим, что при некотором $\gamma_0 \in [0, 1]$ система M_{γ_0} допускает периодическое движение гиперболического типа, то есть мультипликаторы удовлетворяют неравенствам (1.8). Тогда решениями того же периода обладают и системы M_γ для всех γ в окрестности γ_0 , размеры которой определяются условиями гиперболичности (1.8).

Справедливость данного утверждения следует из теоремы о неявной функции.

Допустим, что правая часть системы (1.1) 2π -периодична по t и гладким образом зависит от параметра $\mu \in \mathbb{R}$. При значениях μ , близких к нулю, система допускает решение $\tilde{x}(t, \mu)$ с периодом τ , кратным 2π , причем для значения $\mu = 0$ траектория $\tilde{x}(t, 0)$ касается Ξ в момент $t = t_0$, а для $\mu < 0$ в окрестности значения $t = t_0$ не имеет с Ξ общих точек. Функция f_- определяется по формуле (1.10), тогда при попадании на поверхность Ξ траектория будет оставаться на ней («скользить») до тех пор, пока выполнено неравенство $H_x f_+ \leq 0$.

Рассмотрим вспомогательную систему M_γ , определенную в окрестности момента $t = t_0$ формулой (2.1). Она характеризуется двумя параметрами: γ и μ , причем при $\mu \leq 0$ система M_γ имеет то же самое периодическое решение $\tilde{x}_\gamma(t, \mu) = \tilde{x}(t, \mu)$. Для того чтобы найти периодические решения системы $M_1 = M$ при $\mu > 0$, можно начать с гладкой системы M_0 , в динамике которой при $\mu = 0$ качественных изменений не происходит. Затем плавно увеличиваем параметр γ от нуля до единицы, отслеживая при этом стандартные бифуркации, связанные с нарушением одного из неравенств (1.8).

3. Анализ бифуркации «касание-скольжение» в случае $n \leq 2$

Будем считать, что система (1.1) имеет 2π -периодическое решение $x^*(t)$, причем при $\mu = 0$ имеется касание поверхности разрыва Ξ в момент $t = t_0$, а при $\mu < 0$ траектория проходит в окрестности момента t_0 в области $H(x) > 0$. Общие предположения о невырожденности состоят в том, что при $\mu = 0$, $t = t_0$ выполнены неравенства

$$\frac{\partial^2 H(x^*(t))}{\partial t^2} > 0, \quad \frac{\partial H(x^*(t))}{\partial \mu} < 0.$$

В простейшем случае $n = 1$ интегральные кривые всякой гладкой системы на плоскости (t, x) не пересекаются, поэтому для всякого периодического решения $\rho > 0$. При этом неравенство $\rho < 1$ свидетельствует об асимптотической устойчивости, а противоположное неравенство — о неустойчивости.

Теорема 2. В случае $n = 1$ имеется два сценария бифуркации «касание-скольжение»:

1. устойчивое периодическое движение ($\rho < 1$) сохраняется,
2. неустойчивое движение ($\rho > 1$) сливается с некоторым устойчивым движением того же периода (пересекающим Ξ) и исчезает (седло-узел).

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем $H = x$. В соответствии с формулой (1.7), скачок матрицы $Y(t)$ (в данном случае — скалярной), возникающий при $\mu = +0$ в момент пересечения траекторией поверхности Ξ , равносильно умножению этой матрицы в момент $t = t_0$ на величину $1 - \gamma \in [0, 1]$. Затем траектория вторично пересекает поверхность Ξ , уже в противоположном направлении. При этом скачок матрицы $Y(t)$ удобно вычислить по формуле [3]

$$Y(t_0^* + 0) - Y(t_0^* - 0) = \frac{(f_+ - f_-) H_x}{H_x f_+} Y(t_0^* + 0), \quad (3.1)$$

где t_0^* — момент второго пересечения, отличающийся от t_0 на величину, исчезающе малую при $\mu \rightarrow 0$. Из уравнения (3.1) находим

$$Y(t_0^* + 0) = \frac{1}{1 + \gamma} Y(t_0^* - 0) = \sigma Y(t_0 - 0) + \beta(\mu), \quad \sigma = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \in [0, 1]. \quad (3.2)$$

При изменении γ от нуля до единицы величина σ убывает от единицы до нуля. В первом случае мультипликатор убывает до нуля, и бифуркации нет. Заметим, что в граничном случае $\gamma = 1$ для значений $\mu > 0$ в системе нарушается левосторонняя единственность, то есть траектории, попадающие на поверхность Ξ , далее не разделяются.

Во втором случае мультипликатор (при фиксированном $\mu > 0$) также убывает, и при некотором значении $\gamma = \gamma^*$ он становится равным единице, что свидетельствует о стандартной бифуркации седло-узел, то есть об исчезновении обоих решений при $\gamma > \gamma^*$. Чем ближе к нулю фиксированное значение μ , тем ближе к единице бифуркационное значение γ^* . В силу теоремы 1, аналогичное поведение наблюдается при фиксированном γ , близком к единице, и изменении μ вблизи нуля. Следовательно, в системе M при $\mu < 0$ есть еще одно (устойчивое) решение того же периода, имеющее участок скольжения. При $\mu \rightarrow -0$ продолжительность этого участка стремится к нулю. При $\mu = 0$ два решения сливаются, а при $\mu > 0$ исчезают.

Замечание. Утверждение теоремы 2 можно проверить непосредственно, не прибегая к процедуре сглаживания. Для наглядности будем считать, что $H(x) = x - \mu$, а функция f_+ в уравнении (1.1) не зависит от μ . На плоскости (t, x) имеется область $f_+ < 0$, причем периодическая траектория, очевидно, частично проходит внутри этой области, а частично — вне ее (на рис. 1 эта область затенена). В системе имеется два типа траекторий: (i) целиком расположены в области $H(x) > 0$ для $t \in [0, 2\pi]$ (сплошная линия на рис. 1), (ii) включает участок линии $x = \mu$ (прерывистая линия на рис. 1). По предположению, для $\mu < 0$ существует периодическая траектория первого типа, выходящая из точки $(0, x_0)$. Отображение Пуанкаре за период в окрестности x_0 описывается формулой

$$P(x) = x_0 + \rho(x - x_0) + \Delta(x) + o(x - x_0), \quad (3.3)$$

где величина $\Delta(x)$ равна нулю для траекторий первого типа и положительна для траекторий второго типа. Отметим, что все траектории второго типа на линии $x = \mu$ сливаются в одну, поэтому функция $\Delta(x)$ монотонно убывает. Полагая $P(x) = x = x_1$, приведем формулу (3.3) к виду

$$\Delta(x_1) = (x_1 - x_0)(1 - \rho). \quad (3.4)$$

В случае $\rho < 1$ периодическое движение второго типа существует при $x_1 > x_0$ (в силу отмеченной монотонности функции $\Delta(x)$), то есть при $\mu > 0$. В случае $\rho > 1$ необходимо $x_1 < x_0$, причем в силу монотонности уравнение (3.4) имеет единственное решение.

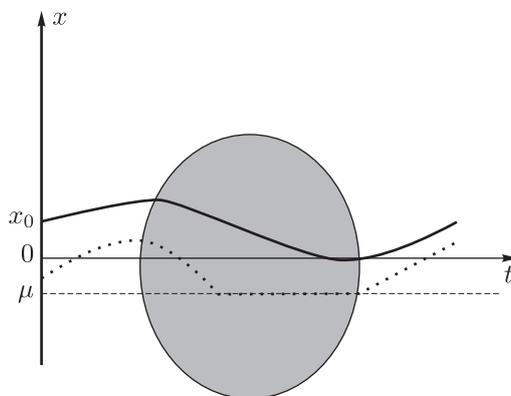


Рис. 1.

ПРИМЕР. Изменение скорости v твердого тела (единичной массы), движущегося по ступатательно по горизонтальной шероховатой плоскости под действием периодической силы $f(t)$, описывается уравнением

$$\dot{v} = \begin{cases} f(t) - F(v), & v > 0, \\ 0, & v = 0, \quad |f(t)| \leq F(0), \\ f(t) + F(-v), & v < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $F(v)$ — сила трения. Предполагается, что эта сила зависит от модуля скорости скольжения и направлена противоположно этой скорости. Допустим, что система (3.5) имеет периодическое решение $v = v^*(t) > 0$. Уравнение в вариациях (1.5) имеет вид

$$\dot{Y} = -F'(v^*(t))Y, \quad Y \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) легко интегрируется, и для мультипликатора мы получаем следующую формулу:

$$\rho = \exp \left\{ - \int_0^{2\pi} F'(v^*(t)) dt \right\}. \quad (3.7)$$

Величина (3.7) может быть как больше, так и меньше единицы в зависимости от конкретного вида функции $F(v)$ и решения $v^*(t)$. В частности, в [6] для объяснения автоколебаний тормозной колодки использовалась зависимость $F(v)$, включающая участки убывания и возрастания. При этом интеграл в формуле (3.7) может быть как положительным, так и отрицательным.

К случаю $n = 1$ можно также свести автономные системы второго порядка, при этом понятие устойчивости заменяется на орбитальную устойчивость [4]. С этой целью следует ввести в окрестности рассматриваемой замкнутой орбиты переменные действие–угол либо построить отображение Пуанкаре. В итоге все эти траектории будут иметь период 2π по угловой переменной. Мы приходим к следующему выводу.

Следствие. В случае $n = 2$ при отсутствии явной зависимости правой части системы (1.1) от времени имеется два сценария бифуркации «касание-скольжение»:

1. орбитально устойчивое периодическое движение сохраняется,
2. орбитально неустойчивое движение сливается с некоторым орбитально устойчивым движением и исчезает.

Перейдем к рассмотрению общего случая $n = 2$ (при наличии зависимости от времени). В этом случае непосредственное исследование решений системы (1.1) не представляется возможным, и целесообразно использование метода, описанного в разделе 2. Выберем для построения матрицы фундаментальных решений (1.5) в качестве начального момента t_0 касания ограничителя (при $\mu = 0$). Будем считать, что $H(x) = x_2$ и обозначим y_{ij} ($i, j = 1, 2$) элементы матрицы $Y(t_0 + 2\pi)$.

Теорема 3 ([7]). Допустим, что рассматриваемое периодическое движение асимптотически устойчиво при $\mu \rightarrow -0$. Тогда для достаточно малых значений $\mu > 0$ имеют следующие сценарии:

1. если $|y_{11}| < 1$, то устойчивое решение сохраняется и включает интервалы скольжения,
2. если $y_{11} > 1$, то система не имеет 2π -периодических решений, переходящих в данное решение при $\mu \rightarrow +0$,
3. если $y_{11} < -1$, то данное периодическое решение сохраняется, но становится неустойчивым. В зависимости от нелинейных членов в уравнениях движения, возможно рождение устойчивых решений периода $2^{k+1}\pi$, $k \in N$, либо хаотического аттрактора.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему M_γ , определенную формулой (2.1). Если $\gamma = 0$, то правая часть системы (1.1) непрерывна, и бифуркации при изменении параметра μ от отрицательных до положительных значений не происходит. Следовательно, при малых $\mu > 0$ обсуждаемое устойчивое периодическое решение сохраняется, причем соответствующая матрица монодромии — это $Y(t_0 + 2\pi) = \|y_{ij}\|$. Обозначим S и Δ след и определитель этой матрицы. Как было показано Ляпуновым, условия устойчивости $|\rho_{1,2}| < 1$ равносильны системе неравенств

$$|S| - 1 < \Delta < 1. \tag{3.8}$$

На плоскости (S, Δ) условия (3.8) задают треугольник, а устойчивое периодическое решение изображается точкой внутри этого треугольника (рис. 2). При увеличении параметра γ от нуля матрица $Y(t_0 + 2\pi)$ изменяется в соответствии с формулой (1.7). Подставляя в эту формулу определение (2.1), получим

$$\Delta Y = -\gamma \frac{H_x^T H_x}{H_x^2} Y(t_0 + 2\pi) = -\gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y(t_0 + 2\pi - 0).$$

Повторное пересечение поверхности Ξ приводит к скачку, описываемому формулой (3.1), откуда окончательно получаем

$$Y(t_0 + 2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} Y(t_0 + 2\pi - 0). \tag{3.9}$$



Согласно формуле (3.9), лишь вторая строка матрицы $Y(t_0 + 2\pi)$ зависит от σ , причем линейным образом. Поэтому на плоскости (S, Δ) формула описывает отрезок прямой линии, начинающийся в точке внутри треугольника и оканчивающийся в точке $(y_{11}, 0)$ (см. рис. 2).

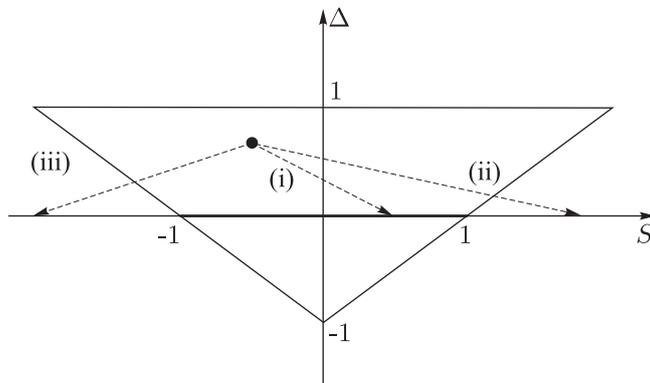


Рис. 2.

В случае (i) весь отрезок лежит внутри треугольника, в случае (ii) он пересекает правую его границу, соответствующую бифуркации седло-узел ($\rho_1 = 1$), а в случае (iii) — левую границу, соответствующую бифуркации «удвоение периода» ($\rho_1 = -1$). Применяя следствие из теоремы 1, приходим к сформулированному утверждению.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда исходное периодическое движение неустойчиво, сценарии бифуркации более разнообразны ввиду повторных пересечений изображающей прямой с границами треугольника устойчивости. На рисунке 3 пересечение верхней границы $\Delta = 1$ свидетельствует о бифуркации Хопфа: периодическое движение становится устойчивым, при этом в зависимости от нелинейных членов рождается неустойчивое либо исчезает устойчивое квазипериодическое движение. С ростом параметра γ прямая может попасть в интервал $(-1, 1)$ оси абсцисс; в этом случае бифуркация «касание-скольжение» в исходной системе (1.1) приводит к рождению устойчивого периода 2π . В противном случае движение либо исчезает (рис. 3а), либо проходит через одно или несколько удвоений периода (рис. 3б). Если прямая пересекает две боковых стороны треугольника, то решений периода 2π при $\mu > 0$ нет, однако в варианте «слева направо» (рис. 3а) могут появиться движения удвоенного периода.

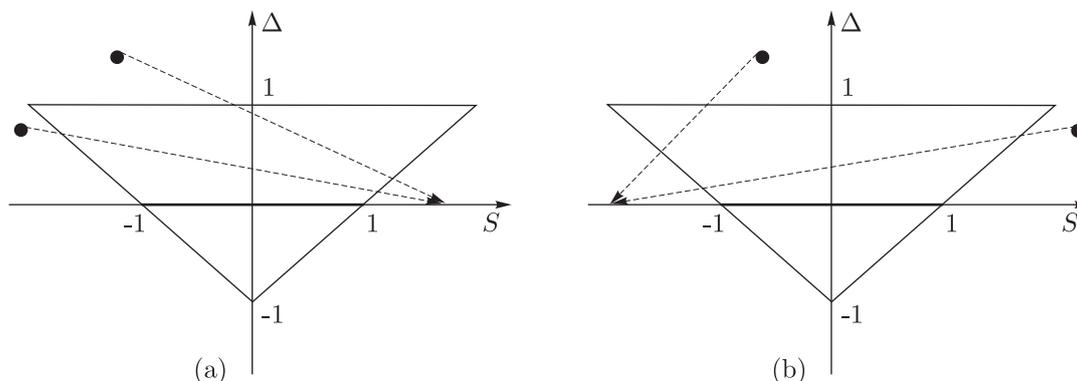


Рис. 3.

4. Случай $n > 2$

Представленный выше подход к исследованию разрывных бифуркаций применим и для систем большей размерности. Для этого нужно прежде всего составить характеристическое уравнение

$$\det(Y(t_0 + 2\pi - 0) - \rho E_n) = (-1)^n(\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \dots + a_1\rho + a_0) = 0, \quad (4.1)$$

затем построить область устойчивости в n -мерном пространстве коэффициентов уравнения (4.1). Определив положение начальной ($\mu = -0$) и конечной ($\mu = +0$) изображающих точек в этом пространстве, соединяем их прямолинейным отрезком.

Важно отметить, что границы области устойчивости, соответствующие бифуркациям седло-узел ($\rho = 1$) и удвоения периода ($\rho = -1$) всегда представляют собой гиперплоскости, поэтому прямолинейный отрезок может пересечь их лишь единожды. В то же время граница, соответствующая бифуркации Хопфа, криволинейна, причем область устойчивости невыпукла. Тем не менее, если и начальная, и конечная точка лежат в области устойчивости, то соединяющий их прямолинейный отрезок может пересечь эту криволинейную границу четное число раз, причем при каждом пересечении периодическое движение сохраняется, но меняет устойчивость. Следовательно, устойчивость в итоге сохраняется.

Для построения области устойчивости можно использовать критерий Шура–Кона или его модификации [11]. Альтернативой может служить критерий Рауса–Гурвица в сочетании с дробно-линейной заменой

$$\rho = \frac{1+z}{1-z}, \quad (4.2)$$

переводящей внутренность единичного круга на комплексной плоскости в левую полуплоскость. Ограничимся обсуждением случая $n = 3$.

Замена (4.2) приводит уравнение (4.1) к виду

$$\begin{aligned} b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 &= 0, \\ b_3 &= 1 - a_2 + a_1 - a_0, & b_2 &= 3 - a_2 - a_1 + 3a_0, \\ b_1 &= 3 + a_2 - a_1 - 3a_0, & b_0 &= 1 + a_2 + a_1 + a_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Условия устойчивости для многочлена третьего порядка имеют вид

$$b_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad b_1 b_2 - b_0 b_3 > 0. \quad (4.4)$$

Первая группа неравенств (4.4) описывает полупространства в пространстве коэффициентов a_j ($j = 0, 1, 2$). Последнее неравенство, как нетрудно проверить, описывает область, ограниченную гиперболическим параболоидом.

Допустим, что в уравнении (1.1) $H(x) = x_3$. Тогда по аналогии с (1.14) имеем

$$Y(t_0 + 2\pi + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t_0 + 2\pi - 0). \quad (4.5)$$

Составляя характеристическое уравнение для матрицы $Y(t_0 + 2\pi + 0)$, найдем конечное положение изображающей точки. Так как эта матрица вырождена, то эта точка лежит в плоскости $a_0 = 0$. Коэффициенты a_1 и a_2 в области устойчивости связаны неравенствами, аналогичными (3.8):

$$|a_2| - 1 < a_1 < 1. \quad (4.6)$$

5. Пример: ползун на ленте

Применим полученные результаты к известной и популярной системе «ползун на ленте», кратко упомянутой в разделе 1 (см. рис. 4). Прообраз этой системы — тормозная колодка [6], представляющая собой цилиндр (колодка), охватывающий вращающийся вал и связанный с неподвижной стенкой пружиной, ограничивающей его вращение; при этом $F(t) \equiv 0$. Задача о колодке допускает стационарное решение, при котором угол ее поворота постоянен, а сила трения уравнивается упругой силой пружины. Наблюдаемый на практике «визг» тормозов свидетельствует о неустойчивости стационарного решения и возникновении автоколебаний. Данное явление объяснено в [6] наличием зависимости силы трения от скорости скольжения (штрибек-эффект), примерный график которой изображен на рисунке 5. Если скорость движения ленты (или скорость точек на поверхности вала) u больше значения u_0 , соответствующего минимуму силы трения, то стационарное движение устойчиво. Равенство $u = u_0$ соответствует бифуркации Паункаре–Андронova–Хопфа [4], а при значениях $u < u_0$ (достаточно близких к u_0) стационарное движение неустойчиво, зато имеется устойчивое периодическое движение. Уменьшение скорости ленты u приводит к росту амплитуды этого движения до тех пор, пока в некоторые моменты времени скорость скольжения будет обнуляться. Это — бифуркация «касание-скольжение» для автономной системы второго порядка. Согласно следствию из теоремы 2, орбитально устойчивое периодическое решение сохранится, но будет включать в себя промежутки совместного движения ленты и ползуна.

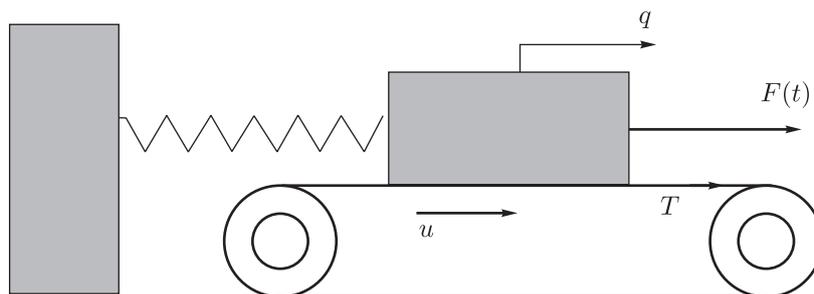


Рис. 4.

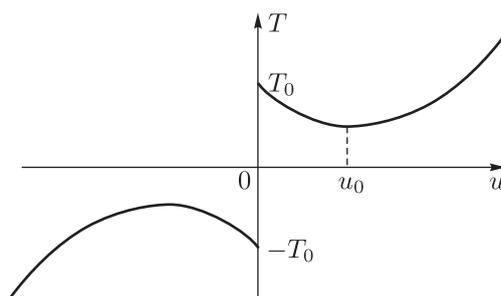


Рис. 5.

Следуя [2, 13], будем считать, что на ползун действует сила, меняющаяся по гармоническому закону, причем

$$u = 1, \quad T = T_0 (\text{sign}(1 - v) - \alpha(1 - v) + \beta(1 - v)^3), \quad F = -q + F_0 \cos \omega t, \quad (5.1)$$

$$\alpha \in (0, 2), \quad \omega \neq 1.$$

Подробный численный анализ системы (5.1) был выполнен в [13]; выявлены оба основных сценария бифуркации: седло-узел и каскад удвоений периода с хаотизацией. В частности, показано, что для значений параметров

$$T_0 = 1.5, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.3, \quad F_0 = 0.1$$

в окрестности значения $\omega = 1.7078$ решение периода $\tau = 8\pi/\omega$ испытывает бифуркацию «касание-скольжение». Численные расчеты показывают [12], что

$$\rho_1 = 0.84, \quad \rho_2 = 0.007, \quad y_{11} = -1.66$$

и система испытывает каскад бифуркаций удвоения периода. Данный результат согласуется с выводами теоремы 3 (случай iii).

Достаточно полное аналитическое исследование можно выполнить в линейном случае $\beta = 0$; считая $T_0 = 1$, запишем систему (5.1) в области $v < 1$ в виде одного уравнения второго порядка:

$$\ddot{q} - \alpha \dot{q} + q = 1 - \alpha + F_0 \cos \omega t, \tag{5.2}$$

где параметром будем считать амплитуду F_0 .

Единственное периодическое решение уравнения (5.2), для которого во все время $v < 1$, имеет период $\tau = 2\pi/\omega$ и описывается формулой

$$q = 1 - \alpha + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \tag{5.3}$$

$$A = \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} F_0, \quad B = \frac{-\alpha \omega}{(1 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} F_0.$$

Условие $\max_t \dot{q} \leq 1$ выражается неравенством

$$\omega F_0 \leq \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}. \tag{5.4}$$

Значение F_0^* , при котором соотношение (5.4) выполнено как равенство, соответствует бифуркации «касание-скольжение».

Уравнение в вариациях для системы (5.2) имеет вид

$$\ddot{y} - \alpha \dot{y} + y = 0,$$

а его общее решение выражается формулой

$$y(t) = \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right) (C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t), \quad \lambda = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}. \tag{5.5}$$

Следовательно, матрица монодромии такова:

$$Y(t_0 + \tau) = \exp\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos \lambda \tau - \frac{\alpha}{2\lambda} \sin \lambda \tau & \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \tau \\ -\frac{1}{\lambda} \sin \lambda \tau & \cos \lambda \tau + \frac{\alpha}{2\lambda} \sin \lambda \tau \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Определитель матрицы (5.6) больше единицы, поэтому решение (5.3) неустойчиво. Далее,

$$\Delta = \exp(\alpha \tau), \quad S = 2 \cos \lambda \tau \exp\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right), \quad y_{11} = \left(\cos \lambda \tau - \frac{\alpha}{2\lambda} \sin \lambda \tau\right) \exp\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right). \tag{5.7}$$



В зависимости от параметров α и τ имеется двенадцать сценариев бифуркации «касание-скольжение», различающихся начальными и конечными положениями изображающей точки на плоскости параметров (S, Δ) . Каждый сценарий складывается из нескольких типичных бифуркаций, последовательность которых зависит от наличия пересечений отрезка, соединяющего эти точки, со сторонами треугольника устойчивости (или их продолжениями). Отметим, что любое пересечение линии $\Delta = S - 1$ или $\Delta = -S - 1$ связано с бифуркацией (седло-узел или удвоение периода соответственно), тогда как бифуркация Хопфа происходит при пересечении линии $\Delta = 1$ лишь внутри промежутка $S \in (-2, 2)$.

1) $\Delta < -S - 1$

а) $y_{11} < -1$ — нет бифуркаций;

б) $|y_{11}| < 1$ — два варианта:

(i) с пересечением верхней границы треугольника: каскад удвоений, все периодические орбиты неустойчивы + бифуркация Хопфа, в итоге основное движение устойчиво,

(ii) линия $\Delta = 1$ пересекается вне треугольника: каскад удвоений, орбиты кратного периода неустойчивы, исходная орбита устойчива;

в) $y_{11} > 1$ — два варианта:

(i) бифуркация Хопфа + седло-узел: исходная орбита исчезает, остается квазипериодическая неустойчивая орбита,

(ii) каскад удвоений + седло-узел;

2) $\Delta > |S| - 1$

а) $y_{11} < -1$ (см. рис. 3б)

(i) бифуркация Хопфа, орбита становится устойчивой + каскад удвоений с возможным рождением хаотического аттрактора,

(ii) каскад удвоений, все орбиты неустойчивы,

б) $|y_{11}| < 1$ — бифуркация Хопфа, исходная орбита становится устойчивой;

в) $y_{11} > 1$

(i) бифуркация Хопфа + седло-узел, остается неустойчивое квазипериодическое движение (см. рис. 3а),

(ii) седло-узел, орбита исчезает;

3) $\Delta < S - 1$:

а) $y_{11} < 1$. Седло-узел, исходная орбита исчезает,

б) $y_{11} > 1$ — бифуркаций нет.

Таким образом, из всех перечисленных сценариев рождение устойчивого периодического решения («визг» тормозов) наблюдается в случаях 1б и 2б. Оба этих случая охватываются системой неравенств

$$|y_{11}| < 1, \quad \Delta > S - 1.$$

Усложним модель, добавляя к ней учет тормозящего действия ползуна на ленту (или колодки на вращающийся вал). К уравнению (5.2) (где u может быть не равным единице) добавится уравнение движения ленты, в итоге получим систему третьего порядка (при скольжении без остановок)

$$\begin{aligned} \ddot{q} - \alpha \dot{q} + q &= 1 - \alpha u + F_0 \cos \omega t, \\ J \dot{u} &= -1 + \alpha u - \alpha \dot{q}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где величина J характеризует инерционные свойства ленты. Ограничимся случаем $J \gg 1$ и воспользуемся результатами раздела 4. Характеристическое уравнение для системы (5.8)

$$\sigma (\sigma^2 - \alpha \sigma + 1) = \frac{\alpha}{J} (\sigma^2 + 1)$$

имеет корни

$$\sigma_1 = \alpha/J + o(1/J), \quad \sigma_{2,3} = \alpha/2 \pm \lambda i + O(1/J), \quad (5.9)$$

где величина λ определяется формулой (5.5). Система (5.8) имеет единственное, причем неустойчивое, решение периода $\tau = 2\pi/\omega$. Уравнения в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \alpha y_2 - y_1 - \alpha y_3, \\ J\dot{y}_3 &= \alpha(y_3 - y_2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Матрица фундаментальных решений для системы (5.10) при учете (5.9) с точностью до $O(1/J)$ имеет вид

$$Y_3(t_0 + \tau) = \|y_{ij}\|_{i,j=1}^3, \quad y_{31} = y_{32} = 0, \quad y_{33} = \exp\left(\frac{\alpha\tau}{J}\right), \quad (5.11)$$

$$y_{13} = \exp\left(\frac{\alpha\tau}{2}\right) \left(\alpha \cos \lambda\tau - \frac{\alpha^2}{2\lambda} \sin \lambda\tau \right) - \alpha \exp\left(\frac{\alpha\tau}{J}\right), \quad y_{32} = -\frac{\alpha}{\lambda} \exp\left(\frac{\alpha\tau}{2}\right) \sin \lambda\tau,$$

причем подматрица $\|y_{ij}\|_{i,j=1}^2$ описывается формулой (5.6). Определяющее уравнение имеет вид

$$(\rho - y_{33})(\rho^2 - S\rho + \Delta) = 0,$$

причем величины S и Δ заданы формулами (5.7). Очевидно, что все три мультипликатора лежат вне единичного круга.

Для выяснения конечного положения изображающей точки в пространстве коэффициентов характеристического уравнения заметим, что поверхность переключений описывается формулой

$$H(x) = x_3 - x_2, \quad x_1 = q, \quad x_2 = \dot{q}, \quad x_3 = u. \quad (5.12)$$

В соответствии с формулой (1.11), для функции (1.10) имеем

$$Y(t_0 + \tau + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} Y(t_0 + \tau - 0). \quad (5.13)$$

Одно из собственных значений матрицы (5.13) (мультипликаторов) равно нулю, а два другие удовлетворяют квадратному уравнению

$$\begin{aligned} \rho^2 + a_2\rho + a_1\rho &= 0, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}(y_{22} + y_{23} + y_{33}), \quad a_1 = \frac{1}{2} \exp(\alpha\tau) + y_{11}y_{33} - \frac{1}{2}y_{13}y_{21}. \end{aligned}$$

Условия возникновения автоколебаний в результате бифуркации «касание-скольжение» состоят из неравенств (4.6) в сочетании с требованием отсутствия пересечения плоскости $b_0 = 0$ (см. (4.3)), равносильному неравенству

$$1 - Tr + \Delta_2 - \det > 0, \quad (5.14)$$

где Tr , Δ_2 , \det — след, сумма угловых миноров второго порядка и определитель матрицы (5.11). Расчет этих величин приводит условие (5.14) к виду

$$1 - 2 \exp\left(\frac{\alpha\tau}{2}\right) \cos \lambda\tau + \exp(\alpha\tau) \left(1 - \exp\left(\frac{\alpha\tau}{J}\right)\right) > 0.$$

6. Выводы

Разработанный в данной статье метод ступенчатого сглаживания позволяет заменить скачкообразное изменение мультипликаторов периодического движения, испытывающего разрывную бифуркацию, на плавное. В пространстве коэффициентов определяющего уравнения это плавное изменение изображается прямолинейным отрезком, соединяющим точки, которые соответствуют значениям до и после скачка. По мере движения по отрезку, изображающая точка может пересекать гиперплоскости, соответствующие основным бифуркациям седло-узел и удвоения периода, и/или криволинейные (вообще говоря) поверхности, соответствующие бифуркации Хопфа. Полученные результаты позволили провести полное аналитическое исследование бифуркации «касание-скольжение» в известной модели тормозной колодки для случая линейной зависимости коэффициента трения от скорости скольжения. Для более сложных законов трения результаты согласуются с данными численного моделирования, полученными другими авторами, причем качественные выводы не требуют трудоемкого построения фазовых портретов.

Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
- [2] di Bernardo M., Budd C., Champneys A. R., Kowalczyk P. Piece-wise smooth dynamical systems. (Appl. Math. Sci., vol. 163.) London: Springer, 2008. 483 pp.
- [3] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Об устойчивости периодических движений // ПММ, 1958, т. 22, № 6, с. 750–758.
- [4] Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. 6th ed. (Appl. Math. Sci., vol. 42.) New York: Springer, 1997. 459 pp. [Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2002. 560 с.]
- [5] Иванов А. П. Аналитические методы в теории виброударных систем // ПММ, 1993, т. 57, № 2, с. 5–21.
- [6] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1956. 915 с.
- [7] Иванов А. П. Основы теории систем с трением. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2011. 304 с.
- [8] di Bernardo M., Budd Ch. J., Champneys A. R., Kowalczyk P., Nordmark A. B., Olivar Tost G., Piironen P. T. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems // SIAM Rev., 2008, vol. 50, no. 4, pp. 629–701.
- [9] di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R. Grazing bifurcations in n -dimensional piece-smooth dynamical systems // Phys. D, 2001, vol. 160, pp. 222–254.
- [10] di Bernardo M., Kowalczyk P., Nordmark A. Bifurcation of dynamical systems with sliding: Derivation of normal-form mappings // Phys. D, 2002, vol. 170, pp. 175–205.
- [11] Хайпер Э., Нёрсетт С., Виннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.



- [12] Тейфель А., Штайндль А., Трогер Х. Классификация негладких бифуркаций для осциллятора с трением // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: Сб. научн. ст., посв. памяти акад. В. В. Румянцева. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 161–175.
- [13] Yoshitake Y., Sueoka A. Quenching of self-excited vibrations by impact damper // Applied nonlinear dynamics and chaos of mechanical systems with discontinuities / M. Wiercigroch, B. de Kraker. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 28.) River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2000. P. 155–176.
- Yoshitake Y., Sueoka A. Forced self-excited vibration with dry friction // Applied nonlinear dynamics and chaos of mechanical systems with discontinuities / M. Wiercigroch, B. de Kraker. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 28.) River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2000. P. 237–260.

Analysis of discontinuous bifurcations in nonsmooth dynamical systems

Alexander P. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology
Insttitutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700, Russia
apivanov@orc.ru

Dynamical systems with discontinuous right-hand sides are considered. It is well known that the trajectories of such systems are nonsmooth and the fundamental solution matrix is discontinuous. This implies the presence of the so-called discontinuous bifurcations, resulting in a discontinuous change in the multipliers. A method of stepwise smoothing is proposed allowing the reduction of discontinuous bifurcations to a sequence of typical bifurcations: saddle-node, period doubling and Hopf bifurcations. The results obtained are applied to the analysis of the well-known system with friction a block on the moving belt, which serves as a popular model for the description of self-excited frictional oscillations of a brake shoe. Numerical techniques used in previous investigations of this model did not allow general conclusions to be drawn as to the presence of self-excited oscillations. The new method makes it possible to carry out a complete qualitative investigation of possible types of discontinuous bifurcations in this system and to point out the regions of parameters which correspond to stable periodic regimes.

MSC 2010: 37G15, 37G25

Keywords: non-smooth dynamical systems, discontinuous bifurcations, oscillator with dry friction

Received March 14, 2012, accepted May 7, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 231–247 (Russian)