



УДК: 531.36

MSC 2010: 34C15, 34C20, 34C23, 34C25

Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой

Б. С. Бардин, А. А. Савин

Рассматривается задача об орбитальной устойчивости плоских периодических движений динамически симметричного тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Предполагается, что центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Невозмущенное периодическое движение представляет собой плоские маятниковые колебания или вращения тела, при которых одна из его главных осей инерции сохраняет неизменное горизонтальное положение.

В окрестности невозмущенного периодического движения введены локальные координаты, и уравнения возмущенного движения записаны в гамильтоновой форме. На основе линейного анализа найдены области орбитальной неустойчивости. Вне указанных областей выполнен нелинейный анализ с учетом членов до четвертой степени включительно в разложении функции Гамильтона в ряд в окрестности невозмущенного движения. Нелинейная задача об орбитальной устойчивости сведена к анализу устойчивости неподвижной точки симплектического отображения, генерируемого системой уравнений возмущенного движения. Коэффициенты симплектического отображения определялись численно. На основе их анализа получены строгие выводы об орбитальной устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения. Орбитальная устойчивость исследована аналитически в двух предельных случаях: колебания с малыми амплитудами и вращения с большими угловыми скоростями, когда удается ввести малый параметр.

Ключевые слова: гамильтонова система, периодические движения, нормальная форма, резонанс, переменные действие–угол, орбитальная устойчивость

Получено 18 мая 2012 года
После доработки 31 мая 2012 года

Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00322) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-4149.2012.1).

Бардин Борис Сабирович
bsbardin@yandex.ru

Савин Александр Александрович
sashka_savin@mail.ru

Кафедра теоретической механики, факультет прикладной математики и физики
Московский авиационный институт
125871, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4



1. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат, ось OZ которой направлена вертикально вверх. С телом жестко связана подвижная система координат $Oxyz$, образованная главными осями инерции тела для точки O ; A , B и C — соответствующие моменты инерции. Будем предполагать, что тело является динамически симметричным $A = C$, а его центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции на расстоянии l от точки O . Без ограничения общности можно считать, что положение центра масс тела в системе $Oxyz$ определяется координатами $x_* = l$, $y_* = z_* = 0$.

Положение твердого тела в неподвижной системе координат $OXYZ$ будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, ϕ . Уравнения движения, описывающие изменение углов Эйлера, определяются следующей функцией Лагранжа:

$$L = \frac{A}{2}(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + \frac{B}{2}(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + \frac{C}{2}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 - mgl \sin \theta \sin \varphi. \quad (1.1)$$

Система уравнений движения допускает частное решение, описывающее плоское движение твердого тела, при котором главная ось инерции Oz сохраняет неизменное горизонтальное положение, а постоянная интеграла площадей равна нулю. На этом движении $\psi = \text{const}$, $\theta = \pi/2$, а изменение угла φ описывается следующим уравнением физического маятника:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \mu^2 \cos \varphi = 0, \quad \mu^2 = mgl/C. \quad (1.2)$$

Таким образом, в данном движении тело либо совершает маятниковые колебания или вращения вокруг оси z , либо асимптотически приближается к положению равновесия.

В настоящей работе исследуется задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела: колебаний и вращений относительно оси Oz . Проекция кинетического момента на вертикаль является первым интегралом, считается невозмущенной и равной нулю.

Заметим, что если, кроме наложенных выше условий, потребовать еще $A = 2B$, то будет иметь место случай Ковалевской, если $A = 4B$, то — случай Горячева–Чаплыгина, а если $A = B$, то — случай Лагранжа со сферическим эллипсоидом инерции. В случае Ковалевской задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений была полностью изучена в [1–4], в случае Горячева–Чаплыгина исследование орбитальной устойчивости выполнено в [5]. В настоящей статье применяется методика, аналогичная использованной в работе [3].

2. Гамильтониан задачи. Невозмущенное движение

Пусть $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ — обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера. Угол ψ является циклической координатой, поэтому импульс p_ψ , представляющий собой проекцию кинетического момента на вертикаль, сохраняет постоянное значение. Далее полагаем $p_\psi = 0$.

Перейдем к новым каноническим переменным по формулам

$$q_1 = \varphi - \frac{3\pi}{2}, \quad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = p_\varphi/\mu C, \quad p_2 = p_\theta/\mu C \quad (2.1)$$

и введем безразмерное время $\tau = \mu t$. Тогда функция Гамильтона будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 [1 + \operatorname{tg}^2 q_2 (\cos^2 q_1 + \nu^2 \sin^2 q_1)] + (\nu^2 - 1) p_1 p_2 \operatorname{tg} q_2 \sin q_1 \cos q_1 + \\ + \frac{1}{2} p_2^2 (\nu^2 \cos^2 q_1 + \sin^2 q_1) - \cos q_2 \cos q_1, \quad \nu^2 = \frac{A}{B} \quad (\nu \geq 1/\sqrt{2}). \quad (2.2)$$

На решениях, отвечающих плоским движениям твердого тела относительно неподвижной оси инерции Oz , изменение переменных q_1, p_1 описывается системой канонических уравнений с гамильтонианом $H^{(0)} = 1/2 p_1^2 - \cos q_1$, а переменные q_2, p_2 принимают нулевые значения. В зависимости от значения константы h интеграла энергии $H^{(0)} = h$ плоские движения являются либо асимптотическими ($h = 1$) к неустойчивому положению равновесия $\varphi = \pi/2$ твердого тела, либо представляют собой периодические движения: колебания ($|h| < 1$) в окрестности устойчивого положения равновесия $\varphi = 3\pi/2$ или вращения ($h > 1$) относительно оси Oz .

Введем переменные I, w , которые являются переменными действие–угол для системы с гамильтонианом $H^{(0)}$, описывающей невозмущенное движение. В случае колебаний каноническая унивалентная замена переменных $q_1, p_1 \rightarrow I, w$ имеет вид [3]

$$q_1 = 2 \operatorname{arcsin}[k_1 \operatorname{sn}(u, k_1)], \quad p_1 = 2k_1 \operatorname{cn}(u, k_1), \quad u = 2\pi^{-1} K(k_1) w, \quad (2.3)$$

где $k_1 = k_1(I)$ — функция, обратная к функции

$$I = 8\pi^{-1} [E(k_1) - (1 - k_1^2) K(k_1)]. \quad (2.4)$$

В случае вращений переменные действие–угол I, w вводятся по формулам [3]

$$q_1 = 2 \operatorname{am}(u, k_2), \quad p_1 = 2k_2^{-1} \operatorname{dn}(u, k_2), \quad u = \pi^{-1} K(k_2) w, \quad (2.5)$$

где $k_2 = k_2(I)$ — функция, обратная к функции

$$I = 4E(k_2)/(\pi k_2). \quad (2.6)$$

В (2.3)–(2.6) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов [6].

В невозмущенном движении

$$I = I_0 = \operatorname{const}, \quad w = \omega \tau + w(0), \quad (2.7)$$

где ω — частота периодического движения. В случае колебаний $\omega = \pi/(2K(k_1))$, а в случае вращений $\omega = \pi/(k_2 K(k_2))$. При этом $k_1(I_0) = \sin(\beta/2)$ (где β — амплитуда плоских колебаний; $0 < \beta < \pi$), $k_2^2(I_0) = 2(1 + h)^{-1}$. Совместно с (2.7) формулы (2.3), (2.5) определяют явную зависимость переменных q_1, p_1 от τ на невозмущенном движении.

3. Гамильтониан возмущенного движения.

Изоэнергетическая редукция

Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$ и разложим гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(w, r_1, q_2, p_2)$ в ряд по q_2, p_2, r_1

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_{2m} + \dots, \quad (3.1)$$

где Γ_{2m} — форма степени $2m$ относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с T -периодическими коэффициентами относительно w , причем $T = \pi$ в случае колебаний и $T = 2\pi$ в случае вращений. Несущественная аддитивная постоянная в (3.1) опущена. Необходимые для дальнейшего анализа формы Γ_2 и Γ_4 имеют вид

$$\Gamma_2 = \omega r_1 + \Gamma_2^{(0)}(q_2, p_2, w), \quad \Gamma_2^{(0)} = f_{20}q_2^2 + f_{11}q_2p_2 + f_{02}p_2^2, \quad (3.2)$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial I} r_1^2 + \frac{\partial \Gamma_2^{(0)}}{\partial I} r_1 + \Gamma_4^{(0)}(q_2, p_2, w), \quad \Gamma_4^{(0)} = f_{40}q_2^4 + f_{31}q_2^3p_2, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} f_{20} &= \frac{1}{2} (p_1^2 (\cos^2 q_1 + \nu^2 \sin^2 q_1) + \cos q_1), \\ f_{11} &= (\nu^2 - 1) p_1 \cos q_1 \sin q_1, \\ f_{02} &= \frac{1}{2} (\nu^2 \cos^2 q_1 + \sin^2 q_1), \\ f_{40} &= \frac{1}{3} (p_1^2 (\cos^2 q_1 + \nu^2 \sin^2 q_1) - \frac{1}{8} \cos q_1), \\ f_{31} &= \frac{1}{3} (\nu^2 - 1) p_1 \cos q_1 \sin q_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В (3.4) величины q_1 и p_1 отвечают невозмущенному движению и определяются по формулам (2.3) и (2.5) в случаях колебаний и вращений соответственно.

Гамильтониан (3.1) зависит от двух параметров: инерционного параметра ν и величины I_0 , которая является параметром семейства траекторий невозмущенного движения. Для дальнейшего анализа будет удобнее вместо I_0 использовать постоянную энергии h плоского невозмущенного движения.

Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений твердого тела эквивалентна задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (3.1) по отношению к переменным q_2, p_2, r_1 .

Для решения вопроса об устойчивости необходимо выполнить нормализацию гамильтониана (3.1), а затем применить соответствующие критерии устойчивости [7]. Заметим, однако, что данные критерии устойчивости совпадают с критериями устойчивости положения равновесия редуцированной системы с одной степенью свободы, описывающей движение на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$. Поэтому далее будем рассматривать возмущенное движение лишь на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущенному движению.

В силу уравнений движения с гамильтонианом (3.1) координата w является возрастающей функцией переменной τ , поэтому в задаче об устойчивости движения она может играть роль времени. Для описания движения на нулевом изоэнергетическом уровне примем координату w за новую независимую переменную. Кроме того, из уравнения $\Gamma = 0$ при малых q_2, p_2, r_1 имеем $r_1 = -K(q_2, p_2, w)$. Функция $K(q_2, p_2, w)$ представляет собой ряд

$$K = K_2 + K_4 + \dots + K_k + \dots, \quad (3.5)$$

K_k — форма степени k относительно q_2, p_2 с T -периодическими по w коэффициентами. Формы K_2 и K_4 имеют следующий явный вид

$$K_2 = \frac{1}{\omega} \Gamma_2^{(0)}(q_2, p_2, w), \quad (3.6)$$

$$K_4 = \frac{1}{\omega} \left[\Gamma_4^{(0)}(q_2, p_2, w) - \frac{\Gamma_2^{(0)}}{\omega} \frac{\partial \Gamma_2^{(0)}}{\partial I} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial I} \left(\frac{\Gamma_2^{(0)}}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Уравнения движения на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$ можно записать в гамильтоновой форме

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, задача об орбитальной устойчивости рассматриваемых плоских периодических движений твердого тела сводится к исследованию устойчивости положения равновесия $q_2 = p_2 = 0$ редуцированной системы (3.8).

4. Анализ устойчивости в линейном приближении

Рассмотрим систему линейных уравнений с гамильтонианом K_2

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{1}{\omega}(f_{11}q_2 + 2f_{02}p_2), \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{1}{\omega}(2f_{20}q_2 + f_{11}p_2). \quad (4.1)$$

Величины f_{11}, f_{20}, f_{02} в (4.1) определяются равенствами (3.4).

Выводы об устойчивости системы (4.1) можно сделать на основании анализа корней ее характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \quad (4.2)$$

где $2\kappa = [x_{11}(T) + x_{22}(T)]$. Функции $x_{11}(w), x_{22}(w)$ — элементы матрицы $\mathbf{X}(w)$ фундаментальных решений системы (4.1), удовлетворяющей начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_2$, где \mathbf{E}_2 — единичная матрица второго порядка.

Если $|\kappa| > 1$, то характеристическое уравнение (4.2) имеет корень с модулем, большим единицы. В этом случае линейная система (4.1) неустойчива [8]. Отсюда, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, следует неустойчивость нелинейной системы (3.8), а следовательно, и орбитальная неустойчивость соответствующего плоского периодического движения. Если же $|\kappa| < 1$, то оба корня характеристического уравнения различны и по модулю равны единице, в этом случае линейная система (4.1) устойчива [8]. Из последнего, однако, не следует устойчивость соответствующей нелинейной системы.

При $|\kappa| = 1$ характеристическое уравнение (4.2) имеет кратный корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$. В этом случае анализа устойчивости линейной системы (4.1) также недостаточно для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости плоских движений твердого тела. При $|\kappa| \leq 1$ вопрос об орбитальной устойчивости плоских периодических движений решается членами не ниже четвертого порядка в гамильтониане (3.5).

В общем случае для определения коэффициента κ требуется численное интегрирование линейной системы (4.1) на интервале $[0, T]$. В настоящей работе численные расчеты коэффициента κ проводились для значений параметров из диапазона $\nu \in [1/\sqrt{2}, 6]$, $h \in [-1, 1) \cup (1, 3]$. На основании проведенных расчетов была построена диаграмма устойчивости (рис. 1).

Плоскость параметров задачи разделяется прямой $h = 1$ на две зоны: зону колебаний ($|h| < 1$) и зону вращений ($h > 1$). Штриховкой показаны области орбитальной неустойчивости, в незаштрихованных областях периодические движения устойчивы в линейном приближении. О кривых, изображенных пунктиром, речь пойдет ниже. В случае колебаний

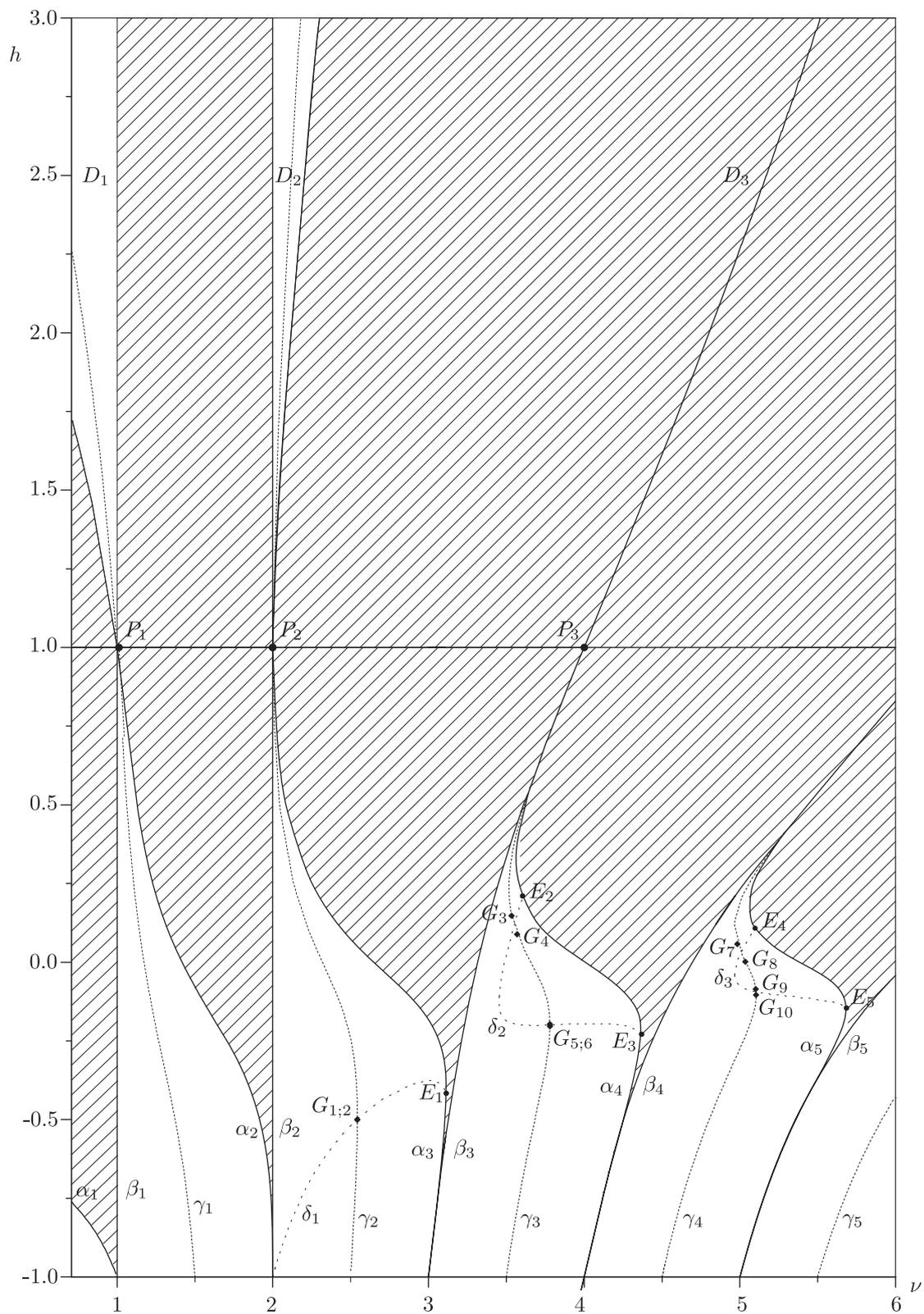


Рис. 1. Области орбитальной устойчивости и неустойчивости.

области орбитальной неустойчивости исходят из точек прямой $h = -1$ с целочисленными координатами по оси ν . С возрастанием h границы смежных областей орбитальной неустойчивости сближаются и пересекаются на границе зон колебаний и вращений в точках $P_1(1, 1)$, $P_2(1, 2)$, $P_3(1, 4)$. Из этих же точек в зону вращений исходят три области орбитальной устойчивости в линейном приближении, обозначенные на диаграмме (рис. 1) через D_1, D_2, D_3 . В той части плоскости параметров ν и h , которая представлена на рисунке 1, область D_3 является очень узкой, поэтому она изображена в виде линии. На самом деле, как показали численные расчеты, эта область имеет ненулевую меру и расширяется с возрастанием h .

5. Исследование устойчивости в предельных случаях

В данной задаче имеется два предельных случая: колебания с малыми амплитудами и вращения с большими угловыми скоростями. В этих случаях удастся ввести малый параметр и выполнить строгое исследование орбитальной устойчивости аналитически.

Рассмотрим сначала колебания с малой амплитудой. В этом случае в качестве малого параметра задачи удобно выбрать величину $k_1 = \sin \beta/2$. Используя известные разложения эллиптических функций [9], из (3.6) и (3.7) имеем

$$K_2 = \frac{1}{2} (q_2^2 + \nu^2 p_2^2) + O(k_1^2), \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} K_4 = & -\frac{1}{192} (72 \cos 2w + 35) q_2^4 - \frac{1}{2} (\nu^2 - 1) \sin 2w p_2 q_2^3 + \\ & + \frac{1}{32} (3\nu^2 - 8 + (8 - 20\nu^2) \cos 2w) p_2^2 q_2^2 - \frac{1}{2} \nu^2 (\nu^2 - 1) \sin 2w p_2^3 q_2 - \\ & - \frac{1}{64} \nu^2 (16 - 15\nu^2 + 16(\nu^2 - 1) \cos 2w) p_2^4 + O(k_1^2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

При $k_1 = 0$ линейная система с гамильтонианом (5.1) является автономной и описывает гармонические колебания с частотой $\Omega_0 = \nu$. Если $\Omega_0 \approx n$ (n — целое число), то при $k_1 \ll 1$ в линейной системе с π -периодическим по w гамильтонианом (5.1) возможно явление параметрического резонанса [10], приводящее к неустойчивости. В плоскости параметров ν и h имеется счетное число областей параметрического резонанса (областей неустойчивости). Указанные области исходят из точек прямой $h = -1$ с целочисленными координатами по оси ν (см. рис. 1).

При достаточно малых амплитудах колебаний уравнения границ областей параметрического резонанса можно получить аналитически. В настоящей работе для этой цели применялась процедура, описанная в [11] и состоящая в следующем.

Выполним сначала каноническую замену переменных по формулам

$$q_2 = \tilde{q}_2 \sqrt{\nu}, \quad p_2 = \frac{\tilde{p}_2}{\sqrt{\nu}}. \quad (5.3)$$

Затем, полагая $\nu \approx n$, при помощи близкого к тождественному, аналитического по k_1 , линейного по \tilde{q}_2, \tilde{p}_2 и π -периодического по w канонического преобразования $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2 \rightarrow q, p$, квадратичную часть K_2 гамильтониана задачи приведем к следующей нормальной форме:

$$\begin{aligned} K_2 = & \frac{1}{2} \lambda (q^2 + p^2) + \frac{1}{2} (a \sin 2nw - b \cos 2nw) (q^2 - p^2) + \\ & + (a \cos 2nw + b \sin 2nw) q p. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В (5.4) слагаемые, явно зависящие от w , представляют собой резонансные члены, отвечающие параметрическому резонансу $\Omega_0 \approx n$. Величины λ, a, b можно получить явно в виде сходящихся по степеням малого параметра k_1 рядов, причем $\lambda = \Omega_0 + O(k_1^2)$. Коэффициенты при любой конечной степени k_1 в этих рядах являются функциями параметра ν ; их явный вид можно определить, например, методом Биркгофа [7, 12] или методом Депри–Хори [13]. В данной работе указанные коэффициенты определялись при помощи метода Депри–Хори с использованием системы аналитических вычислений Maple. Для резонансов $\Omega_0 \approx 1, 2, 3, 4, 5$ были получены явные выражения коэффициентов разложений величин λ, a, b в ряды до степени k_1^{10} включительно. Здесь они не приводятся в силу их громоздкости.

Выполним еще замену переменных, позволяющую исключить явную зависимость K_2 от времени,

$$q = \cos(nt + \phi_0)x + \sin(nt + \phi_0)y, \quad p = -\sin(nt + \phi_0)x + \cos(nt + \phi_0)y, \quad (5.5)$$

где величина ϕ_0 определяется из соотношений $\sin 2\phi_0 = a/d$, $\cos 2\phi_0 = b/d$, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

В новых переменных квадратичная часть гамильтониана задачи примет вид

$$K_2 = \frac{1}{2}(\lambda - n - d)x^2 + \frac{1}{2}(\lambda - n + d)y^2. \quad (5.6)$$

Из вида (5.6) следует, что на границах областей параметрического резонанса выполняются равенства

$$\lambda - n = \pm \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5.7)$$

Подставляя явные разложения для λ, a, b в (5.7), получаем соотношения, связывающие параметры ν и k_1 на границах областей параметрического резонанса. Выражая из указанных соотношений ν , можно получить уравнения границ областей параметрического резонанса в плоскости параметров ν и k_1 (или в плоскости параметров ν и h , если учесть, что $k_1^2 = (h + 1)/2$). Вычисления показывают, что с погрешностью k_1^{12} эти уравнения имеют следующий вид.

Параметрический резонанс $\Omega_0 \approx 1$:

$$\nu = 1 - \frac{3}{2}k_1^2 - \frac{39}{8}k_1^4 - \frac{519}{32}k_1^6 - \frac{29\,145}{512}k_1^8 - \frac{108\,567}{512}k_1^{10},$$

$$\nu = 1.$$

Параметрический резонанс $\Omega_0 \approx 2$:

$$\nu = 2 - \frac{9}{16}k_1^4 - \frac{51}{32}k_1^6 - \frac{3\,489}{1024}k_1^8 - \frac{6\,465}{1024}k_1^{10},$$

$$\nu = 2.$$

Параметрический резонанс $\Omega_0 \approx 3$:

$$\nu = 3 + \frac{5}{12}k_1^2 + \frac{1\,007}{3\,456}k_1^4 - \frac{20\,101}{124\,416}k_1^6 - \frac{1\,790\,034\,607}{1\,433\,272\,320}k_1^8 - \frac{182\,221\,724\,027}{51\,597\,803\,520}k_1^{10},$$

$$\nu = 3 + \frac{5}{12}k_1^2 + \frac{1\,007}{3\,456}k_1^4 + \frac{25\,259}{124\,416}k_1^6 + \frac{185\,587\,793}{1\,433\,272\,320}k_1^8 + \frac{3\,496\,702\,453}{51\,597\,803\,520}k_1^{10}.$$

Параметрический резонанс $\Omega_0 \approx 4$:

$$\nu = 4 + \frac{3}{4}k_1^2 + \frac{471}{640}k_1^4 + \frac{6\,939}{10\,240}k_1^6 + \frac{5\,125\,191}{16\,384\,000}k_1^8 - \frac{219\,270\,807}{262\,144\,000}k_1^{10},$$

$$\nu = 4 + \frac{3}{4}k_1^2 + \frac{471}{640}k_1^4 + \frac{6\,939}{10\,240}k_1^6 + \frac{9\,325\,191}{16\,384\,000}k_1^8 + \frac{106\,049\,193}{262\,144\,000}k_1^{10}.$$

Параметрический резонанс $\Omega_0 \approx 5$:

$$\nu = 5 + \frac{21}{20} k_1^2 + \frac{17961}{16000} k_1^4 + \frac{1974069}{1600000} k_1^6 + \frac{18462048777}{14336000000} k_1^8 + \frac{7343276099361}{7168000000000} k_1^{10},$$

$$\nu = 5 + \frac{21}{20} k_1^2 + \frac{17961}{16000} k_1^4 + \frac{1974069}{1600000} k_1^6 + \frac{18462048777}{14336000000} k_1^8 + \frac{8674544849361}{7168000000000} k_1^{10}.$$

На рисунке 1 границы областей параметрического резонанса обозначены через α_n и β_n ($n = 1, 2, \dots$). На этих границах мультипликаторы линейной системы кратны и равны 1 или -1 , а соответствующие им характеристические показатели $\pm i\Omega$ удовлетворяют соотношению $\Omega = n$, то есть реализуются резонансы первого порядка (n — четное число) или второго порядка (n — нечетное число). В этом случае гамильтониан задачи приводится к виду

$$G = \frac{\delta}{2} X^2 + G_4(X, Y, w, k_1) + O_6, \quad (5.8)$$

где новые канонические переменные X, Y введены по формулам

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2d}}(1 - \delta) X - \frac{\sqrt{2d}}{2}(1 + \delta) Y, \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2d}}(1 + \delta) X + \frac{\sqrt{2d}}{2}(1 - \delta) Y. \quad (5.9)$$

При этом на левых границах α_n следует положить $\delta = -1$, а на правых границах β_n следует положить $\delta = 1$. Форма G_4 получается из формы K_4 в результате последовательности замен, осуществляемых при переходе от переменных q_2, p_2 к переменным X, Y . Коэффициенты формы G_4 аналитически зависят от k_1 и являются периодическими функциями w с периодом π при n четном и периодом 2π при n нечетном. Через O_6 в (5.8) обозначены члены не ниже шестой степени по каноническим переменным X и Y .

На границах областей параметрического резонанса при помощи канонической, близкой к тождественной, аналитической по k_1 и 2π -периодической по w замены переменных $X, Y \rightarrow \xi, \eta$ функцию Гамильтона (5.15) можно привести к нормальной форме

$$G = \frac{\delta}{2} \xi^2 + a_4 \eta^4 + O_6, \quad a_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{04} dw, \quad (5.10)$$

где g_{04} — коэффициент при Y^4 в форме G_4 .

Если $\delta a_4 > 0$, то положение равновесия системы (3.8) устойчиво, если же $\delta a_4 < 0$, то положение равновесия неустойчиво [16].

Вычисления показали, что при $n \geq 3$ на границах α_n, β_n коэффициент a_4 положителен и имеет место следующая асимптотическая оценка

$$a_4 = \frac{5d^2}{8} + O(k_1^2). \quad (5.11)$$

На границах α_1 и α_2 коэффициент a_4 отрицателен, причем $a_4 = -\frac{27}{256} + O(k_1^2)$ на границе α_1 и $a_4 = -\frac{729}{32768} k_1^2 + O(k_1^4)$ на границе α_2 .

Таким образом, в силу упомянутого выше критерия устойчивости положение равновесия системы (3.8) неустойчиво на границах α_n ($n \geq 3$) и устойчиво на границах α_1 , α_2 и β_n ($n \geq 3$).

Границы β_1 и β_2 соответствуют случаям Лагранжа и Горячева–Чаплыгина. В работе [5] было показано, что в случае Горячева–Чаплыгина имеет место так называемая трансцендентная ситуация, когда при нормализации гамильтониана до сколь угодно высокого конечного порядка все коэффициенты нормальной формы, начиная с a_4 , обращаются в нуль. В той же работе было доказано, что в этом случае плоские колебания с произвольной амплитудой и плоские вращения с произвольной угловой скоростью орбитально неустойчивы. Применяя методику работы [5], можно показать, что и в случае Лагранжа имеет место трансцендентная ситуация, которая приводит к орбитальной неустойчивости плоских периодических движений.

Вне областей параметрического резонанса положение равновесия устойчиво в линейном приближении. В этом случае при помощи близкого к тождественному, аналитического по k_1 , линейного по \tilde{q}_2, \tilde{p}_2 и π -периодического по w канонического преобразования $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2 \rightarrow Q, P$ можно исключить зависимость K_2 от w . Это каноническое преобразование можно также построить, например, методом Депри–Хори [13].

В новых переменных Q, P гамильтониан принимает вид

$$F = \frac{1}{2}\Omega(Q^2 + P^2) + F_4(Q, P, w, k_1) + O_6, \quad (5.12)$$

где $\Omega = \Omega_0 + O(k_1^2)$, причем не выписанные явно члены степени k_1^2 и выше не зависят от w . Через O_6 в (5.12) обозначены члены не ниже шестой степени по переменным Q и P , а F_4 — форма четвертой степени по Q и P , коэффициенты которой π -периодически зависят от w и аналитичны по k_1 . Форма F_4 получается из формы K_4 в результате выполнения последовательных замен, осуществляемых при переходе от переменных q_2, p_2 к переменным Q, P .

Чтобы исследовать устойчивость положения равновесия в полной нелинейной системе, необходимо привести гамильтониан (5.12) к нормальной форме до членов четвертой степени и применить известные критерии устойчивости [7].

Помимо рассмотренных выше резонансов первого и второго порядков, в системе с гамильтонианом (5.12) могут реализовываться резонансы более высоких порядков, возникающие при выполнении равенства

$$m\Omega = 2n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m > 2. \quad (5.13)$$

В случае резонанса нормальная форма гамильтониана содержит дополнительные (резонансные) члены, поэтому резонансные случаи следует рассматривать отдельно. При нормализации гамильтониана до членов не выше четвертой степени по каноническим переменным Q и P необходимо учитывать лишь резонансы до четвертого порядка включительно ($m \leq 4$). Резонансы более высокого порядка в данном приближении не проявляются.

Заметим еще, что функция Гамильтона (5.12) не содержит членов третьей степени, а следовательно, при выполнении резонансного соотношения $3\Omega = 2n$, ее нормальная форма, вычисленная до членов четвертой степени включительно, не содержит членов, отвечающих резонансу третьего порядка. Поэтому исследование устойчивости при указанном резонансе можно выполнить в рамках общего нерезонансного случая.

Выполним замену переменных

$$Q = \sqrt{2R} \sin \psi, \quad P = \sqrt{2R} \cos \psi, \quad (5.14)$$

приводящую гамильтониан (5.12) к виду

$$F = \Omega R + R^2 \Phi_4(\psi, w, k_1) + O_6, \quad (5.15)$$

где $\Phi_4(\psi, w, k_1) = F_4(\sqrt{2R} \sin \psi, \sqrt{2R} \cos \psi, w, k_1)/R^2$.

Пусть $m\Omega \neq 2n$, $m = 1, 2, 4$, $n \in \mathbb{N}$, тогда канонической, близкой к тождественной, аналитической по k_1 и π -периодической по w заменой переменных $\psi, R \rightarrow \vartheta, \rho$ функцию Гамильтона (5.15) можно привести к следующей нормальной форме

$$\Gamma = \Omega \rho + c_2 \rho^2 + O_6. \quad (5.16)$$

Коэффициент c_2 вычисляется по формуле

$$c_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi_4(\psi, w, k_1) dw d\psi. \quad (5.17)$$

Вычисления показывают, что

$$c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \nu^2 + O(k_1). \quad (5.18)$$

Если $k_1 = 0$ и $\nu = 2$, то $c_2 = 0$. При $k_1 \neq 0$ условие $c_2 = 0$ определяет кривую, которая при $k_1 \rightarrow 0$ входит в точку $\nu = 2$. На рисунке 1 эта кривая обозначена через δ_1 , она была получена на основании численных расчетов, проведенных в разделе 6. Если $k_1 \ll 1$, то вне кривой δ_1 выполнено условие $c_2 \neq 0$, и, на основании теоремы Арнольда–Мозера [14, 15], положение равновесия системы (3.8) устойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим теперь случай резонанса четвертого порядка, когда $\Omega = n/2$ (причем n — нечетное число). В этом случае канонической, близкой к тождественной, аналитической по k_1 и π -периодической по w заменой переменных $\psi, R \rightarrow \vartheta, \rho$ функцию Гамильтона (5.12) можно привести к следующей нормальной форме:

$$F = \Omega \rho + (c_2 + a_2 \cos(4\psi - 2nw) + b_2 \sin(4\psi - 2nw)) \rho^2 + O_6, \quad (5.19)$$

где c_2 вычисляется по формуле (5.17), а

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi_4(\psi, w, k_1) \cos(4\psi - 2nw) dw d\psi, \\ b_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi_4(\psi, w, k_1) \sin(4\psi - 2nw) dw d\psi. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Положение равновесия устойчиво по Ляпунову, если выполнено неравенство $c_2 > \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$, и неустойчиво, если $c_2 < \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ [7]. Вычисления показывают, что

$$a_2 = O(k_1^2), \quad b_2 = O(k_1^2),$$

поэтому при достаточно малых k_1 неравенство $c_2 > \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ выполнено и положение равновесия системы (3.8) устойчиво по Ляпунову.

Суммируя полученные выше результаты, приходим к следующим выводам. Вне областей параметрического резонанса и вне кривой δ_1 , а также на границах α_1 , α_2 и на границах β_n ($n \geq 3$) плоские маятниковые колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы. На границах α_n ($n \geq 3$) колебания с малыми амплитудами орбитально неустойчивы. На границах β_1 и β_2 плоские колебания с произвольной амплитудой и плоские вращения с произвольной угловой скоростью орбитально неустойчивы. Для значений параметров на кривой δ_1 вопрос об орбитальной устойчивости остается открытым.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда невозмущенное движение представляет собой вращения с достаточно большой средней угловой скоростью. Здесь в качестве малого параметра задачи выберем величину $k_2 = \sqrt{2}(1+h)^{-1/2}$, введенную в разделе 2.

Выполним унивалентную каноническую замену переменных

$$q_2 = \frac{k_2^{1/2}}{\sqrt{2}} x, \quad p_2 = \frac{\sqrt{2}}{k_2^{1/2}} y \quad (5.21)$$

и, аналогично случаю колебаний с малыми амплитудами, выпишем первые члены разложения формы K_2 в сходящиеся при $k_2 \ll 1$ ряды

$$K_2 = \frac{1}{4} (\nu^2 + 1 - (\nu^2 - 1) \cos 2w) x^2 + \frac{1}{2} (\nu^2 - 1) \cos 2w xy + \frac{1}{4} (\nu^2 + 1 + (\nu^2 - 1) \cos 2w) y^2 + O(k_2). \quad (5.22)$$

Каноническая замена переменных

$$x = \xi \sin w + \eta \cos w, \quad y = -\xi \cos w - \eta \sin w \quad (5.23)$$

приводит квадратичную часть гамильтониана к виду

$$K_2 = \frac{1}{2} (\nu^2 - 1) \xi^2 + k_2^2 K_{2,2}(\xi, \eta, w) + k_2^4 K_{2,4}(\xi, \eta, w) + O(k_2^6). \quad (5.24)$$

Явный вид квадратичных форм $K_{2,2}(\xi, \eta, w)$ и $K_{2,4}(\xi, \eta, w)$ в силу громоздкости здесь не приводится. Как и в случае малых колебаний, близкой к тождественной, линейной, аналитической по k_2 и 2π -периодической по w заменой переменных $\xi, \eta \rightarrow y, Y$ можно исключить зависимость K_2 от w . В новых переменных y, Y квадратичная часть (5.24) примет вид

$$K_2 = \frac{1}{2} (\nu^2 - 1) y^2 + \left(-\frac{1}{16} Y^2 + \frac{3}{32} y^2 \nu^2 + \frac{1}{64} Y^2 \nu^2 - \frac{9}{64} y^2 \right) k_2^4 + O(k_2^6). \quad (5.25)$$

При достаточно малых k_2 и $\nu \in (1, 2)$ характеристические показатели линейной системы с гамильтонианом (5.25) вещественны и отличны от нуля. В этом случае по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению имеет место неустойчивость в полной нелинейной системе. Таким образом, вращения с достаточно большой средней угловой скоростью при $\nu \in (1, 2)$ орбитально неустойчивы.

Пусть теперь $\nu \in [\sqrt{1/2}, 1) \cup (2, \infty)$. Выполним еще одну замену переменных

$$y = k_2 Q \sqrt[4]{\frac{\nu^2 - 4}{32(\nu^2 - 1)}}, \quad Y = \frac{P}{k_2} \sqrt[4]{\frac{32(\nu^2 - 1)}{\nu^2 - 4}}, \quad (5.26)$$

которая приводит квадратичную часть к виду

$$F_2 = \frac{1}{2} \Omega_r (P^2 + Q^2) + O(k_2^4), \quad \Omega_r = \frac{1}{\sqrt{32}} \sqrt{(\nu^2 - 4)(\nu^2 - 1)} k_2^2. \quad (5.27)$$

При достаточно малых k_2 величина Ω_r также является малой, и в линейной системе с гамильтонианом (5.27) не возникает резонансов до четвертого порядка включительно. Поэтому канонической, близкой к тождественной, аналитической по k_1 и 2π -периодической по w заменой переменных функцию Гамильтона редуцированной системы (3.8) можно привести к нормальной форме (5.16).

Вычисления показали, что

$$c_2 = -\frac{1}{512} \frac{(-475\nu^2 + 529 + 116\nu^4)(\nu^2 - 1)}{\nu^2 - 4} k_2 + O(k_2^2). \quad (5.28)$$

Коэффициент c_2 вычислялся по формуле (5.17), в которой интегрирование по переменной w выполняется в пределах от 0 до 2π . Поскольку $c_2 \neq 0$, то при достаточно малых k_2 и $\nu \in [\sqrt{1/2}, 1) \cup (2, \infty)$ положение равновесия в полной нелинейной системе устойчиво по Ляпунову. Таким образом, на основании полученных выше результатов, можно сделать следующие выводы: быстрые вращения орбитально устойчивы при $\nu \in [\sqrt{1/2}, 1) \cup (2, \infty)$ и орбитально неустойчивы при $\nu \in (1, 2)$. Это, в частности, означает, что области D_1 и D_2 , изображенные на рисунке 1, продолжают вверх до бесконечности, при этом D_2 неограниченно расширяется с возрастанием h .

6. Нелинейный анализ устойчивости

Строгие выводы об орбитальной устойчивости периодических движений для произвольных значений параметров из областей орбитальной устойчивости в линейном приближении, а также на их границах, можно получить на основании нелинейного анализа с учетом членов не ниже четвертой степени в гамильтониане (3.5).

Нелинейный анализ устойчивости будем проводить, следуя методике, разработанной в [17]. Суть данной методики состоит в построении симплектического отображения, порождаемого системой нелинейных уравнений (3.8), и исследовании устойчивости его неподвижной точки. Задача об устойчивости неподвижной точки данного отображения эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (3.8).

Пусть $q_2^{(0)}, p_2^{(0)}$ — начальные значения переменных q_2, p_2 , а $q_2^{(1)}, p_2^{(1)}$ — их значения при $w = T$. Тогда, согласно [17], искомое симплектическое отображение имеет вид

$$\begin{pmatrix} q_2^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}(T) \begin{pmatrix} q_2^{(0)} - \frac{\partial S_4}{\partial p_2^{(0)}} + O_4 \\ p_2^{(0)} + \frac{\partial S_4}{\partial q_2^{(0)}} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где $S_4 = \Phi_4(q_2^{(0)}, p_2^{(0)}, T)$, а $\Phi_4(q_2^{(0)}, p_2^{(0)}, w)$ — форма четвертой степени, удовлетворяющая равенству

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial w} = -G_4. \quad (6.2)$$

При этом $G_4(q_2^{(0)}, p_2^{(0)}, w)$ — форма, которая получается из $K_4(q_2, p_2, w)$ в результате замены переменных

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(w) \begin{pmatrix} q_2^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где $\mathbf{X}(w)$ — матрицант линейной системы (4.1).

Приравняв коэффициенты при равных степенях в левой и правой частях равенства (6.2), получим пять обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов формы Φ_4 . Правые части этих уравнений зависят от величин $x_{ij}(w)$, которые являются элементами матрицы $\mathbf{X}(w)$ и определяются в результате решения линейной системы (4.1). Таким образом, интегрируя систему из девяти уравнений (пять уравнений для коэффициентов формы Φ_4 и четыре уравнения для величин $x_{ij}(w)$) на интервале $[0, T]$, можно определить значения коэффициентов формы S_4 . В общем случае интегрирование данной системы нужно проводить численно.

Выполним замену переменных

$$q_2 = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p_2 = n_{21}Q + n_{22}P, \quad (6.4)$$

нормализующую линейную часть отображения (6.1). Если $|\varkappa| < 1$, то коэффициенты n_{ij} можно вычислить по формулам [17]

$$n_{11} = x_{12}(T), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = (\varkappa - x_{11}(T)), \quad n_{22} = \sqrt{1 - \varkappa^2}. \quad (6.5)$$

В новых переменных отображение примет вид

$$\begin{pmatrix} Q^{(1)} \\ P^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P^{(0)}} + O_4 \\ P^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q^{(0)}} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где $F_4(Q^{(0)}, P^{(0)}) = cS_4(n_{11}Q^{(0)} + n_{12}P^{(0)}, n_{21}Q^{(0)} + n_{22}P^{(0)})$, а c — валентность канонической замены (6.4), вычисляемая по формуле $c = (n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12})^{-1}$.

Нормализованная линейная часть отображения (6.6) задается матрицей

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

и представляет собой поворот на угол $\gamma = \arccos \varkappa$.

Введем обозначения:

$$\sigma = 3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}, \quad \sigma_1 = f_{22} - f_{40} - f_{04}, \quad \sigma_2 = f_{13} - f_{31},$$

где f_{ij} — коэффициенты формы F_4 .

Пусть в системе (3.8) нет резонансов до четвертого порядка включительно, то есть корни характеристического уравнения (4.2) удовлетворяют неравенству $\rho^k \neq 1$ (где $k \in \{1, 2, 3, 4\}$). При выполнении неравенства $\sigma \neq 0$ неподвижная точка отображения (6.1) устойчива [17]. Если же $\sigma = 0$, то для получения строгих выводов об устойчивости требуется

проводить нелинейный анализ, учитывая члены выше четвертой степени в гамильтониане задачи.

Резонансные случаи требуют отдельного исследования. Наиболее существенными для анализа устойчивости являются резонансы до четвертого порядка включительно [7]. Как уже было отмечено выше, в рассматриваемой задаче функция Гамильтона не содержит членов третьей степени, поэтому исследование устойчивости при резонансе третьего порядка можно выполнить в рамках общего нерезонансного случая. Таким образом, в нашей задаче необходимо отдельно рассмотреть резонансы первого, второго и четвертого порядков.

Резонанс четвертого порядка имеет место на кривых γ_i ($i = 1, 2, \dots$), изображенных на рисунке 1 пунктирными линиями, начинающимися из точек с координатами $(-1, n/2)$ и продолжающимися из зоны колебаний в зону вращений. При резонансе четвертого порядка устойчивость неподвижной точки устанавливается на основании следующего критерия [17]: если выполнено неравенство $|\sigma| > \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, то неподвижная точка устойчива; если же $|\sigma| < \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, то неподвижная точка неустойчива.

Резонансы первого и второго порядков реализуются на границах областей неустойчивости α_n, β_n , причем на границах с четным номером n имеет место резонанс первого порядка, а на границах с нечетным номером n — резонанс второго порядка. Расчеты показали, что во всех точках граничных кривых, изображенных на рисунке 1, элементарные делители матрицы $\mathbf{X}(T)$ непростые. В этом случае нормальная форма линейной части отображения (6.6) задается недиагональной матрицей \mathbf{G} . При резонансе первого порядка [11]

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6.8)$$

а коэффициенты нормализующего преобразования (6.4) вычисляются по следующим формулам:

если $x_{12}(T) \neq 0, x_{21}(T) = 0$, то

$$n_{11} = \sqrt{|x_{12}(T)|}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 0, \quad n_{22} = \sqrt{|x_{12}(T)|}/x_{12}(T),$$

если $x_{12}(T) = 0, x_{21}(T) \neq 0$, то

$$n_{11} = 0, \quad n_{12} = \sqrt{|x_{21}(T)|}/x_{21}(T), \quad n_{21} = \sqrt{|x_{21}(T)|}, \quad n_{22} = 0,$$

если $x_{12}(T)x_{21}(T) \neq 0$, то

$$n_{11} = x_{12}(T), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 1 - x_{11}(T), \quad n_{22} = 1.$$

Если же имеет место резонанс второго порядка, то матрица \mathbf{G} имеет вид [11]

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (6.9)$$

при этом коэффициенты нормализующего преобразования (6.4) вычисляются по следующим формулам:

если $x_{12}(T) \neq 0, x_{21}(T) = 0$, то

$$n_{11} = \sqrt{|x_{12}(T)|}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 0, \quad n_{22} = \sqrt{|x_{12}(T)|}/x_{12}(T),$$

если $x_{12}(T) = 0$, $x_{21}(T) \neq 0$, то

$$n_{11} = 0, \quad n_{12} = \sqrt{|x_{21}(T)|}/x_{21}(T), \quad n_{21} = \sqrt{|x_{21}(T)|}, \quad n_{22} = 0,$$

если $x_{12}(T)x_{21}(T) \neq 0$, то

$$n_{11} = x_{12}(T), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = -(1 + x_{11}(T)), \quad n_{22} = 1.$$

На граничных кривых (за исключением β_1 и β_2 , где возникает особая трансцендентная ситуация, рассмотренная в предыдущем разделе) вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения решается на основании следующего критерия. При резонансе первого порядка неподвижная точка устойчива, если $f_{40} < 0$, и неустойчива, если $f_{40} > 0$. При резонансе второго порядка неподвижная точка устойчива, если $f_{40} > 0$, и неустойчива, если $f_{40} < 0$. В случае $f_{40} = 0$ вопрос об устойчивости решается членами выше четвертой степени в гамильтониане задачи.

Для произвольных значений параметров из областей устойчивости в линейном приближении, изображенных на рисунке 1, а также на их границах расчет коэффициентов отображения (6.6) проводился численно. Исключение составляет лишь узкая область D_3 , в которой коэффициенты отображения (6.6) не вычислялись и нелинейный анализ устойчивости не проводился. Расчеты показали, что в областях устойчивости в линейном приближении величина σ обращается в нуль только на кривых $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, которые в дальнейшем будем называть кривыми вырождения. Таким образом, вне указанных кривых и вне кривых γ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), отвечающих резонансам четвертого порядка, плоские периодические колебания и вращения орбитально устойчивы.

На основании приведенного выше критерия об устойчивости в случае резонанса четвертого порядка были получены следующие выводы об орбитальной устойчивости периодических движений на резонансных кривых γ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). На кривой γ_1 и кривой γ_5 , в той ее части, которая изображена на рисунке 1, плоские колебания и вращения орбитально устойчивы. На кривых $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ в окрестности точек их пересечения с кривыми вырождения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ имеются небольшие участки, где плоские колебания орбитально неустойчивы. Эти участки ограничены точками G_j ($j = 1, \dots, 10$), координаты которых приведены в таблице 1. Вне указанных участков плоские колебания и вращения орбитально устойчивы. Отметим, что участки, ограниченные точками G_1, G_2 и G_5, G_6 , очень малы, поэтому на рисунке 1 для них применяются обозначения $G_{1;2}$ и $G_{5;6}$ соответственно.

Таблица 1

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}
ν	2.544	2.544	3.535	3.569	3.780	3.780	4.983	5.035	5.102	5.104
h	-0.500	-0.501	0.148	0.089	-0.197	-0.204	0.058	0.001	-0.086	-0.104

Кривые вырождения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ пересекаются с границами областей неустойчивости в точках E_k ($k = 1, \dots, 5$), координаты которых приведены в таблице 2. В этих точках происходит изменение орбитальной устойчивости на неустойчивость и наоборот. В частности, на участке граничной кривой α_3 , расположенном ниже точки E_1 , плоские колебания орбитально неустойчивы, а на участке, расположенном выше точки E_1 , плоские колебания орбитально устойчивы. На участке кривой α_4 , ограниченном точками E_2 и E_3 , плоские колебания

орбитально устойчивы, а вне данного участка на указанной кривой имеет место орбитальная неустойчивость плоских колебаний. Аналогичная ситуация возникает на кривой α_5 : на участке, ограниченном точками E_4 и E_5 , плоские колебания орбитально устойчивы, а вне данного участка имеет место орбитальная неустойчивость плоских колебаний. Кривые $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ отвечают орбитально устойчивым периодическим движениям.

Таблица 2

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
ν	3.115	3.604	4.369	5.098	5.684
h	-0.417	0.210	-0.229	0.108	-0.146

При значениях параметров на кривых $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, а также в точках G_j ($j = 1, \dots, 10$) и E_k ($k = 1, \dots, 5$) приведенные выше критерии устойчивости не дают ответа на вопрос об орбитальной устойчивости плоских периодических движений. Для этих значений параметров требуется нелинейный анализ с учетом членов выше четвертой степени функции Гамильтона (3.1).

Список литературы

- [1] Иртегов В. Д. Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа С. В. Ковалевской // Тр. Казан. авиац. ин-та, 1968, вып. 97, с. 38–40.
- [2] Брюм А. З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // ПММ, 1989, т. 53, № 6, с. 873–879.
- [3] Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ, 2001, т. 65, № 1, с. 51–58.
- [4] Маркеев А. П., Медведев С. В., Чеховская Т. Н. К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // МГТ, 2003, № 1, с. 3–9.
- [5] Бардин Б. С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева–Чаллыгина // МГТ, 2007, № 2, с. 14–21.
- [6] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
- [7] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [8] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
- [9] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
- [10] Якубович В. Я., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
- [11] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2009. 396 с.
- [12] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.
- [13] Джакалья Г. Е. О. Методы возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
- [14] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН, 1963, т. 18, № 6(114), с. 91–192.
- [15] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.



- [16] Иванов А. П., Сокольский А. Г. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ, 1980, т. 44, № 6, с. 963–970.
- [17] Маркеев А. П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // МТТ, 2004, № 6, с. 3–12.

On orbital stability pendulum-like oscillations and rotation of symmetric rigid body with a fixed point

Boris S. Bardin¹, Alexander A. Savin²

^{1,2}Moscow Aviation Institute

Volokolamskoe Shosse 4, Moscow, 125993, Russia

¹bsbardin@yandex.ru, ²sashka_savin@mail.ru

We deal with the problem of orbital stability of planar periodic motions of a heavy rigid body with a fixed point. We suppose that the mass center of the body is located in the equatorial plane of the inertia ellipsoid. Unperturbed motions represent oscillations or rotations of the body around a principal axis, keeping a fixed horizontal position.

Local coordinates are introduced in a neighborhood of the unperturbed periodic motion and equations of perturbed motion are obtained in Hamiltonian form. Domains of orbital instability are established by means of linear analysis. Outside of the above domains nonlinear study is performed. The nonlinear stability problem is reduced to a stability problem of a fixed point of symplectic map generated by the equations of perturbed motion. Coefficients of the above map are obtained numerically. By analyzing of the coefficients mentioned rigorous results on orbital stability or instability are obtained.

In the case of oscillations with small amplitudes as well as in the case of rotations with high angular velocities the problem of orbital stability is studied analytically.

MSC 2010: 34C15, 34C20, 34C23, 34C25

Keywords: Hamiltonian system, periodic orbits, normal form, resonance, action–angle variables, orbital stability

Received May 18, 2012, accepted May 31, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 249–266 (Russian)

