Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 345–353.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45

О пуассоновых структурах, возникающих при рассмотрении шара Чаплыгина и его обобщений

А. В. Цыганов

Обсуждается схема построения пуассоновых структур для неголономных систем Чаплыгина и Борисова – Мамаева – Фёдорова. Векторные поля для этих систем будут соответственно конформно и обобщенно конформно гамильтоновыми полями относительно линейных по моментам скобок Пуассона. Предполагается, что это различие связано с тем, что бивектор Пуассона, возникающий в задаче Борисова – Мамаева – Фёдорова, не является деформацией канонического бивектора Пуассона.

Ключевые слова: неголономная механика, шар Чаплыгина, скобки Пуассона

1. Введение

Следуя [1, 4], рассмотрим динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью, которое катится без проскальзывания по поверхности второй неподвижной сферы радиуса a. Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта имеет вид

$$v + \omega \times r = 0, \tag{1.1}$$

где ω и v — угловая скорость и скорость центра масс тела, r — вектор из центра масс в точку контакта относительно подвижной системы координат, связанной с главными осями шара.

Получено 14 апреля 2012 года
После доработки 21 мая 2012 года

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В подвижной системе координат угловой момент подвижной сферы относительно точки касания имеет вид

$$M = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})\omega - d(\gamma, \omega)\gamma, \quad d = mb^2. \tag{1.2}$$

Здесь m — масса, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции и b — радиус подвижной сферы, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор нормали к сфере в точке контакта, а $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Скобки (a, b) обозначают обычное скалярное произведение, а $a \times b$ — векторное произведение трехмерных векторов.

Уравнения движения зависят от отношения радиусов сфер $\kappa = a/(a+b)$

$$\dot{M} = M \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \kappa\gamma \times \omega. \tag{1.3}$$

При любом κ уравнения движения (1.3) обладают тремя интегралами движения

$$H_1 = (M, \omega), \quad H_2 = (M, M), \quad C_1 = (\gamma, \gamma) \tag{1.4}$$

и инвариантной мерой

$$\mu = \mathrm{g}^{-1}(\gamma)\, \mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}M, \quad \mathrm{g}(\gamma) = \sqrt{1 - d(\gamma, \mathbf{A}\gamma)}, \tag{1.5}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{I_1 + d} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{I_2 + d} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{I_3 + d} \end{pmatrix}.$$

Если $\kappa = \pm 1$, то существует еще один интеграл движения

$$C_2 = (\gamma, \mathbf{B}M), \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{-1} + (\kappa - 1)\mathbf{A}^{-1}. \tag{1.6}$$

При $\kappa = 1$ данная неголономная система, описывающая качение без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара по неподвижной горизонтальной плоскости, называется шаром Чаплыгина [7].

При $\kappa = -1$ интегрируемость уравнений движения обобщенного шара Чаплыгина была доказана в работе [1], а явные квадратуры при $C_2 = 0$ предъявлены в работе [5]. Данную систему мы будем называть системой Борисова – Мамаева – Фёдорова или БМФ-системой.

2. Скобки Пуассона

При $\kappa = \pm 1$ шесть уравнений движения (1.3) обладают четырьмя интегралами движения и инвариантной мерой. По теореме Эйлера – Якоби эти уравнения интегрируемы в квадратурах. В силу этого можно предположить, что совместные поверхности уровня интегралов движения образуют лагранжево слоение фазового пространства дуальной динамической системы, которая является гамильтоновой относительно бивектора Пуассона P, такого, что

$$P\mathrm{d}C_{1,2} = 0, \qquad (P\mathrm{d}H_1, \mathrm{d}H_2) \equiv \{H_1, H_2\} = 0, \qquad [P, P] = 0, \tag{2.1}$$

где $[.,.]$ — скобка Схоутена. Тем самым предполагается, что интегрируемость по Эйлеру–Якоби исходных негамильтоновых уравнений движения (1.3) эквивалентна интегрируемости по Лиувиллю гамильтоновых уравнений движения с теми же интегралами движения.

Первое из этих уравнений означает, что функции $C_{1,2}$ являются функциями Казимира для бивектора P. Второе уравнение означает, что на соответствующих четырехмерных симплектических листах два оставшихся интеграла движения $H_{1,2}$ находятся в инволюции и определяют лагранжево слоение, которое можно отождествить с некоторой гамильтоновой системой уравнений. Выполнение третьего условия гарантирует выполнение тождества Якоби и остальных свойств скобок Пуассона.

Далее мы предъявим решения уравнений (2.1) в пространстве линейных по M бивекторов Пуассона для шара Чаплыгина и системы БМФ.

2.1. Система Чаплыгина, $\boldsymbol{\kappa = 1}$

Согласно [2, 4], интегралы движения (1.4)–(1.6) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона

$$\{M_i, M_j\}_g = \varepsilon_{ijk}\left(\mathrm{g}M_k - \frac{d(M, \mathbf{A}\gamma)}{\mathrm{g}}\gamma_k\right), \quad \{M_i, \gamma_j\}_g = \varepsilon_{ijk}\mathrm{g}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\}_g = 0, \tag{2.2}$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор.

Если ввести переменные $x = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, M_1, M_2, M_3)$, то исходные уравнения движения (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} \equiv X_k = \mathrm{g}^{-1}\{H, x_k\}_g, \quad \text{где} \quad H = \frac{H_1}{2}. \tag{2.3}$$

Эти уравнения после замены времени

$$\mathrm{d}t \to \mathrm{g}\,\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

становятся гамильтоновыми относительно скобки Пуассона (2.2). Таким образом, исходное векторное поле X является конформно гамильтоновым векторным полем, так как

$$X = \mathrm{g}^{-1}(x)\,\widehat{X}, \quad \text{где} \quad \widehat{X} = P_g\,\mathrm{d}H,$$

со всеми вытекающими последствиями [2, 4].

Природа скобок Пуассона (2.2), полученных Борисовым и Мамаевым, может быть объяснена с помощью деформации канонических скобок Пуассона на кокасательных расслоениях и отображения момента.

Действительно, если $g(q)$ — произвольная функция на каком-либо конфигурационном пространстве Q с координатами $q = (q_1, \ldots, q_n)$, то, заменив сопряженные переменные $p = (p_1, \ldots, p_n)$ в канонической 1-форме Лиувилля и соответствующей симплектической 2-форме

$$\theta = p_1\,\mathrm{d}q_1 + \ldots p_n\,\mathrm{d}q_n, \quad \Omega = \mathrm{d}\theta,$$

по правилу

$$p_k \to g(q)\,p_k \tag{2.5}$$

мы получим формы

$$\theta_g = g(q)\Big(p_1\,\mathrm{d}q_1 + \ldots p_n\,\mathrm{d}q_n\Big), \quad \Omega \to \Omega_g = \mathrm{d}\theta_g.$$

Соответствующие скобки Пуассона

$$\{q_i, q_j\}_g = 0, \qquad \{q_i, p_j\}_g = g\delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_g = \partial_j g\, p_i - \partial_i g\, p_j, \tag{2.6}$$

где $\partial_k = \partial/\partial q_k$, являются тривиальной деформацией исходных канонических скобок Пуассона

$$\{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0.$$

Если теперь отождествить Q с двумерной сферой S^2, вложенной стандартным образом в $\mathbb{R}^3$, так что $q_i = \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$, то стандартное отображение момента

$$(p, \gamma) \in T^*S^2 \to (M, \gamma) \in e^*(3) = so(3) \ltimes \mathbb{R}^3,$$

определяемое векторным произведением

$$M = \gamma \times p, \tag{2.7}$$

отображает скобки Пуассона (2.6) в скобки Пуассона на алгебре $e^*(3)$

$$\begin{aligned} \big\{M_i, M_j\big\}_g &= \varepsilon_{ijk}\left(g(\gamma)M_k + \gamma_k \sum_{m=1}^{3} M_m \partial_m g(\gamma)\right), \\ \big\{M_i, \gamma_j\big\}_g &= \varepsilon_{ijk}\, g(\gamma)\,\gamma_k, \qquad \big\{\gamma_i, \gamma_j\big\}_g = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь, как и ранее, $\partial_m = \partial/\partial\gamma_m$.

Предложение 6. *Если в качестве $g(\gamma)$ взять функцию $\mathrm{g}(\gamma)$ (1.5), то скобки Пуассона (2.8) совпадают со скобками (2.2), возникающими при рассмотрении неголономного шара Чаплыгина.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке совпадения скобок Пуассона для конкретного выбора функции g.

Так как скобки Пуассона (2.2) являются деформациями канонических скобок Ли–Пуассона специального вида (см. [8]), то они могут быть приведены к этим каноническим скобкам различными способами. Например, предложенная в [10] замена переменных

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathrm{g}^{-1}\left(M_1 - \frac{b\gamma_1}{(\gamma,\gamma)}\left(1 + \frac{\gamma_3^2}{\nu}\right)\right) + \frac{c\gamma_1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \\ L_2 &= \mathrm{g}^{-1}\left(M_2 - \frac{b\gamma_2}{(\gamma,\gamma)}\left(1 + \frac{\gamma_3^2}{\nu}\right)\right) + \frac{c\gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \\ L_3 &= \mathrm{g}^{-1}\left(M_3 - \frac{b\gamma_3}{(\gamma,\gamma)}\left(1 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\nu}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$b = (\gamma, M), \quad c = (\gamma, L), \quad \text{и} \quad \nu = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - d(\gamma,\gamma)(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2),$$

приводит скобки Пуассона (2.2) к каноническим скобкам Ли–Пуассона алгебры $e^*(3)$

$$\big\{L_i, L_j\big\} = \varepsilon_{ijk}L_k, \quad \big\{L_i, \gamma_j\big\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \big\{\gamma_i, \gamma_j\big\} = 0. \tag{2.10}$$

Таким образом, шар Чаплыгина траекторно эквивалентен интегрируемой динамической системе на двумерной сфере, которая является гамильтоновой системой относительно канонических скобок Ли–Пуассона (2.10) (см. [10]).

2.2. Система БМФ, $\kappa = -1$

Если $\kappa = 1$, то бивектор Пуассона, отвечающий скобкам (2.2), имеет вид

$$P_g = \mathrm{g}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma} \\ -\mathbf{\Gamma}^\top & \mathbf{M} \end{pmatrix} - d\mathrm{g}^{-1}(M, \mathbf{A}\gamma)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

В это определение входят кососимметрические 3×3 матрицы

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 \\ -M_3 & 0 & M_1 \\ M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые также используются и для описания стандартного изоморфизма $M \to \mathbf{M}$ алгебр Ли $\big(\mathbb{R}^3, a \times b\big)$ и $(so(3), [a, b])$. В терминах этих матриц канонический бивектор Пуассона на алгебре $e^*(3)$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma} \\ -\mathbf{\Gamma}^\top & \mathbf{M} \end{pmatrix}.$$

Так как бивектор P_g является деформацией бивектора P [8], то эти два бивектора совместны друг с другом и скобка Схоутена между ними равна нулю

$$[P, P_g] = 0.$$

При рассмотрении качения шара по сфере возникает более сложный бивектор Пуассона, имеющий, тем не менее, сходную структуру с бивектором P_g (2.11).

Предложение 7. *Если $\kappa = -1$, то интегралы движения (1.4)–(1.6) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона, задаваемых линейным по M бивектором Пуассона:*

$$P_b = \mathrm{g}\begin{pmatrix} 0 & \widehat{\mathbf{\Gamma}} \\ -\widehat{\mathbf{\Gamma}}^\top & \widehat{\mathbf{M}} \end{pmatrix} + \mathrm{g}^{-1}\left(2d(\gamma, \gamma) - \mathrm{tr}\mathbf{B}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{\Gamma}} \end{pmatrix}, \quad [P_b, P_b] = 0. \tag{2.12}$$

Матрица $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ зависит только от γ:

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}} = \left((\gamma, \gamma)\,\mathbf{E} - \mathbf{C} - \frac{\mathbf{B}}{2d}\right)\mathbf{\Gamma}_b,$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица и

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_3 \\ \gamma_2\gamma_1 & \gamma_2^2 & \gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_3\gamma_1 & \gamma_3\gamma_2 & \gamma_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_b = \begin{pmatrix} 0 & b_3\gamma_3 & -b_2\gamma_2 \\ -b_3\gamma_3 & 0 & b_1\gamma_1 \\ b_2\gamma_2 & -b_1\gamma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а элементы оставшихся двух матриц имеют вид

$$\widehat{\mathbf{M}}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\left(\alpha_k\gamma_k-(\gamma,\gamma)b_kM_k+\frac{b_k^2M_k}{2d}\right),$$

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_{ij} = -\frac{\varepsilon_{ijk}b_k\gamma_k}{(b_1+b_2)(b_2+b_3)(b_1+b_3)}\Big((b_i+b_j)\,\alpha_k+(b_k-b_i)(b_k-b_j)M_k\gamma_k\Big),$$

где

$$\alpha_k=\Big(C_2+b_k(\gamma,M)\Big),\qquad C_2=(\gamma,\mathbf{B}M).$$

Данный бивектор является единственным решением уравнений (2.1) *в классе линейных по M бивекторов Пуассона.*

Доказательство состоит в непосредственном решении уравнений (2.1), используя линейный по M анзац для бивектора P наиболее общего вида.

Выпишем явно соответствующие скобки Пуассона:

$$\begin{aligned}
&\{\gamma_i,\gamma_j\}_b=0,\\
&\{M_1,\gamma_1\}_b=\mathrm{g}(b_2-b_3)\gamma_1\gamma_2\gamma_3, && \{M_1,\gamma_2\}_b=\mathrm{g}\gamma_3\left(b_3(\gamma_1^2+\gamma_3^2)+b_2\gamma_2^2-\frac{b_2b_3}{2d}\right),\\
& && \{M_1,\gamma_3\}_b=-\mathrm{g}\gamma_2\left(b_2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)+b_3\gamma_3^2-\frac{b_2b_3}{2d}\right),\\
&\{M_2,\gamma_2\}_b=\mathrm{g}(b_3-b_1)\gamma_1\gamma_2\gamma_3, && \{M_2,\gamma_1\}_b=-\mathrm{g}\gamma_3\left(b_1\gamma_1^2+b_3(\gamma_2^2+\gamma_3^2)-\frac{b_1b_3}{2d}\right),\\
& && \{M_2,\gamma_3\}_b=\mathrm{g}\gamma_1\left(b_1(\gamma_1^2+\gamma_2^2)+b_3\gamma_3^2-\frac{b_1b_3}{2d}\right),\\
&\{M_3,\gamma_3\}_b=\mathrm{g}(b_1-b_2)\gamma_1\gamma_2\gamma_3, && \{M_3,\gamma_1\}_b=\mathrm{g}\gamma_2\left(b_1\gamma_1^2+b_2(\gamma_2^2+\gamma_3^2)-\frac{b_1b_2}{2d}\right),\\
& && \{M_3,\gamma_2\}_b=-\mathrm{g}\gamma_1\left(b_(\gamma_1^2+\gamma_3^2)+b_2\gamma_2^2-\frac{b_1b_2}{2d}\right)
\end{aligned}$$

и

$$\{M_1,M_2\}_b=\ \mathrm{g}\left(-\alpha_3\gamma_3+(\gamma,\gamma)b_3M_3-\frac{b_3^2M_3}{2d}\right)-\mathrm{g}^{-1}\gamma_3\big(2d(\gamma,\gamma)-\mathrm{tr}\mathbf{B}\big)\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha_3b_3}{(b_3+b_2)(b_3+b_1)}+\frac{(b_3-b_2)(b_3-b_1)b_3\gamma_3M_3}{(b_3+b_2)(b_1+b_3)(b_2+b_1)}\right).$$

Оставшиеся две скобки $\{M_1,M_3\}_b$ и $\{M_2,M_3\}_b$ аналогичны скобке $\{M_1,M_2\}_b$, и поэтому мы не будем их выписывать явно.

Используя данные скобки Пуассона, исходные уравнения движения (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\equiv X_k=\mathrm{g}_1^{-1}\{H_1,x_k\}_b+\mathrm{g}_2^{-1}\{H_2,x_k\}_b, \tag{2.13}$$

где

$$\mathrm{g}_1(\gamma)=\frac{\mathrm{g}(\gamma)\,s(\gamma)}{(2d(\gamma,\gamma)-\mathrm{tr}\mathbf{B})d},\qquad \mathrm{g}_2(\gamma)=\frac{\mathrm{g}(\gamma)\,s(\gamma)}{2d}$$

и

$$s(\gamma) = 4d^2(\gamma,\gamma)(\gamma,\mathbf{B}\gamma) - 2d\big((\mathbf{E}\,\mathrm{tr}\mathbf{B} - \mathbf{B})\gamma,\mathbf{B}\gamma\big) + \det\mathbf{B}.$$

Таким образом, в отличие от обычного шара Чаплыгина, исходное векторное поле для БМФ-системы не является конформно гамильтоновым относительно линейной по M пуассоновой структуры.

Предложение 8. *При $\kappa = -1$ исходное векторное поле Z (2.13) является обобщенно конформно гамильтоновым векторным полем*

$$X = \mathrm{g}_1^{-1}\,\widehat{X}_1 + \mathrm{g}_2^{-1}\,\widehat{X}_2,$$

где $\widehat{X}_{1,2}$ — гамильтоновы векторные поля двух исходных коммутирующих интегралов движения

$$\widehat{X}_1 = P_b\,\mathrm{d}H_1,\quad \widehat{X}_2 = P_b\,\mathrm{d}H_2,\qquad \{H_1,H_2\}_b = 0.$$

Тем не менее, это поле все же является конформно гамильтоновым

$$X = \mathrm{g}_3^{-1}\widehat{X}_3,\quad \textit{где}\quad \widehat{X}_3 = P_b\mathrm{d}H_3,\quad \mathrm{g}_3(\gamma) = \frac{\mathrm{g}(\gamma)s(\gamma)}{d},$$

но относительно другого гамильтониана

$$H_3 = (2d(\gamma,\gamma) - \mathrm{tr}\mathbf{B})H_1 + 2H_2,$$

который является интегралом движения исходной системы уравнений (1.3).

Доказательство состоит в непосредственном построении уравнений движения с помощью тензора Пуассона P_b и интегралов движения $H_{1,2}$ и H_3.

Напомним, что интегралы движения H_1 и H_2 являются, соответственно, механической энергией и квадратом углового момента, тогда как их линейная комбинация H_3 не имеет такого явного физического смысла. Заметим также, что и при $\kappa = 1$ для исходного шара Чаплыгина схожая линейная комбинация исходных интегралов движения $\widehat{H}_3 = H_2 - dH_1$, после замены параметров, порождает конформно гамильтоново поле для неголономной LR-системы Веселовой, которая траекторно эквивалентна шару Чаплыгина [10].

При $C_2 = 0$ уравнения (2.1) имеют еще несколько решений, тесно связанных с существованием переменных разделения в работах [3, 9]. Для того чтобы сравнить эти решения с (2.12), мы введем сферические координаты и соответствующие им импульсы по правилу

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = \sin\phi\sin\theta, && M_1 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos\theta\,p_\phi + p_\psi\big) - \cos\phi\,p_\theta\right),\\
&\gamma_2 = \cos\phi\sin\theta, && M_2 = \frac{1}{b_2}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos\theta\,p_\phi + p_\psi\big) + \sin\phi\,p_\theta\right),\\
&\gamma_3 = \cos\theta, && M_3 = -\frac{p_\phi}{b_3},
\end{aligned}\tag{2.14}$$

так что

$$C_1 = (\gamma,\gamma) = 1,\qquad C_2 = (\gamma,\mathbf{B}M) = p_\psi.$$

В этих координатах бивектор P_b имеет вид

$$P_b = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{g}L_{ij}\\ -\mathrm{g}L_{ji} & \mathrm{g}N_{ij}^{(1)} + \mathrm{g}^{-1}N_{ij}^{(2)}\end{pmatrix}.\tag{2.15}$$

Здесь не зависящая от импульсов матрица L имеет вид

$$L=\begin{pmatrix} b_3(b_1\sin^2\phi+b_2\cos^2\phi)-\dfrac{b_1b_2b_3}{2d} & \dfrac{\sin 2\phi\cos\theta b_3(b_2-b_1)}{2\sin\theta}\\ \dfrac{\sin 2\phi\sin 2\theta b_3(b_2-b_1)}{4} & b_3(b_1\sin^2\phi+b_2\cos^2\phi)\cos^2\theta+b_1b_2\sin^2\theta-\dfrac{b_1b_2b_3}{2d}\end{pmatrix},$$

а явные выражения для линейных по импульсам кососимметрических 2×2 матриц $N^{(1,2)}$ мы для краткости опустим.

В работе [9] было найдено несколько других линейных по импульсам решений уравнений (2.1), которые не допускают обобщения на случай $p_\psi\neq 0$. Например, решение

$$P_\eta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{g} & 0\\ * & 0 & 0 & (1+\eta)\mathrm{g}\\ * & * & 0 & (1+\eta)\mathrm{g}\dfrac{\partial\ln\mathrm{g}}{\partial\theta}p_\phi-\mathrm{g}\dfrac{\partial\ln\mathrm{g}}{\partial\phi}p_\theta\\ * & * & * & 0\end{pmatrix},\quad \eta=\frac{2\sin^2\theta\bigl(b_3^2-(b_1+b_2)b_3+b_1b_2\bigr)}{b_3^2(d^{-1}(b_1+b_2)-2)},$$

является тривиальной деформацией канонического бивектора Пуассона

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Id}\\ \mathbf{Id} & 0\end{pmatrix},\quad [P,P_\eta]=[P_\eta,P_\eta]=0,$$

то есть $P_\eta=\mathcal{L}_{X_\eta}P$ является производной Ли вдоль векторного поля Лиувилля X_η от P (см. детали и другие решения в [9]).

В работе [3] предъявлено еще одно линейное по импульсам решение P_c уравнений (2.1), которое выделено тем, что исходное векторное поле (1.3) в сферических координатах (2.14) можно переписать в конформно гамильтоновой форме

$$\dot\phi=\mathrm{g}\{H_1,\phi\}_c,\quad \dot\theta=\mathrm{g}\{H_1,\theta\}_c.$$

Данное решение P_c также не допускает линейных по импульсам обобщений на случай $C_2\neq$ $=0$.

Итак, в общем случае бивектор P_b (2.12) только похож по форме на бивектор P_g (2.11), но при этом обладает совсем иными свойствами, и это не только разница в функциях Казимира $(\gamma,\mathbf{B}M)$ и (γ,M). Даже если функцию Казимира $C_2=(\gamma,\mathbf{B}M)$ привести к канонической форме одним из следующих преобразований

$$\begin{array}{l} 1.\ K=\mathbf{B}M\\ 2.\ K=M-\dfrac{\bigl((\mathbf{E}-\mathbf{B})M,\gamma\bigr)}{(\gamma,\gamma)}\gamma\end{array}\quad\Rightarrow\quad(\gamma,\mathbf{B}M)=(\gamma,K),$$

то соответствующий бивектор P_b (2.12) и после преобразований будет не совместен с каноническим бивектором Ли–Пуассона, то есть скобка Схоутена между ними будет не равна нулю

$$[P,P_b]\neq 0.$$

Таким образом, в отличие от бивектора P_g (2.11), бивектор Пуассона P_b (2.12) не является тривиальной деформацией канонического бивектора и требует дальнейшего изучения.

Можно предположить, что именно это свойство бивектора P_b связано с невозможностью непосредственного обобщения преобразования Чаплыгина [6, 7] на случай качения шара по сфере.

Список литературы

[1] Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, № 6, с. 102–105. (*См. также*: Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 67–70.)

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–796.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, № 4, с. 475–478.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.

[5] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.

[6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338.

[7] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. (*См. также*: Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.)

[8] Tsiganov A. V. Integrable Euler top and nonholonomic Chaplygin ball // J. Geomet. Mech., 2011, vol. 3, no. 3, pp. 337–362.

[9] Tsiganov A. V. One invariant measure and different Poisson brackets for two non-holonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 1, pp. 72–96.

[10] Цыганов А. В. О неголономных системах Веселовой и Чаплыгина // Нелинейная динамика, 2012 (принято к печати).

[11] Turiel F. Structures bihamiltoniennes sur le fibré cotangent // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math., 1992, vol. 315, pp. 1085–1088.

On the Poisson structures for the Chaplygin ball and its generalizations

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034, Russia
andrey.tsiganov@gmail.com

Construction of the Poisson structures for the nonholonomic Chaplygin and Borisov – Mamaev – Fedorov systems is discussed. The corresponding vector fields are conformally Hamiltonian and generalized conformally Hamiltonian vector fields with respect to the linear in momenta Poisson brackets. We suppose that this difference is closely related with the non-trivial deformation of canonical Poisson bivector, which appears in the Borisov – Mamamev – Fedorov case.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45
Keywords: nonholonomic mechanics, Chaplygin sphere, Poisson brackets

Received April 14, 2012, accepted May 21, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 345–353 (Russian)