



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ДИНАМИКА

К созданию прототипа сферического китайского волчка*

М. К. Чоччи, Б. Маленжье, Б. Ланжерок, Б. Гримонпре

Китайский волчок отличается от других вращающихся объектов весьма причудливым и неожиданным поведением. Волчки, имеющиеся в продаже, состоят из усеченного шара и стержня. Если закрутить китайский волчок на его закругленной части, он опрокидывается и продолжает вращаться, стоя на стержне. Для описания такого поведения обычно используется упрощенная математическая модель, в которой волчок рассматривается как сфера с распределением массы, обладающим аксиальной симметрией при отсутствии сферической симметрии, которая вращается на гладкой поверхности с малым трением скольжения. Можно выделить три основных типа динамического поведения: с опрокидывани-

* *От редакции:* данная работа, посвященная динамике волчка тип-топ, представляет особый интерес как пример экспериментального исследования нетривиальной механической системы с использованием современных компьютерных технологий, в частности, метода прототипирования реальных механических систем. В этой связи мы размещаем перевод этой статьи в настоящем разделе. Вместе с тем, следует отметить, что со стороны теории работа Чоччи с соавторами существенно пересекается с работами российских механиков, за последние десятилетия получивших наиболее полные теоретические результаты по динамике волчка тип-топ. См. по этому поводу заметку-комментарий А. А. Зобовой, с. 427–430.

Ciocci M. C., Malengier B., Langerock B., Grimonprez B. Towards a Prototype of a Spherical Tippe Top // Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 268537, 34 p. © 2012 M. C. Ciocci et al. Перевод с английского Э. М. Эпштейна.

М. К. Чоччи
Howest, ELIT, University College West Flanders
G. K. De Goedelaan 5, 8500 Kortrijk

Б. Маленжье
Department of Mathematical Analysis, Research Group NaM2, University of Ghent
Galglaan 2, 9000 Ghent, Belgium

Б. Ланжерок
Department of Architecture, Sint-Lucas Visual Arts, Institute for Higher Education in the Sciences and the Arts, 9000 Ghent, Belgium

Б. Гримонпре
Howest, Industrial Design Center, University College West Flanders
Marksesteenweg 58, 8500 Kortrijk, Belgium



ем, без опрокидывания и наклонное, при котором волчок поднимается, но не переходит в вертикальное положение, а остается в некотором промежуточном состоянии. Далее можно выделить подклассы в зависимости от устойчивости относительного равновесия. Нас интересует, в какой степени можно доверять предсказаниям теоретической модели. Мы применили методы трехмерной печати и быстрого прототипирования для создания модели «три-в-одном», которая содержала бы в себе три главные характеристики, определяющие три основные группы в упомянутой выше классификации сферических волчков. Мы предлагаем три варианта. Такой «волчок» может использоваться для проверки качественной и количественной справедливости математических моделей.

1. Введение

Волчки принадлежат к наиболее древним игрушкам, и существует великое множество их разновидностей. Совсем просто привести волчок или гироскоп во вращение, нетрудно объяснить их движение в общих словах, но совсем не просто написать для них подробные уравнения движения. Китайский волчок отличается от других вращающихся объектов весьма причудливым и неожиданным поведением. Имеющиеся в продаже волчки, запатентованные в Дании в 50-х годах, состоят из усеченного шара и стержня. Если закрутить китайский волчок на его закругленной части, он опрокидывается и продолжает вращаться, стоя на стержне. Трение на нижней поверхности и положение центра масс ниже центра кривизны заставляют волчок поднимать его центр масс при продолжающемся вращении вокруг оси симметрии (вокруг стержня). Это проиллюстрировано на рисунке 1. Замечательно, что в перевернутом состоянии центр масс находится выше, нежели в начальном положении, несмотря на воздействие силы тяжести. Из опыта известно, что такой переход происходит лишь в случае, когда начальная скорость вращения превышает некоторый критический порог.

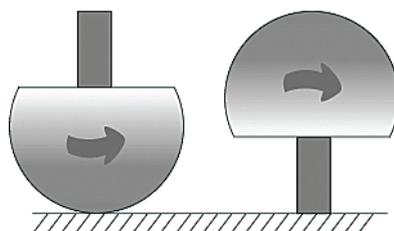


Рис. 1. Китайский волчок. Показано опрокидывание волчка.

Обычно используется упрощенная математическая модель китайского волчка в виде сферы с распределением массы, обладающим аксиальной симметрией при отсутствии сферической симметрии, которая вращается на гладкой поверхности с малым трением скольжения. Применение теории бифуркаций позволяет дать глобальную геометрическую интерпретацию фазовой диаграммы этой динамической системы. В зависимости от эксцентricности сферы и инварианта Джеллетта (он включает в себя информацию о начальной угловой скорости) можно выделить шесть основных классов волчков, которые можно разделить на три главных группы с различным динамическим поведением — с опрокидыванием, без опрокидывания и с установлением некоторого промежуточного положения (см. рис. 3). Заметим, что объекты, демонстрирующие опрокидывание подобно китайскому волчку, были

известны с начала XIX века (см., например, [1]). После того как в Дании был запатентован волчок, подобный показанному на рисунке 1, было опубликовано несколько теоретических работ (см., например, обзор литературы в [2–6]). С тех пор, как было установлено, что для объяснения опрокидывания китайского волчка необходим учет трения скольжения [2, 7, 8], анализу моделей китайского волчка были посвящены многие исследования, содержащие линейный анализ устойчивости, численное исследование и т. д. В некоторых работах изучались переходы между вращением и скольжением в процессе движения (см. [3, 4, 9]). Математические результаты, представленные в настоящей статье, воспроизводят в основном результаты работ [10–15], однако наш подход основан на численном моделировании, впервые примененном Коэном [2]. Такой подход представляется нам наилучшим, так как он дает ясное представление о роли различных параметров, фигурирующих в расчете реального трехмерного объекта, описываемого моделью. Заметим, что в нашей математической модели мы предполагаем, что единственными внешними силами, действующими на систему, являются нормальная реакция опоры и сила трения вязкого типа, направленная против движения точки контакта с опорной плоскостью. Это наиболее общее предположение, упоминаемое в литературе, хотя в работе [4] обсуждается роль нелинейного трения кулоновского типа. Путем численного моделирования там показано, что кулоновское трение дает вклад в опрокидывание волчка, но этот эффект мал по сравнению с влиянием вязкого трения. Нелинейное кулоновское трение приводит к алгебраической дестабилизации изначально вращающегося волчка, тогда как вязкое трение вызывает экспоненциальную дестабилизацию (см. также [5]). Эти результаты оправдывают наш выбор в пользу одного лишь вязкого трения.

Фазовая диаграмма и бифуркационные диаграммы иллюстрируют основные результаты, полученные в работе [10]: тип асимптотической динамики определяется инвариантом Джеллетта (который включает в себя информацию о начальной угловой скорости) и эксцентricностью сферы. Либо асимптотическое состояние однозначно, либо система бистабильна. Выделяются три основных режима: волчок не опрокидывается независимо от начального вращения, опрокидывание может происходить при достаточно большом значении параметра Джеллетта (пропорционального начальной скорости вращения), и возникает *неполный* переворот, при котором волчок приподнимается, но не переходит в полностью вертикальное положение, а остается в некотором промежуточном состоянии.

Подчеркнем, что хотя результаты классификации можно получить менее громоздким способом, используя приведение раусиана, как это сделано в работе [10], используемый здесь подход является стандартным и простым для реализации в качестве модели. Он также допускает возможность обобщения, чтобы, например, включить в рассмотрение переходы от скольжения к качению и обратно. В этой статье мы выясняем степень совпадения с предсказаниями математической модели. Мы хотим убедиться, что математическая модель, представленная здесь и в работе [10], действительно отражает реальность. Наша цель состоит в том, чтобы исследовать, можно ли создать «игрушку три-в-одном», которая могла бы воспроизводить три основных режима — опрокидывание, неопрокидывание и наклонное положение, которые определяют три упомянутые группы сферических волчков. Насколько нам известно, такой игрушки пока не существует. Мы применили метод конструирования модели, предложенный в работе [16]. Насколько мы знаем, это первый случай использования трехмерной печати и быстрого фототипирования для конструирования и изготовления «игрушки», предназначенной для качественного и количественного обоснования математической модели, описывающей поведение диссипативной нелинейной динамической системы. Из бифуркационной диаграммы следует, что это можно сделать для

трех из шести классов волчков (по одному классу для каждой основной группы), считая один из характеристических параметров постоянным и варьируя остальные. Нам представляется, что реализация реального волчка дает более весомое обоснование модели, нежели компьютерное моделирование, на которое сильно влияют используемые идеализирующие математические допущения.

Поскольку два параметра, на которых основана вся классификация, — отношение моментов инерции и эксцентricность — взаимно независимы, задача состоит в том, чтобы придумать подходящую модель, которую легко было бы приводить в движение механическим способом. После подробных математических расчетов и разработки трехмерной анимации (см. <http://cage.ugent.be/~bm/tippetop/tippetop.html>) мы воспользовались трехмерной печатью для создания функциональной модели, позволяющей быстро и легко производить практические демонстрации.

2. Математические результаты

В этой статье мы рассматриваем сферу, у которой распределение массы обладает аксиальной симметрией и не имеет сферической симметрии. Вращение на поверхности сопровождается малой силой трения скольжения. В работе [13] Эбенфельд и Шек представили подробный анализ динамики эксцентricной вращающейся сферы на плоской поверхности при наличии только трения скольжения (см. также [14]). Не делая других предположений, мы покажем, что эти результаты дают полное качественное описание асимптотической долговременной динамики. В то время как в работах [13, 14] проводится в основном аналитическое рассмотрение, мы здесь принимаем точку зрения теории бифуркаций, что приводит к глобальной геометрической интерпретации фазовой диаграммы. Основные результаты иллюстрируются фазовой диаграммой на рисунке 2 и бифуркационными диаграммами на рисунке 3. Напомним, что ω -предельное множество динамической системы представляет замкнутое инвариантное множество, которое аккумулируется траекторией (направленной вперед) [17]. Наш основной результат выражается следующей теоремой.

Теорема 2.6. *Эксцентricная сфера, вращающаяся на плоской поверхности с малым трением скольжения, допускает три типа (асимптотически устойчивых) ω -предельных множеств:*

- I** вертикально вращающийся волчок ($\theta = 0$) с центром масс точно под геометрическим центром;
- II** вертикально вращающийся волчок ($\theta = \pi$) с центром масс точно над геометрическим центром;
- III** волчок, вращающийся в промежуточном положении ($0 < \theta < \pi$), с центром масс, расположенным не точно под и не точно над геометрическим центром.

Эти решения, соответствующие постоянной энергии, представляют чистое вращение в силу предположения относительно трения скольжения (т. е. они не содержат проскальзывания). Вертикальные состояния периодичны, тогда как промежуточные состояния в общем случае квазипериодичны.

Одновременно могут быть устойчивы по крайней мере два из этих типов решений. Если устойчивое решение однозначно, его бассейн притяжения состоит из почти всего фазового пространства (образует подмножество полной меры). Если же система бистабильна, то можно ожидать, что сепаратриса между двумя различными областями при-

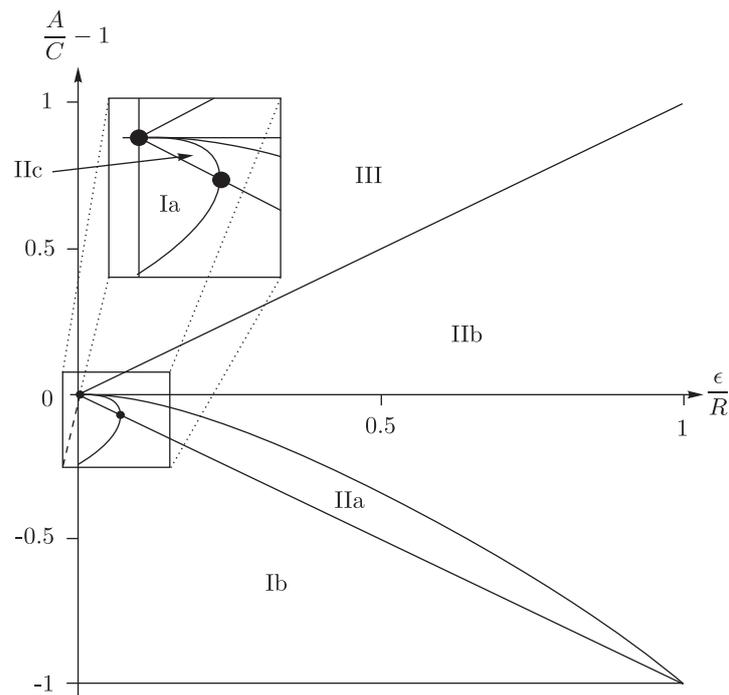


Рис. 2. Фазовая диаграмма динамики эксцентрической сферы с малым трением скольжения. Области фазовой диаграммы соответствуют качественным типам бифуркационных диаграмм относительного равновесия $SO(2) \times SO(2)$ на рис. 3.

тяжесения для асимптотически устойчивых состояний образует устойчивое многообразие неустойчивого промежуточного решения вращающегося волчка.

Все аналитические результаты, содержащиеся в этой формулировке, в принципе, можно найти в работах [13, 14]. Однако авторы этих работ ограничиваются изложением полностью глобальных заключений, как они сформулированы в вышеприведенной теореме, и не приводят фазовой диаграммы и бифуркационных диаграмм, представленных на рисунках 2 и 3.

Заметим, что для эксцентрической сферы в режиме **I** состояние $\theta = 0$ всегда асимптотически устойчиво и, таким образом, не переходит в опрокинутое состояние. Аналогично, никакая динамика не возникает в режиме **III**, так как там перевернутое состояние $\theta = \pi$ всегда неустойчиво. Режим **II** может возникнуть, если достаточно велик инвариант Джеллетта (пропорциональный начальной скорости вращения). Это соответствует эмпирическому наблюдению, что опрокидывание происходит лишь при достаточно большой начальной закрутке. В подрежимах **IIb** и **III** также можно наблюдать *неполное* поведение волчка, при котором он приподнимается, но остается в промежуточном состоянии, не поднимаясь в вертикальное положение $\theta = \pi$. Заметим, что в режиме **I** опрокидывание может произойти, если первоначально волчок был достаточно быстро закручен под углом, не близким к $\theta = 0$.

Необходимо учитывать наличие симметрии. Напомним, что симметрия есть преобразование фазового пространства, которое отображает решения системы на другие решения. В нашей модели эксцентрической сферы на плоской поверхности симметрия возникает вследствие однородности поверхности, на которой движется сфера, и вращательной симметрии эксцентрической сферы. Комбинированными симметриями являются, таким образом, евклидова группа $E(2)$ (действующая как трансляции и вращения в плоскости xy) и группа вращений $SO(2)$, действующая как вращение сферы вокруг оси симметрии.

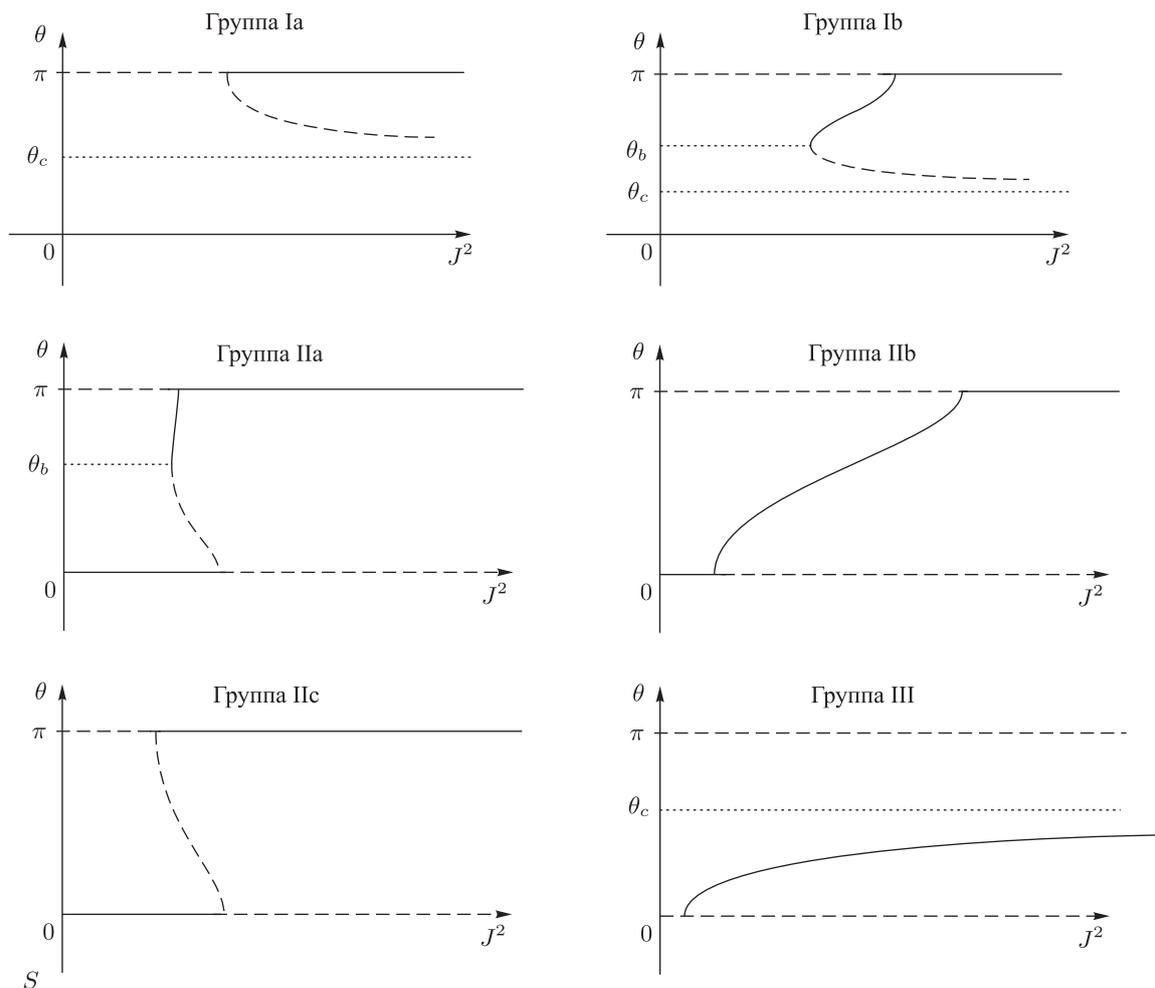


Рис. 3. Качественные бифуркационные диаграммы относительного равновесия $SO(2) \times SO(2)$ для различных областей на рис. 2. Ветви, обозначенные сплошными линиями, соответствуют устойчивым относительным равновесиям, штриховые линии — неустойчивым равновесиям. Вертикальные состояния $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ существуют всегда, промежуточные состояния ($0 < \theta < \pi$) могут ответвляться от них.

Оказывается, что упомянутые выше ω -предельные множества исчерпывают все относительные равновесия по отношению к группе симметрии $SO(2) \times SO(2) < E(2) \times SO(2)$ (см. раздел 4). Напомним, что относительные равновесия по отношению к некоторой группе Σ — это равновесия для ассоциированного потока на приведенном фазовом пространстве, которое получается из первоначального фазового пространства путем взятия частного по отношению к действию группы Σ . Существование и тип таких относительных равновесий зависит лишь от отношения моментов инерции, эксцентриситеты сферы и интеграла движения Джеллетта. Мы определяем число режимов, характеризующих относительные равновесия, как функцию от инварианта Джеллетта (пропорционального начальной угловой скорости). Вертикальные состояния $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ всегда представляют относительные равновесия $SO(2) \times SO(2)$, и их устойчивость зависит от отношения моментов инерции, эксцентриситеты сферы и интеграла движения Джеллетта. Кроме того, могут существовать промежуточные состояния, которые отщепляются от состояний, соответствующих верти-

кальному вращению. Фазовая диаграмма схематически показана на рисунке 2. Бифуркационные диаграммы для относительных равновесий, соответствующих областям, показанным на этой фазовой диаграмме, изображены на рисунке 3.

Доказательство теоремы 2.6, основанное на результатах работ [13, 14], можно найти в приложении. Чтобы ясно и последовательно представить нашу точку зрения, в разделе 3 мы также приведем вывод уравнений движения эксцентрической сферической модели китайского волчка, включая обсуждение симметрии и ее следствий. Здесь дается также точное описание предполагаемой природы трения и определение всех необходимых переменных, которые фигурируют в качестве параметров на рисунках 2 и 3. В разделах 4 и 5 обсуждаются относительные равновесия системы и их устойчивость. Читатели, знакомые с предметом, могут начать чтение статьи сразу с раздела 6.

Хотелось бы подчеркнуть, что используемую здесь стратегию доказательства можно применить к большому числу аналогичных примеров механических систем, на которые действует трение какого-то рода, таких как кельтский камень [18] или волчок *хикаро* Токиеды [19]. Основное наблюдение состоит в том, что для механических систем, находящихся под влиянием трения, энергия становится *функцией Ляпунова*, так как трение приводит к потере энергии. Следующий факт состоит в том, что орбиты, не участвующие в диссипации энергии, должны полностью лежать в подмногообразии фазового пространства, которое определяется отсутствием трения. Равновесия, естественно, лежат в этом подмногообразии, так как они имеют нулевую скорость, а трение при нулевой скорости отсутствует. Можно, однако, ожидать, что обычно никакое решение не лежит полностью в этом подмногообразии, если только это решение не лежит на орбите группы симметрии, которая оставляет подмногообразие нулевого трения инвариантным. (Это утверждение можно уточнить, построив малое локальное возмущение, которое сдвигает решение из подмногообразия нулевого трения.) Во многих случаях множество таких относительных равновесий можно точно проанализировать, аналитически или численно, и вывести локальные свойства устойчивости, рассматривая неустойчивость, создаваемую диссипацией, на основе свойств локальной устойчивости относительных равновесий в отсутствие трения. Заметим в связи с этим, что множество ω -предельных множеств на подмногообразии нулевого трения не зависит от типа и величины трения. Последним шагом является получение глобальных выводов из этой локальной информации. Это возможно, если имеется ясное представление об ω -предельных множествах. Хотелось бы подчеркнуть, что теорема 2.6 относится к асимптотической динамике. В эксперименте с малым трением наблюдению могут мешать *переходные процессы*, которые сильно напоминают (на коротких временных масштабах) динамику сферического волчка без трения. Динамика такого волчка довольно сложна, так как это неинтегрируемая гамильтонова система. В разделе 7 мы представим некоторые результаты численного моделирования, демонстрирующие в явном виде отдельные примеры, когда переходные процессы не возникают и не препятствуют быстрой сходимости к асимптотическим состояниям (хотя, конечно, при достаточно малом коэффициенте трения такие процессы будут доминировать на конечных отрезках времени).

3. Уравнения движения

Рассмотрим *эксцентрическую сферу* (рис. 4) с геометрическим центром в точке C и центром масс в точке O . Прямая, соединяющая центр масс с геометрическим центром, является осью инерционной симметрии: в плоскости, перпендикулярной к этой оси, тензор момента инерции сферы имеет два одинаковых главных момента инерции.

Для описания движения сферы, будут использоваться три системы отсчета:

- (I) инерциальная (лабораторная) система $Mxyz$, где M — некоторая точка на поверхности стола, ось z вертикальна;
- (II) (неинерциальная) вращающаяся система $OXYZ$ с началом координат в центре масс O и с третьей осью, также параллельной вертикали; оси X и Y будут определены ниже;
- (III) главная система осей $Oxyz$, в которой ось z совпадает с осью симметрии сферы (заметим, что в работе [5] началом отсчета в системах (II) и (III) служит не центр масс, а центр сферы).

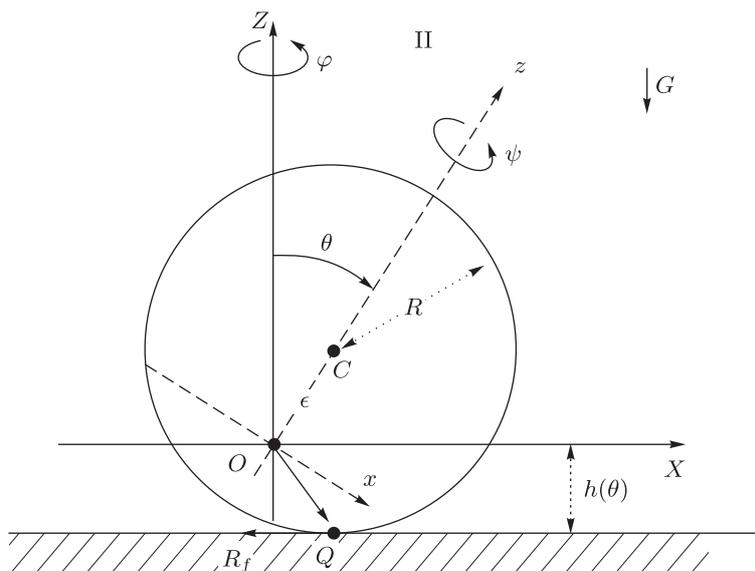


Рис. 4. Модель китайского волчка в виде эксцентрической сферы. R — радиус сферы, центр масс O смещен на расстояние ϵ от геометрического центра. Волчок крутится на горизонтальном столе с точкой контакта Q . Ось симметрии Oz и вертикальная ось OZ определяют плоскость Π (содержащую прямую OQ), которая вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Высота точки O над столом равна $h(\theta)$.

Системы отсчета (II) и (III) показаны на рисунке 4. Эксцентricность ϵ есть расстояние между центром масс O и геометрическим центром C , при этом $0 < \epsilon < R$, где R — радиус сферы. Моменты инерции будем обозначать через $I_x = I_y \equiv A$, $I_z \equiv C$. Точку контакта с плоскостью опоры обозначим через Q .

Обозначим через (θ, φ, ψ) эйлеровы углы рассматриваемого тела относительно оси OZ (рис. 5). Плоскость Π (плоскость OzZ) содержит вектор $\mathbf{q} = OQ$, соединяющий центр масс с точкой контакта. Плоскость Π наклонена под углом φ к вертикальной плоскости Mxz и вращается вокруг вертикали OZ с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Выберем горизонтальную ось OX в плоскости Π таким образом, чтобы ось OY была перпендикулярна к этой плоскости. Во вращающейся системе ось Ox лежит в плоскости Π и перпендикулярна к оси симметрии Oz , а ось Oy совпадает с OY . (Заметим, что оси Ox и Oy представляют главные оси, но они не скреплены с телом.) Угол между вертикалью OZ и осью волчка Oz обозначается через θ . Угловая скорость $\dot{\theta}$ описывает нутацию тела в вертикальной плоскости Π . Угол ψ определяет ориентацию тела по отношению к системе $OXYZ$, производная $\dot{\psi}$ — вращение сферы вокруг ее оси симметрии. Обозначим через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичные векторы вдоль

осей OX, OY, OZ , а через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль осей Ox, Oy, Oz . Заметим, что $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$. Из-за наличия естественной трансляционной симметрии (тела на плоскости) удобнее описывать тело, пользуясь относительными (движущимися) системами отсчета (II и III), а не абсолютной системой I. При этом мы игнорируем трансляционное движение по плоскости и сосредоточиваемся на относительном движении тела, в котором и проявляется поведение китайского волчка.

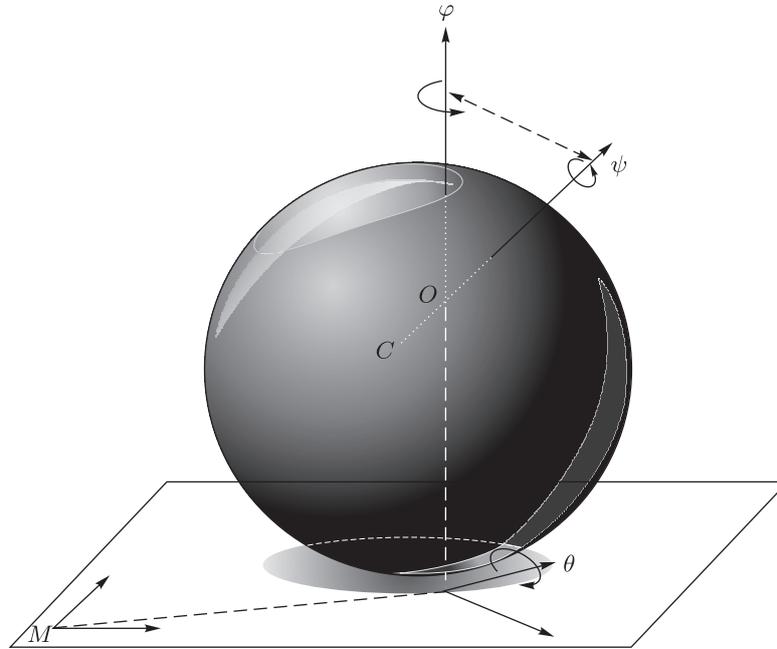


Рис. 5. Эйлеравы углы (φ, θ, ψ) , полностью определяющие состояние тела, с координатами центра масс O , заданными в инерциальной системе с центром M .

Вектор (относительного) положения тела имеет вид

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3, \tag{3.1}$$

или $\mathbf{x} = (x, y, z)_{Oxyz} = (X, Y, Z)_{OXYZ}$. Заметим, что системы отсчета (II) и (III) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x &= X \cos \theta - Z \sin \theta, \\ y &= Y, \\ z &= X \sin \theta + Z \cos \theta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Системы отсчета (II) и (III) вращаются с относительными угловыми скоростями

$$\begin{aligned} \Omega_{II} &= (0, 0, \dot{\varphi})_{OXYZ} = (-\dot{\varphi} \sin \theta, 0, \dot{\varphi} \cos \theta)_{Oxyz}, \\ \Omega_{III} &= (-\dot{\varphi} \sin \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi} \cos \theta)_{Oxyz}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ содержит, кроме того, угловую скорость $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + n \mathbf{k} = \\ &= \dot{\psi} \sin \theta \mathbf{e}_1 + \dot{\theta} \mathbf{e}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \mathbf{e}_3 = \\ &= (n - \dot{\varphi} \cos \theta) \sin \theta \mathbf{e}_1 + \dot{\theta} \mathbf{e}_2 + (\dot{\varphi} \sin^2 \theta + n \cos \theta) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $n \equiv \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta$ — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось Oz , более известная как *спин*. Далее мы будем пользоваться обозначением $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i, \omega_j, \omega_k)$. В соответствии с этим будем обозначать через \mathbf{I} тензор инерции сферы, тогда угловой момент сферы будет равен

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} &= -A\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{i} + A\dot{\theta} \mathbf{j} + Cn \mathbf{k} = \\ &= (Cn - A\dot{\varphi} \cos \theta) \sin \theta \mathbf{e}_1 + A\dot{\theta} \mathbf{e}_2 + (A\dot{\varphi} \sin^2 \theta + Cn \cos \theta) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Точка контакта Q имеет координаты

$$\begin{aligned} Q &= \left(-h^2(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta}{h(\theta)} \right), 0, -h^2(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta}{h(\theta)} \right) \right)_{Oxyz} = \\ &= (\epsilon \sin \theta, 0, \epsilon \cos \theta - R)_{OXYZ} = (R \sin \theta, 0, \epsilon - R \cos \theta)_{Oxyz}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Скорость точки контакта Q равна

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{OQ}$ означает вектор, проведенный от центра масс O к точке контакта Q , а \mathbf{v}_O — скорость центра масс. Полагая $\mathbf{v}_O = U\mathbf{e}_1 + V\mathbf{e}_2 + W\mathbf{e}_3$ и воспользовавшись тем фактом, что $Q = (h'(\theta), 0, -h(\theta))_{OXYZ}$, получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} &= (-\dot{\theta}h(\theta), \sin \theta(\epsilon\dot{\varphi} + R\dot{\psi}), -\dot{\theta}h'(\theta))_{OXYZ} = \\ &= (-\dot{\theta}h(\theta), \sin \theta(\epsilon\dot{\varphi} + R(n - \dot{\varphi} \cos \theta)), -\dot{\theta}h'(\theta))_{OXYZ}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом,

$$\mathbf{V}_Q = (U - \dot{\theta}h(\theta), V + \sin \theta(\epsilon\dot{\varphi} + R(n - \dot{\varphi} \cos \theta)), W - \dot{\theta}h'(\theta))_{OXYZ}. \quad (3.9)$$

Тот факт, что сфера остается в контакте со столом, выражается (голономной) связью

$$Z_O = h(\theta) = R - \epsilon \cos \theta, \quad (3.10)$$

где $h(\theta)$ — высота центра масс O над столом (ср. рис. 4). Из этого условия следует, что \mathbf{e}_3 -компонента вектора \mathbf{v}_O имеет вид

$$W \equiv \frac{d}{dt} Z_O = \dot{\theta}h'(\theta) = \epsilon\dot{\theta} \sin \theta, \quad (3.11)$$

так что Z -компонента вектора \mathbf{V}_Q равна нулю в соответствии с наложенным условием.

Заметим, что физическая интерпретация вектора \mathbf{V}_Q требует учета явления *скольжения*. В случае $\mathbf{V}_Q \neq 0$ тело скользит по поверхности. Наоборот, вращательное движение тела характеризуется тем фактом, что $\mathbf{V}_Q = 0$.

Уравнения движения будем выводить в духе Ньютона, как следствие воздействия внешних сил. На тело действуют следующие силы:

(I) гравитационная сила $\mathbf{G} = -mge_3$, где m — полная масса сферы;

(II) сила $\mathbf{F}_Q = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_f$, действующая на точку контакта Q . Здесь $\mathbf{R}_n = R_n \mathbf{e}_3$ — нормальная сила реакции опоры в точке Q (обусловленная жесткостью поверхности), \mathbf{R}_f — сила трения. Для полноты упомянем работу [20], где предложена математическая модель китайского волчка, учитывающая упругие свойства стола и волчка.

Трение представляет собой силу сопротивления, действующую между телами, которая стремится препятствовать движению и затормозить его. Обычно различают трение покоя (сила трения мешает привести в движение покоящееся тело) и трение движения (сила трения стремится замедлить движение тела). Мы предполагаем, что сила трения полностью обусловлена скольжением сферы вдоль поверхности, и пренебрегаем всеми другими источниками трения. Силы трения могут иметь сложный вид, и для них существуют различные модели. Мы принимаем гипотезу *вязкого трения* [9, 15, 21] и предполагаем, что сила трения имеет вид

$$\mathbf{R}_f = -\mu R_n \mathbf{V}_Q, \quad (3.12)$$

где μ — коэффициент трения *скольжения* с размерностью (скорость)⁻¹. Вектор \mathbf{R}_f пропорционален величине силы нормальной реакции опоры и постепенно убывает до нуля $\mathbf{V}_Q \rightarrow 0$. (Альтернативной моделью силы трения является так называемое кулоновское трение $\mathbf{R}_f = -\mu R_n (\mathbf{V}_Q / |\mathbf{V}_Q|)$. Такая модель неприменима при $\mathbf{V}_Q \rightarrow 0$ из-за сингулярной природы этой силы при $\mathbf{V}_Q = 0$.) Эйлеравы уравнения движения для сферы

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{F}_Q \quad (3.13)$$

описывают эволюцию кинетического момента \mathbf{L} в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с частотой $\boldsymbol{\Omega}$ под влиянием момента силы $\mathbf{q} \times \mathbf{F}_Q$. Уравнение движения центра масс O во вращающейся системе имеет вид

$$m \left(\frac{d\mathbf{v}_O}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_O \right) = -\mathbf{G} + \mathbf{F}_Q. \quad (3.14)$$

В координатах системы отсчета (III) уравнения движения (3.13) принимают вид

$$\begin{aligned} A\ddot{\varphi} \sin \theta &= (Cn - 2A\dot{\varphi} \cos \theta)\dot{\theta} + z_Q F_Y, \\ A\ddot{\theta} &= -\dot{\varphi} \sin \theta (Cn - A\dot{\varphi} \cos \theta) + Z_Q F_X - X_Q R_n, \\ C\dot{n} &= x_Q F_Y, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)_{Oxyz} = (X_Q, Y_Q, Z_Q)_{OXYZ}$ и $\mathbf{F}_Q = (F_X, F_Y, F_Z)_{OXYZ}$. Из уравнения движения центра масс (3.14) в координатах системы отсчета (II) получаем

$$\begin{aligned} m(\dot{U} - \dot{\varphi}V) &= F_X, \\ m(\dot{V} + \dot{\varphi}U) &= F_Y, \\ m\dot{W} &= R_n - mg. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вспомнив, что $W = \dot{\theta}h'(\theta)$, из последнего уравнения этой группы можно вывести выражение для R_n :

$$R_n = mg + m \frac{d}{dt} (\dot{\theta}h'(\theta)) = mg + m\epsilon \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right). \quad (3.17)$$

Уравнения движения (3.15) и (3.16) можно записать в виде системы из шести связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в переменных $(u, v, \alpha, \varphi, \beta, \theta, n)$, где $\alpha \equiv \dot{\varphi}$, $\beta \equiv \dot{\theta}$, $u \equiv mU$, $v \equiv mV$.

Полагая для простоты $m = 1$, можно представить эти уравнения в стандартной форме $\dot{b} = f(b)$ (при $\sin \theta \neq 0$):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{C}{A} n \beta - 2\alpha \beta \cos \theta + z_Q \frac{F_Y}{A} \right], \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{A} [\alpha \sin \theta (A\alpha \cos \theta - Cn) - R_n X_Q + Z_Q F_X], \\ \dot{\theta} &= \beta, \\ \dot{n} &= \frac{x_Q F_Y}{C}, \\ \dot{u} &= \alpha v + F_X, \\ \dot{v} &= -\alpha u + F_Y, \\ \dot{\varphi} &= \alpha, \\ \dot{\psi} &= n - \alpha \cos \theta.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Следует напомнить, что величины R_n, F_X, F_Y зависят также от других переменных. Например, из (3.17) и (3.18) получаем

$$R_n = \frac{g + \beta^2 h''(\theta) + h'(\theta) \alpha \sin \theta (\alpha \cos \theta - Cn/A)}{1 + h'(\theta)/A [-h(\theta) \mu(U - \beta h(\theta)) + h'(\theta)]}.\tag{3.19}$$

Выше мы наложили требование $R_n \geq 0$. Если снять это условие, сфера теряет контакт с поверхностью. Выражения для F_X и F_Y аналогичным образом следуют из (3.12).

Важно понимать, что некоторая часть структуры уравнений движения (3.18) обусловлена симметрией. Напомним, что симметрия представлена евклидовой группой $E(2)$ (включающей трансляции, вращения и отражения в плоскости Mxy) и группой вращения $SO(2)$, действующей как вращение сферы вокруг ее оси симметрии. Влияние евклидовой симметрии проявляется в том, что правая часть уравнений движения не содержит информации о положении сферы на поверхности. Аналогично, вследствие вращательной симметрии уравнения не содержат в явном виде угла φ . Систему можно рассматривать как три связанных системы со связью типа *косого произведения*: эволюция величин α, β, θ и n не зависит от u, v и φ , а эволюция u и v не зависит от φ . Заметим также, что положение центра масс по отношению к поверхности (в координатах Mxy) в принципе можно найти, интегрируя скорости u и v по времени. Поскольку мы учитываем трение, теорема Нётер не применима, так что указанные группы симметрии не должны приводить (и не приводят) к сохраняющимся величинам. Однако, как установил с помощью приближенных рассуждений Джеллетт [8] и впоследствии доказал Раус [6], системе (3.18) соответствует следующая сохраняющаяся величина:

$$J = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{q}.\tag{3.20}$$

В самом деле, из (3.13) следует $(d\mathbf{L}/dt + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}) \perp \mathbf{q}$, так что

$$\frac{d}{dt} J = -\mathbf{L} \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{q} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q} \right) = -(Cn - A\dot{\varphi} \cos \theta) \underbrace{h'(\theta)^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \theta}{h'(\theta)} \right)}_{=0} = 0.\tag{3.21}$$

Заметим, что инвариант Джеллетта можно записать в виде [10, 15, 21]

$$J = Cn(R \cos \theta - \epsilon) + A\dot{\varphi} R \sin^2 \theta.\tag{3.22}$$

4. ω -предельные множества представляют относительные равновесия

Наша цель состоит в описании асимптотической динамики эксцентрической сферы. Напомним, что подмножество фазового пространства является ω -предельным множеством, если это множество аккумулируется орбитами (направленными вперед). Сила трения, нарушая гамильтонову природу динамики, сильно упрощает асимптотическую динамику. Это связано с тем фактом, что при наличии трения энергия, которая сохранялась бы в отсутствие трения, почти всегда убывает вдоль решений.

Энергия равна $E = T + V$, где $T = T_{\text{rot}} + T_{\text{tr}}$ — кинетическая энергия, состоящая из вращательной и трансляционной частей, $V = mgh(\theta)$ — потенциальная энергия. При нашем выборе переменных имеем $T_{\text{rot}} = (1/2)(A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2)$ и $T_{\text{tr}} = (1/2)m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, где $\dot{z} = \epsilon t \sin \theta \dot{\theta}$.

Лемма 4.2 (см. [13]). *Энергия E есть функция Ляпунова (напомним, что функция Ляпунова не возрастает вдоль орбит) для системы (3.18). В частности,*

$$\frac{d}{dt}E = \mathbf{V}_Q \cdot \mathbf{R}_f \leq 0. \quad (4.1)$$

Поскольку вектор \mathbf{R}_f параллелен (и противоположен) вектору \mathbf{V}_Q , производная $(d/dt)E$ обращается в нуль в том и только том случае, если равен нулю вектор \mathbf{V}_Q . Видно, что функция $E(t)$ убывает монотонно и, следовательно, может служить подходящей функцией Ляпунова. Кроме того, эта функция аналитична, так что вдоль орбит она либо строго убывает, либо постоянна. Энергия E постоянна только при $\mathbf{V}_Q = 0$, то есть в отсутствие трения. Таким образом, ω -предельные множества должны состоять из орбит, которые не испытывают трения. Мы покажем, что такие орбиты являются *относительными равновесиями*.

Предложение 4.2. *Решения соответствуют постоянной энергии, только если они являются относительными равновесиями по отношению к действию группы $SO(2) \times SO(2)$.*

Доказательство. Мы уже пришли к выводу, что вектор \mathbf{V}_Q должен быть равен нулю вдоль любой орбиты в ω -предельном множестве. Непосредственное вычисление показывает, что из $\mathbf{V}_Q = (d/dt)\mathbf{V}_Q = 0$ действительно следует $\dot{\varphi} = \dot{X} = 0$, так что такое решение должно быть относительным равновесием $SO(2) \times SO(2)$.

Это фактически совпадает с тем, что мы и ожидали получить. Если M есть подмножество фазового пространства, соответствующее отсутствию трения, то в общем случае крайне маловероятно найти неравновесное решение, которое полностью лежит внутри M .

5. Устойчивость и бифуркации относительных равновесий

Учитывая, что относительные равновесия представляют единственные асимптотические состояния, возможные при наличии трения, в этом разделе мы найдем такие решения, соответствующие постоянной энергии, используя явные уравнения движения (3.15)–(3.16) (см. также [5, 13, 15]). При $\dot{\varphi} = \text{const}$ и $\mathbf{V}_Q = 0, \mathbf{R}_f = 0$ уравнения движения дают $\dot{\alpha} = 0$,

$\dot{\beta} = 0, \beta = 0, \dot{n} = 0, U = 0, W = 0$ и

$$\begin{aligned} \alpha V &= 0, \\ \alpha \sin \theta (A\alpha \cos \theta - Cn) - mg\epsilon \sin \theta &= 0, \\ V + [R(n - \alpha \cos \theta) + \epsilon\alpha] \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Эти уравнения имеют решения трех типов. Линейный анализ устойчивости этих решений методически отличается от используемого в [13, 14].

Вертикальные состояния

1) Вертикальное состояние $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} U = V = 0, \quad \theta = 0, \quad n = \text{произвольная постоянная}, \\ \alpha = \dot{\varphi} = \text{неопределенная постоянная}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Волчок вращается вокруг своей оси с центром масс под геометрическим центром.

2) Вертикальное состояние $\theta = \pi$:

$$\begin{aligned} U = V = 0, \quad \theta = \pi, \quad n = \text{произвольная постоянная}, \\ \alpha = \dot{\varphi} = \text{произвольная постоянная}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Волчок вращается вокруг своей оси с центром масс над геометрическим центром.

Промежуточные состояния

Для таких решений имеем $U = V = 0, 0 < \theta < \pi$; величины n, α и θ связаны уравнениями

$$n = \alpha \cos \theta - \frac{\epsilon}{R}\alpha, \quad (5.4)$$

$$\alpha(A\alpha \cos \theta - Cn) - mg\epsilon = 0. \quad (5.5)$$

Исключая отсюда n , находим

$$\alpha^2 = \frac{mg\epsilon}{(A - C) \cos \theta + C(\epsilon/R)}. \quad (5.6)$$

Таким образом, условие существования промежуточных состояний имеет вид

$$\left(\frac{A}{C} - 1\right) \cos \theta + \frac{\epsilon}{R} > 0. \quad (5.7)$$

Естественно разбить решения на три группы в зависимости от соотношения между значениями параметров A/C и ϵ/R [21].

Группа I: $A/C < 1 - \epsilon/R$. Промежуточные состояния существуют при

$$\theta > \theta_{c1} = \arccos \left(\frac{\epsilon/R}{1 - A/C} \right), \quad 0 < \theta_{c1} < \frac{\pi}{2}. \quad (5.8)$$

Группа II: $1 - \epsilon/R < A/C < 1 + \epsilon/R$. Промежуточные состояния существуют при любых $0 < \theta < \pi$.



Группа III: $A/C > 1 + \epsilon/R$. Промежуточные состояния существуют при

$$\theta < \theta_{c_2} = \arccos \left(\frac{\epsilon/R}{1 - A/C} \right), \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{c_2} < \pi. \quad (5.9)$$

Как и в [10], далее мы сделаем эту классификацию более подробной. Заметим, что рассмотренные здесь промежуточные состояния соответствуют решениям с опрокидыванием, обсуждавшимся в [13].

Промежуточные состояния полностью определяются формулами (5.4), (5.5) и инвариантом Джеллетта J . Более точно, возведя равенство (3.22) в квадрат, с учетом (5.4) и (5.6) получаем

$$f(J^2, \cos \theta) = \frac{J^2}{mg\epsilon CR^2} \left[\left(\frac{A}{C} - 1 \right) \cos \theta + \frac{\epsilon}{R} \right] - \left[\left(\cos \theta - \frac{\epsilon}{R} \right)^2 + \frac{A}{C} (1 - \cos^2 \theta) \right]^2 = 0. \quad (5.10)$$

Следующая теорема суммирует результаты изучения линейной устойчивости и локальных бифуркаций, изображенных на рисунке 3 (ср. [21]), ее доказательство приводится в приложении. Мы выделим шесть различных групп в зависимости от соотношения между отношением A/C и эксцентricностью ϵ/R . В литературе результаты ранее выражались в переменных n_0 и n_π , относящихся к условиям начального вращения в вертикальном состоянии. Здесь $n_0 \equiv J/C(R - \epsilon)$ есть значение спина n при $\theta = 0$ для движения с инвариантом Джеллетта J . Аналогично, $n_\pi \equiv -J/C(R + \epsilon)$ означает спин решения с инвариантом Джеллетта J при $\theta = \pi$. Заметим, что при заданном значении инварианта Джеллетта J эти спины связаны соотношением $n_0 = -n_\pi(R + \epsilon)/(R - \epsilon)$. Далее введем определения

$$n_\pm \equiv \sqrt{\frac{\pm mg\epsilon}{C[(1 \pm \epsilon/R) - A/C]}} (1 \pm \epsilon/R), \quad (5.11)$$

$$b \equiv \frac{\epsilon/R - \sqrt{(1/3)A/C(1 - A/C - (\epsilon/R)^2)}}{1 - A/C}$$

и $\theta_b \equiv \arccos b$, а также $c = (\epsilon/R)/(1 - A/C)$ и $\theta_c \equiv \arccos c$.

Теорема 5.1. *Бифуркационные диаграммы эксцентricческой сферы, вращающейся на ровной поверхности с малым трением, относятся к одной из следующих шести категорий (рис. 3).*

Группа I: $A/C - 1 < -\epsilon/R$.

1) Вертикальное состояние $\theta = 0$ устойчиво при любом значении J .

2) Вертикальное состояние $\theta = \pi$ устойчиво при $|n_\pi| > n_+$ и неустойчиво в обратном случае.

3) Промежуточные состояния существуют при всех значениях θ , удовлетворяющих неравенству $\theta > \theta_c$.

Группа Ia: $b < -1$. Вся ветвь промежуточных состояний неустойчива.

Группа Ib: $b > -1$. Ветвь промежуточных состояний содержит кратную точку при $\theta = \theta_b$. Ветвь с $\theta > \theta_b$ устойчива, ветвь с $\theta < \theta_b$ неустойчива.

Группа II: $-\epsilon/R < (A/C - 1) < \epsilon/R$.



1) Вертикальное состояние $\theta = 0$ устойчиво при $|n_0| < n_-$ и неустойчиво в обратном случае.

2) Вертикальное состояние $\theta = \pi$ устойчиво при $|n_\pi| > n_+$ и неустойчиво в обратном случае.

3) Промежуточные состояния существуют при всех θ . Выделим следующие три подгруппы.

Группа Ia: $(A/C - 1) < -(\epsilon/R)^2$ и $|b| < 1$. Возникает кратная бифуркация промежуточных состояний.

Группа Ib: $(A/C - 1) > -(\epsilon/R)^2$ или $|b| > 1$. Вся ветвь промежуточных состояний устойчива.

Группа Ic: $(A/C - 1) < -(\epsilon/R)^2$ и $b < -1$. Вся ветвь промежуточных состояний неустойчива.

Группа III: $(A/C - 1) > \epsilon/R$.

1) Вертикальное состояние $\theta = 0$ устойчиво при $|n_0| < n_-$.

2) Вертикальное состояние $\theta = \pi$ неустойчиво при всех J .

3) Промежуточные состояния существуют при $\theta < \theta_c$ и все устойчивы.

Доказательство теоремы 5.1 можно найти в работе [10]; для полноты мы приводим в приложении доказательство, основанное на непосредственном вычислении.

6. Прототип сферического китайского волчка

Методы быстрого прототипирования позволяют создавать твердые модели на основе компьютерных расчетов. Растущая популярность этих методов в промышленности обусловлена снижением стоимости и сокращением времени при использовании этих моделей на ранних стадиях изготовления для улучшения качества конечной продукции. Эти методы можно также применять для проверки справедливости и точности математических моделей и, не в последнюю очередь, для повышения активности студентов при обучении их в процессе практической работы. Студенты могут воплощать свои проекты в жизнь, достигая при этом более глубокого понимания абстрактных концепций. Мы сделали модель сферического китайского волчка для целей обучения в Product Development Laboratory of Howest.

Как уже отмечалось, для реализации игрушки «три-в-одном» нужна аксиально симметричная сфера с управляемыми параметрами A/C и ϵ/R . Мы рассмотрим три возможные конструкции:

1) сплошная сфера с центральным цилиндрическим отверстием, в котором может двигаться установочный винт;

2) полая сфера с цилиндрическим стержнем, на котором может перемещаться груз;

3) полая сфера с тороидальной полосой на экваторе, согласованной с цилиндрическим стержнем, на который можно навинчивать груз.

Из бифуркационной диаграммы на рисунке 2 видно, что можно выделить три основные группы, задавая параметр ϵ/R и изменяя отношение A/C . Поэтому важно понимать, как в этих трех конструкциях будет меняться соотношение между A/C и ϵ/R при перемещении груза. Мы пользовались программным пакетом Maple для вычисления A/C и ϵ/R в зависимости от расстояния средней точки движущегося груза до центра сферы, которое мы далее будем обозначать через Z_2 . Учитывались физические параметры: размер различных частей (радиус, вес, толщина) и плотность материалов.

Мы обнаружили, что в случае сплошной сферы можно реализовать все три типа состояний, тогда как в случае полой сферы для этого необходима модификация конструкции. Модификация привела к третьей из указанных конструкций. Далее мы обсудим результаты для реализованных прототипов. Все они были получены с использованием печатной технологии на основе моделирования методом наплавления (Fused Deposition Modeling, FDM) материала ABSplus, применялось стандартное оборудование Dimension SST1200es.

6.1. Сфера с цилиндрическим отверстием и установочным винтом

Мы реализовали три различных волчка первой конструкции, варьируя геометрические размеры. Это было сделано, поскольку, как показывают расчеты, для заданных материалов некоторые зоны оказываются труднодостижимыми или очень узкими (см. рис. 7). Волчок состоит из сферы с цилиндрической полостью, проходящей через центр, в которой находится регулируемая цилиндрическая железная проволока (установочный винт), как показано на рисунке 6. С помощью кверномера можно определить, на какой глубине внутри полости находится установочный винт. Положение средней точки винта по отношению к центру сферы обозначается через Z_2 . Отверстие подходит для установочного винта M12. Размеры игрушки выбирались на основе расчетов с использованием математической модели. Диаметр сферы был выбран таким, чтобы игрушку было удобно закручивать рукой. При диаметре сферы 50 мм подходящими оказываются полость радиуса 5.5 мм, заполненная винтом высотой 15 мм, либо полость радиуса 1.5 мм с винтом высотой 3 мм (см. рис. 7). Плотность составляет 1.08 г/см^3 для материала ABSplus и 7.87 г/см^3 для установочного винта.

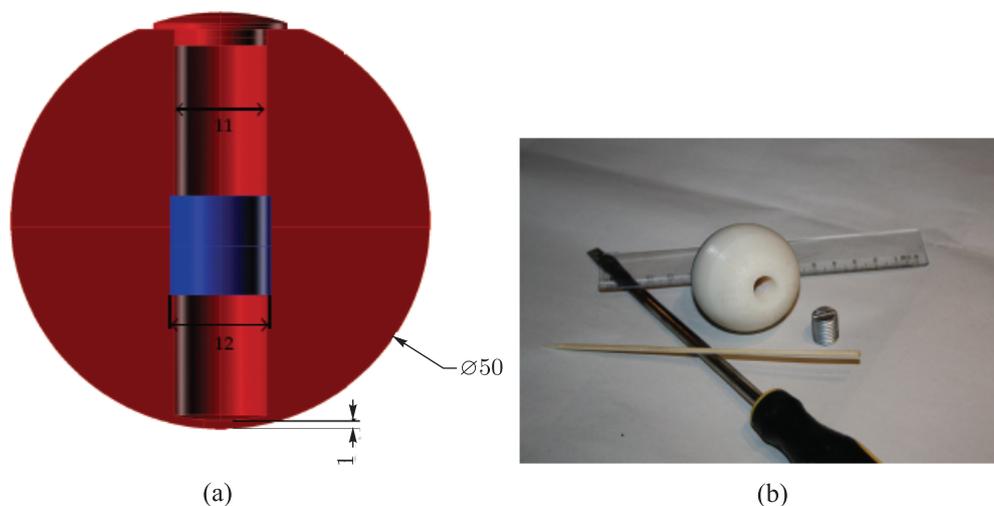


Рис. 6. Первая модель сферического китайского волчка.

Модель аксиально симметрична, поэтому от Z_2 зависят только эксцентricность ϵ и момент инерции A , их легко вычислить; момент инерции C остается постоянным при перемещении установочного винта вверх и вниз. На рисунке 7 величины $(A/C) - 1$, $\pm\epsilon/R$ и $-(\epsilon(Z_2)/R)^2$ показаны в зависимости от Z_2 для прототипа с винтом M12 (a) и с винтом M3 (b). Печатный прототип на рисунке 6 представляет конструкцию первого типа и согласно математическому расчету должен проявлять следующее поведение. При значении Z_2 между 0 и 7.95 мм игрушка не обнаруживает динамики китайского волчка независимо от начальной скорости вращения (тип I), при Z_2 между 7.95 мм и 17.76 мм наблюдается полная

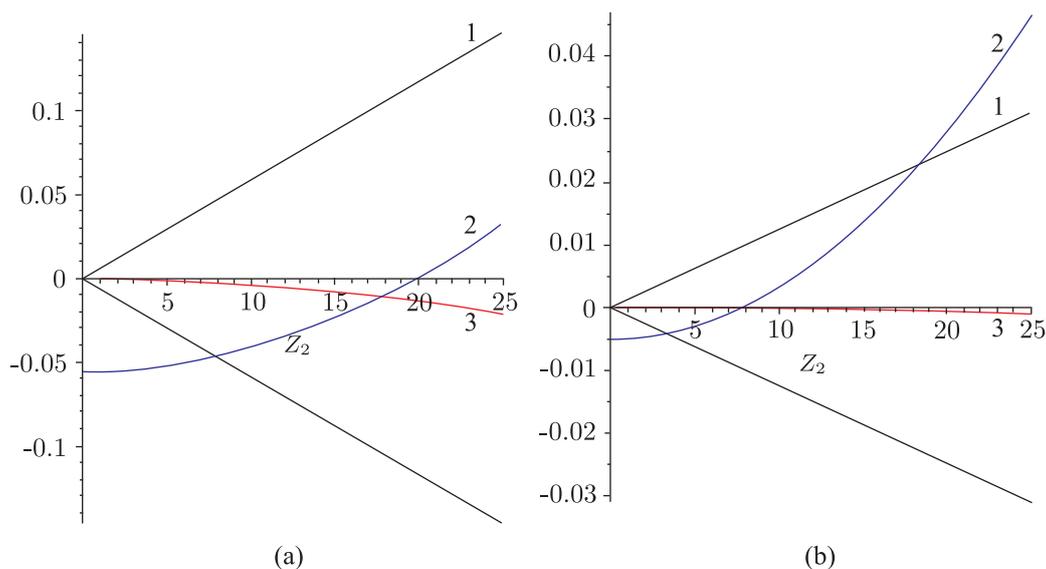


Рис. 7. Различные режимы вращения китайского волчка в зависимости от положения Z_2 средней точки установочного винта. Черными линиями (1) показаны прямые $\pm\epsilon(Z_2)/R$, синими (2) — кривая $A(Z_2)/C - 1$, красными (3) — кривая $-(\epsilon(Z_2)/R)^2$: (а) показаны результаты для печатного прототипа с винтом M12 (см. рис. 6), (б) для прототипа той же формы с винтом M3.

динамика такого рода (тип Пс). При Z_2 , большем 17.76 мм, волчок проявляет поведение типа Пв (неполное опрокидывание имеет место при недостаточно большой начальной скорости вращения).

Мы многократно (более 50 раз) запускали волчок с различным положением груза и каждый раз регистрировали случаи опрокидывания, неопрокидывания и промежуточного положения. Типичные результаты для пяти экспериментов приводятся в таблице 1. Заметим, что поскольку волчок закручивался рукой, имело место некоторое отклонение от начального положения $\theta = 0$. Опрокидывание и неопрокидывание преимущественно наблюдалось у конструкций типа Па и I соответственно. У конструкций типа Пв ожидаемое поведение (опрокидывание) не наблюдалось, всегда волчок принимал наклонное положение. Это связано с тем обстоятельством, что мы не в состоянии закрутить волчок рукой достаточно быстро, а также с тем, что установочный винт, выступающий из волчка, не соответствует идеальным условиям для закручивания. Как показывают наши наблюдения, волчок ведет себя в соответствии с предсказаниями математической модели. В частности, опрокинутое и наклонное положения при $Z_2 = 5$ можно объяснить наличием ветви промежуточных состояний и устойчивого положения $\theta = \pi$, в которые волчок может попасть, если он закручен не точно в положении $\theta = 0$ (см. рис. 3). Наклонное положение при $Z_2 = 15$ обусловлено тем, что мы закручивали волчок недостаточно быстро.

У волчка с винтом M3 различаются следующие режимы в зависимости от Z_2 : при Z_2 от 0 до 3.33 мм модель не обнаруживает динамики китайского волчка независимо от начальной закрутки (тип I); при значениях Z_2 между 3.33 мм и 18.20 мм наблюдается полная динамика (тип II). При Z_2 , большем 18.20 мм, наблюдается поведение типа III (неполное опрокидывание). Волчок также закручивался не менее 50 раз, и регистрировались такие же наблюдения, как и в предыдущем случае.

Таблица 1. Китайский волчок, закручиваемый рукой. Наблюдаемые проявления различных режимов в 5 экспериментах

Глубина установочного винта	17.5	12.5	7.5	2.5	-2.5
Z_2	0	5	10	15	20
Неопрокидывание	5	3	0	0	0
Опрокидывание	0	1	5	4	0
Наклонное положение	0	1	0	1	5
Теория	I (сфера)	I	IIa	IIb	IIb

Таким образом, изученный образец дает действующую игрушку «три-в-одном», обладающую, однако, некоторыми недостатками:

- 1) установочный винт может отломиться при интенсивном использовании;
- 2) при наличии трех зон по крайней мере одна из них будет мала.
- 3) приходится пользоваться каверномером, чтобы узнать, установлен ли винт в центре.

Было сделано несколько расчетных попыток улучшения конструкции, например, путем добавления отверстий в сплошную сферу. Эти попытки не привели к успеху, поэтому другие образцы изготовлены не были. Вместо этого мы сосредоточились на сфере с цилиндрическим стержнем.

6.2. Сфера с цилиндрическим стержнем

Вторая конструкция состоит из сферической оболочки с проходящим через центр цилиндрическим сплошным стержнем, на котором находится симметричная шайба, которую можно устанавливать на разной высоте. При такой конструкции можно открывать сферу и изменять положение груза, передвигая его вверх или вниз, после чего сферу можно закрыть и закрутить (см. рис. 8).

Преимуществом этой конструкции является возможность использовать свой цвет полимера для каждой из сторон, чтобы сделать динамику более наглядной и чтобы можно было отмечать критические положения стержня. В то время как в первой конструкции можно было использовать установочные винты различной длины, здесь внутри одной игрушки можно помещать грузы разной длины и ширины. Кроме того, можно брать стержни из различных материалов.

Однако расчет показал, что игрушку «три-в-одном» трудно создать при выборе в качестве материала акрилонитрилбутадиенстирола (АБС), железа и нейлона. Мы кратко перечислим наши результаты, чтобы иметь основу для дальнейшего улучшения, которое привело нас к третьему прототипу. Мы пробовали в качестве материала для стержня железо, нейлон и АБС. Нейлон и АБС работали лучше. Применяя железный стержень в сочетании с физическими параметрами, позволяющими легко запускать волчок, мы не сумели наблюдать все три зоны (конкретные значения параметров приводятся ниже). Как показано на рисунке 9а, присутствует только третья зона, а это означает, что данный волчок никогда не опрокидывается полностью, а может лишь наклоняться на некоторый угол.

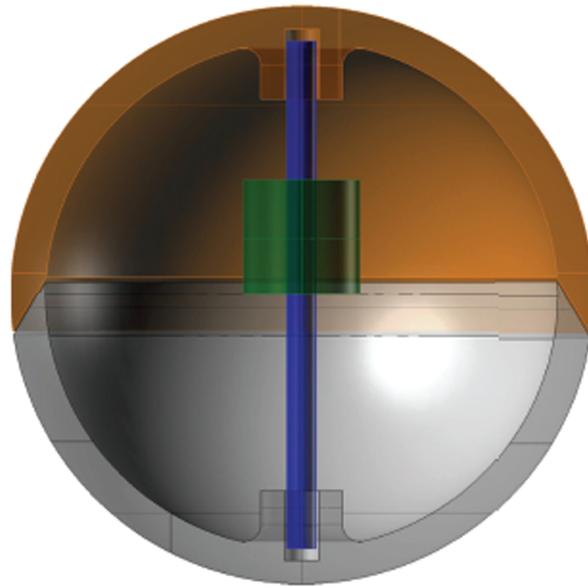


Рис. 8. Конструкция второго образца.

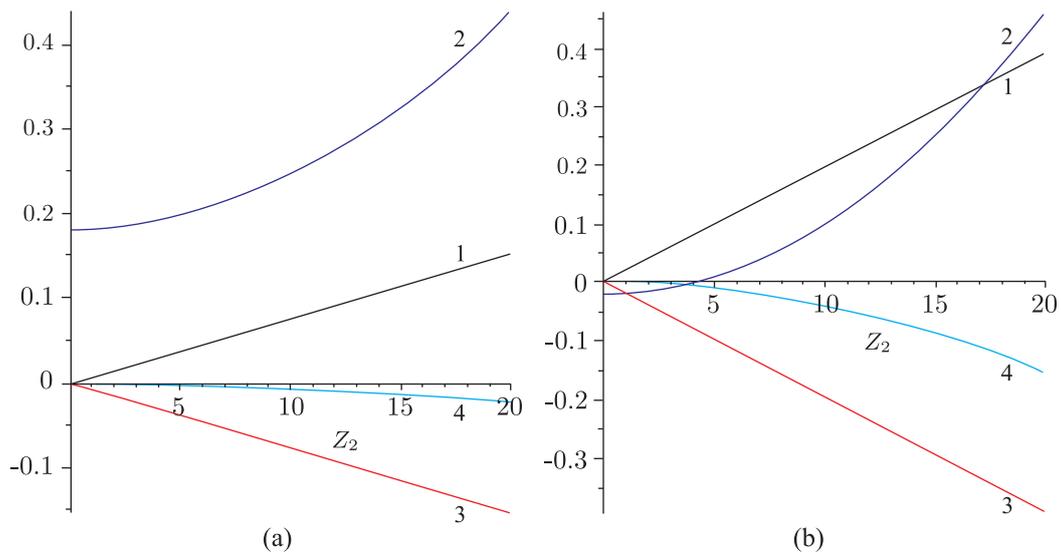


Рис. 9. (а) Различные режимы динамики волчка в зависимости от положения средней точки установочного винта. Черными линиями (1) показаны прямые $\pm\epsilon(Z_2)/R$, синими (2) — кривая $A(Z_2)/C - 1$, красными (3) — кривая $-(\epsilon(Z_2)/R)^2$. Физические параметры конструкции: радиус сферической оболочки из АБС 25 мм, толщина оболочки 2.5 мм, радиус железного цилиндрического стержня 3 мм, радиус (железного) груза 10 мм, высота груза 10 мм. (б) Различные режимы динамики волчка в зависимости от положения средней точки установочного винта. Черными линиями (1) показаны прямые $\pm\epsilon(Z_2)/R$, синими (2) — кривая $A(Z_2)/C - 1$, красными (3) — кривая $-(\epsilon(Z_2)/R)^2$. Физические параметры конструкции: радиус сферической оболочки из АБС 25 мм, толщина оболочки 2.5 мм, радиус нейлонного цилиндрического стержня 3 мм, радиус (железного) груза 10 мм, высота груза 10 мм.

Данная конструкция обладает аксиальной симметрией, так что от Z_2 зависят только эксцентricность ϵ и момент инерции A , которые легко вычислить, при этом момент

инерции C остается постоянным при движении груза вверх и вниз. Физические параметры конструкции следующие: радиус сферической оболочки 25 мм, толщина оболочки 2.5 мм, радиус цилиндрического стержня 3 мм, радиус груза 10 мм, высота груза 10 мм.

В случае стержня из нейлона или АБС можно добиться опрокидывания. Как показано на рисунке 9b, присутствуют зоны II и III; это означает, что можно наблюдать полное и неполное опрокидывание в зависимости от положения груза. Заметим, что часть синей кривой в зоне III очень мала, что делает затруднительным наблюдение наклонного режима. То же относится к части синей кривой в зоне I — она столь мала, что наблюдать неопрокинутое состояние на практике не удастся. Многократное повторение экспериментов с этим волчком лишь подтвердило указанные наблюдения. Это хорошая модель волчка типа II, однако наблюдать другие режимы на ней не удастся.

6.3. Сфера с тороидальной полосой и цилиндрическим стержнем

Третья конструкция состоит из сферической оболочки с тороидальной полосой вокруг экватора и проходящего через центр цилиндрического сплошного стержня, на котором находится симметричная шайба. Здесь также можно открывать сферу и изменять положение груза, передвигая его вверх или вниз, после чего сферу можно закрыть и закрутить (рис. 10).

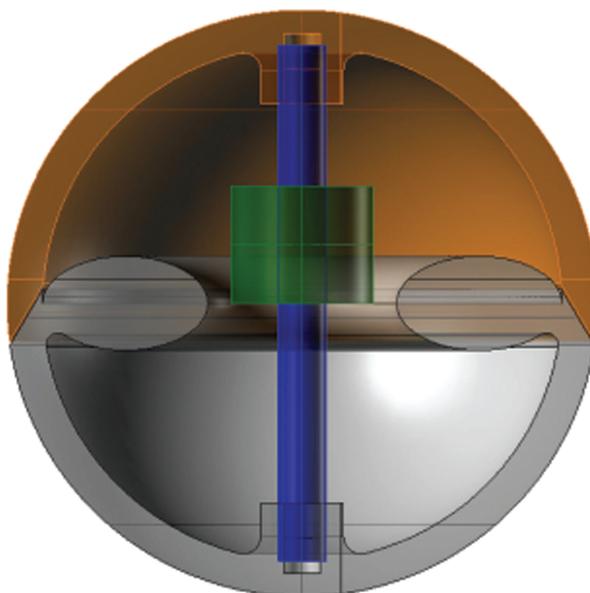


Рис. 10. Конструкция третьего образца.

Добавление тороидальной полосы имеет целью найти компромисс между сферической оболочкой и сплошной сферой. Конструкция по-прежнему аксиально симметрична, полоса позволяет легче открывать и закрывать сферу. Физические параметры: радиус сферической оболочки 25 мм, толщина оболочки 3 мм, радиус цилиндрического стержня 3 мм, радиус груза 6 мм, высота груза 10 мм. Полоса имеет вид тела вращения, которое получается при вращении вокруг стержня эллипса с полуосями длиной 7 мм и 4 мм. Стержень сделан из железа. Согласно математической модели, волчок должен вести себя следующим образом: при Z_2 от 0 до 4.14 мм система не обнаруживает динамики китайского волчка

(тип I), при значении Z_2 между 4.14 мм и 16.8 мм наблюдается полная динамика. При Z_2 , большем 16.8 мм, наблюдается тип III (неполное опрокидывание).

Волчок запускался много раз, позволяя без проблем наблюдать зоны I и II, предсказываемые математической моделью. Однако зону III вначале было наблюдать трудно, максимальное значение Z_2 , которое можно было получить на построенной модели, составляло всего 15 мм (из-за системы крепления стержня), и вдобавок получалось значение $\theta_c > 2\pi/3$, которое нелегко было увидеть. Однако при использовании различных грузов зона III становится видимой; например, так обстоит дело, когда железный груз имеет радиус 8 мм и высоту 5 мм. Мы приходим к выводу, что этот последний образец является хорошим кандидатом на роль игрушки «три-в-одном», хотя и возможна некоторая дальнейшая оптимизация физических параметров (рис. 11).

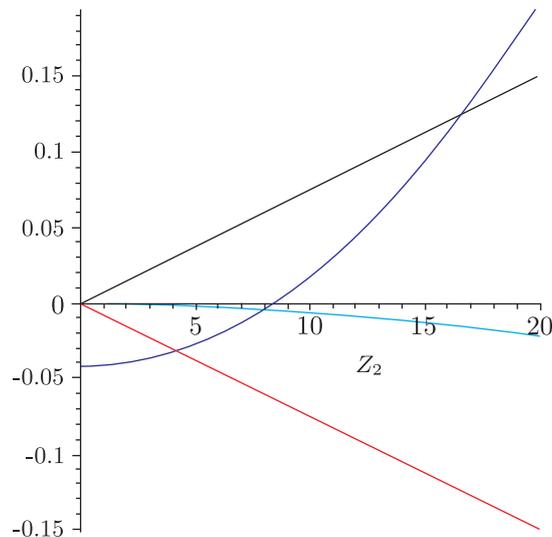


Рис. 11. (а) Различные режимы динамики волчка в зависимости от положения средней точки установочного винта. Черными линиями показаны прямые $\pm\epsilon(Z_2)/R$, синими — кривая $A(Z_2)/C - 1$, красными — кривая $-(\epsilon(Z_2)/R)^2$. Физические параметры конструкции: радиус сферической оболочки из АВС 25 мм, толщина оболочки 3 мм, радиус железного цилиндрического стержня 3 мм, радиус (железного) груза 6 мм, высота груза 10 мм, длина полуосей эллипса, порождающего тор, 7 мм и 4 мм.

7. Численные иллюстрации

7.1. Траектории системы

В этом разделе мы представим некоторые результаты моделирования по формулам (3.15)–(3.16). В основном будем рассматривать режим параметров группы II, когда волчок опрокидывается. В самом деле, опрокидывание происходит при начальном спине $|n_0| > \max(n_-, n_2 \equiv n_+(R + \epsilon)/(R + \epsilon))$. Соответствующие траектории лежат в (приведенном) 6-мерном фазовом пространстве (мы не учитываем уравнение для $\dot{\varphi}$). Здесь мы покажем их проекции в трехмерном подпространстве переменных (α, θ, n) .

На рисунке 12 показан ряд траекторий для китайского волчка группы IIb при начальных условиях $u = 0, v = 0, \theta = 0.01$, произвольном значении n и $\alpha = (1/2A)(Cn + \sqrt{C^2n^2 + 4Amg\epsilon})$. Другими исходными параметрами служат $m = g = 1$, коэффициент

трения $\mu = 0.04$, эксцентricность $\epsilon/R = 0.3$ и отношение моментов инерции $A/C = 0.92$. Точки с $n < n_-$ устойчивы, точки с $n > n_-$ неустойчивы. Пусть $n_* = -n_+(R + \epsilon)/(R - \epsilon)$ есть значение начального спина для угла $\theta = 0$ при значении инварианта Джеллетта, соответствующем возникновению устойчивости опрокинутого положения ($\theta = \pi$). Траектории, начинающиеся вблизи неустойчивого неперевернутого положения, притягиваются либо к одному из промежуточных состояний с $\theta > 0$ при $n_- < n < n_*$, либо к устойчивому состоянию $\theta = \pi$ при $n > n_*$. В последнем случае сфера полностью поднимается в устойчивое перевернутое вертикальное положение с конечным спином n , определяемым инвариантом Джеллетта. На врезках показаны колебания в непосредственной близости от фиксированных точек, которые зависят от точных начальных условий. Заметим, что изменение коэффициента μ не влияет на пункт конечного назначения фазовых траекторий, но влияет на время его достижения, по крайней мере в исследованной области значений параметров.

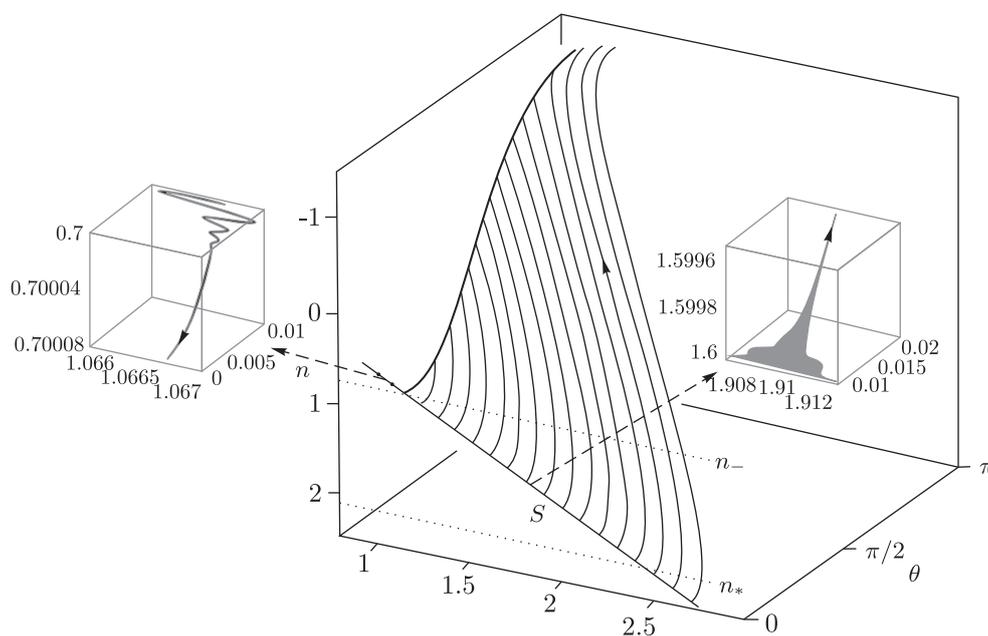


Рис. 12. Траектории системы (3.15)–(3.16), спроектированные на подпространство переменных (α, θ, n) для эксцентricной сферы группы Пб с коэффициентом трения $\mu = 0,04$. Жирная кривая соответствует промежуточным состояниям (5.4), (5.5) и (5.10). Прямая S на плоскости (α, n) представляет начальное условие $\alpha = (1/2A)(Cn + \sqrt{C^2n^2 + 4Amg\epsilon})$. При $n > n_-$ фиксированные точки на плоскости $\theta = 0$ неустойчивы. Траектории притягиваются к устойчивому промежуточному состоянию (точка на сплошной кривой) при $n_- < n < n_*$, либо к точке на плоскости $\theta = \pi$ (что соответствует опрокидыванию) при $n > n_*$. На двух врезках показаны подробности в начальном положении: одна из них соответствует случаю устойчивости, другая — случаю неустойчивости. Выбраны параметры $m = g = 1$, $\epsilon/R = 0.3$ и $A/C = 0.92$.

На рисунке 14 показан ряд траекторий для волчка группы Па с коэффициентом трения $\mu = 0.04$, стартующего теперь под углом, близким к перевернутому положению $\theta = \pi$. Физические параметры: $m = g = 1$, $\epsilon/R = 0.5$ и $A/C = 0.55$.

Из рисунка 3 следует, что траектории с началом вблизи перевернутого положения могут, в зависимости от начального спина, оставаться в окрестности значения $\theta = \pi$, спуститься вниз к значению $\theta = 0$, соответствующему неперевернутому положению, или оставаться в устойчивом промежуточном состоянии. Для более ясного представления о возможных

типах поведения мы воспользовались симметрией $(n, \alpha) \rightarrow (-n, -\alpha)$ и изобразили на рисунке 13 кривую промежуточных состояний на плоскости (J, θ) , указав при этом значения n , при которых происходит изменение типа устойчивости. Напомним, что при заданном θ соотношения (5.6) и (5.4) определяют значения α и n .

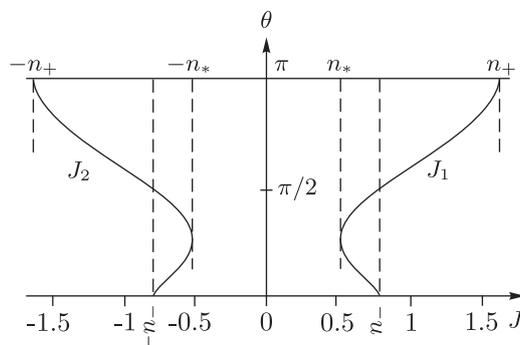


Рис. 13. Кривая промежуточных состояний (5.10) на плоскости (J, θ) .

Изображенные траектории получены при начальных условиях $u = 0, v = 0, \theta = \pi - 0.01$, произвольном значении n и одном из следующих значений α : $\alpha = -(Cn - \sqrt{C^2n^2 - 4Amg\epsilon})/(2A) \equiv s_1(n)$, $\alpha = -(Cn + \sqrt{C^2n^2 - 4Amg\epsilon})/(2A) \equiv s_2(n)$ или $\alpha = -Cn/(2A) \equiv s_3(n)$. Такой выбор был сделан, чтобы свести к минимуму изображение начальных колебаний в α -направлении. Мы исходим из состояния вблизи равновесия собственного вектора с положительным собственным значением, так что движение быстро эволюционирует от начального положения к неустойчивому направлению. Траектории, начинающиеся вблизи неустойчивого опрокинутого положения, будут либо достигать некоторого устойчивого промежуточного состояния с $\theta > \theta_b$ при $n_b < |n| < n_+$, либо опускаться в перевернутое вертикальное положение при $|n| < n_b$. Здесь n_b есть значение начального спина, соответствующее углу $\theta = \theta_b$, при котором меняется тип устойчивости промежуточных состояний. Точки на плоскости $\theta = \pi$ с $|n| > n_+$ устойчивы, и к ним будут притягиваться траектории с началом вблизи перевернутого состояния.

7.2. Трехмерная анимация

В этом разделе мы прокомментируем трехмерную анимацию, иллюстрирующую явления «опрокидывания» эксцентрической сферы или ее «зависания в промежуточном состоянии» (<http://cage.ugent.be/~bm/tippetop/tippetop.html>). В этих фильмах эксцентрическая сфера изображена как прозрачный шарик с волчком внутри. Мы уделяем основное внимание эксцентрическим сферам, относящимся к группам IIb и IIa (см. соответствующие бифуркационные диаграммы на рис. 3). Фильмы были изготовлены с использованием программного пакета Maple при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, результаты обрабатывались с привлечением пакетов Povray, Imagemagick и ffmpeg. Для лучшей различимости деталей движение в фильме показано с 5-кратным замедлением, так что 1 секунда занимает 5 секунд анимации при 30 кадрах в секунду. Чтобы яснее показать эволюцию, в каждом фильме отмечается текущее значение угла нутации θ .

В фильмах с волчком группы IIb можно видеть полное опрокидывание (см. http://cage.ugent.be/~bm/tippetop/tippetop_IIb_flip.mpg) и подъем в устойчивое промежуточное состояние (http://cage.ugent.be/~bm/tippetop/tippetop_IIb_IntSt_Comp.mpg). Для конструкции

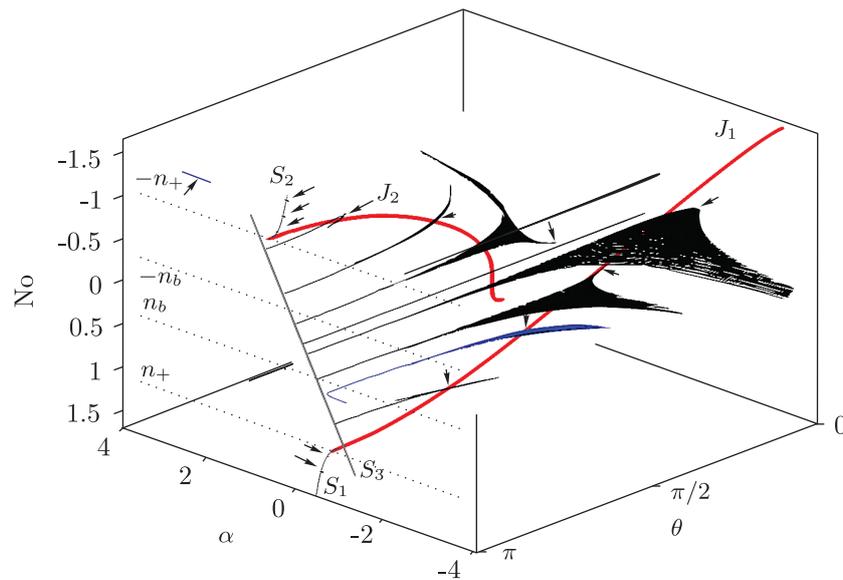


Рис. 14. Траектории системы (3.15)–(3.16), спроектированные на подпространство переменных (α, θ, n) для эксцентрической сферы группы Па с коэффициентом трения $\mu = 0.04$. Жирная кривая соответствует промежуточным состояниям (5.10). Линии s_1, s_2 и s_3 на плоскости (α, n) представляют кривые, на которых выбирается начальное условие для α . Начальный угол равен $\theta = \pi - 0.01$. Стрелками показано конечное положение. Точки на плоскости $\theta = \pi$ устойчивы при $|n| > n_+$ и неустойчивы в обратном случае. Траектории притягиваются к неперевернутому положению на плоскости $\theta = 0$ при $|n| < n_b$ либо, при выполнении обратного неравенства, достигают некоторой точки на красных кривых. Добавлены две траектории, чтобы показать сильные начальные колебания, когда значение α выбирается не на одной из кривых s_i . Выбраны параметры $m = g = 1$, $\epsilon/R = 0.5$, $A/C = 0.55$, $\mu = 0.04$.

группы Па показано, как волчок, закрученный в перевернутом состоянии, мигрирует в устойчивое промежуточное состояние (http://cage.ugent.be/~bm/tippetop/tippetop_llaComb.mpg).

В первом фильме можно видеть полное опрокидывание сферы (эффект китайского волчка) со следующими физическими параметрами: $m = 6$ г, $R = 1.5$ см, $e/R = 0.5$, $A = 0.82$ мг/м², $C = 0.7$ мг/м². Коэффициент трения μ составляет 0,3. Показаны 90 секунд движения, которые представлены 7.5 минутами фильма.

Второй фильм показывает движение к устойчивому промежуточному состоянию из неустойчивого неперевернутого или неустойчивого перевернутого положения. Начальные данные были выбраны таким образом, чтобы инвариант Джеллетта совпадал с таковым для устойчивого промежуточного состояния. Фильм соответствует 45 секундам движения волчка. Физические параметры здесь те же, что и в первом фильме, за исключением коэффициента трения μ , равного теперь 0.1. Начальные условия вблизи $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответствовали инварианту Джеллетта, приблизительно равному $0.84 \cdot 10^6$. Промежуточному состоянию соответствует угол $\theta = 134.5^\circ$.

Анимация волчка группы Па предназначена для иллюстрации того, как в зависимости от начальных условий волчок, закрученный в перевернутом положении ($\theta = \pi$), может опуститься либо до промежуточного состояния, либо в неперевернутое положение $\theta = 0$ (см. рис. 3). Физические параметры: $m = 6$ г, $R = 1.5$, эксцентricность $e = 50\%$, $A = 0.385$ мг/м², $C = 0.7$ мг/м². Коэффициент трения $\mu = 0.08$. В левой части картины мы наблюдаем переход волчка в неперевернутое состояние. При этом, однако, возникают

колебания угла θ . Справа мы видим движение при слегка отличном начальном состоянии к промежуточному состоянию. Здесь также наблюдаются колебания угла θ .

8. Дополнительные замечания

Глобальная динамика

В связи с теоремой 2.6 мы хотим подчеркнуть важную роль локальных бифуркационных диаграмм для глобальной динамики. Очевидно, что если мы имеем асимптотически устойчивое ω -предельное множество, бассейн притяжения для этого множества равен почти полномерному множеству фазового пространства, определяемому дополнением до устойчивых многообразий всех существующих (неустойчивых) ω -предельных множеств.

Остается проанализировать ситуацию, когда мы имеем два сосуществующих асимптотически устойчивых ω -предельных множества. Анализ бифуркаций показывает, что в таком случае сосуществующие устойчивые ω -предельные множества представляют собой вертикальные состояния.

Теорема 8.1. *ω -предельные множества эксцентрической сферы на ровной поверхности с малым трением представляют собой асимптотически устойчивые относительные равновесия (по отношению к группе $SO(2) \times SO(2)$). ω -предельное множество есть единственное относительное равновесие, при котором бассейн притяжения представляет дополнение устойчивых многообразий неустойчивых относительных равновесий (и, следовательно, является плотным и обладающим полной мерой в фазовом пространстве). В противном случае существует не более двух устойчивых относительных равновесий (вертикальных состояний), и система является бистабильной. В этом случае объединение бассейнов притяжения двух вертикальных состояний является дополнением устойчивого многообразия неустойчивых относительных равновесий, что представляет собой промежуточное состояние. Это объединение является плотным и обладает полной мерой в фазовом пространстве. Сепаратриса между двумя бассейнами притяжения (внутри множества уровня инварианта Джеллетта) состоит из устойчивого многообразия неустойчивого промежуточного состояния.*

Доказательство. Большая часть приведенного утверждения представляет собой прямое следствие существования энергии как функции Ляпунова (с учетом принципа Ла-Салля). Используя локальный бифуркационный анализ, легко проверить, что устойчивое многообразие промежуточного состояния, сосуществующего с двумя асимптотически устойчивыми вертикальными состояниями, имеет коразмерность один (внутри множества уровня инварианта Джеллетта) и делит фазовое пространство на две части.

Области бистабильности (в зависимости от инварианта Джеллетта J) находятся из локальных бифуркационных диаграмм, обсуждавшихся в теореме 5.1.

Замечание 8.2. Заметим, что конкретные значения n , при которых возникает изменение типа устойчивости стационарных состояний, не зависят от μ . Вязкое трение влияет на время, необходимое, чтобы орбита достигла заданной точки. Этот факт уже отмечался в работе [13] и мог быть доказан заранее применительно к нашим наблюдениям. Результаты остаются справедливыми и при более общей форме закона трения, пропорционального V_Q и подобного рассмотренному в работе [4]. Это означает, что изучение асимптотической динамики других (механических) систем, например, кельтских камней, можно значительно упростить путем введения в модель вязкого трения.

Модель качения

«Катящаяся» эксцентрическая сфера не опрокидывается. В этом разделе мы приведем простые соображения, показывающие, что в случае чистого качения эффект китайского волчка возникать не должен.

Задача для волчка при условии чистого качения (т. е. при выполнении неголономного ограничивающего условия $\mathbf{V}_Q = 0$) допускает приведение уравнений движения к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (см. обсуждение в работе [3]). В режиме чистого качения система уже не является диссипативной и допускает наличие трех сохраняющихся величин — энергии E , инварианта Джеллетта J (как и раньше) и раусиана $Routh$, введенного в работе [3],

$$Routh = \left[\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}mR^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}m \frac{C}{A} (R \cos \theta - \epsilon)^2 \right] \omega_{\mathbf{k}}^2. \quad (8.1)$$

«Опрокидывание» в модели качения нарушило бы сохранение величины $Routh$. В самом деле, из инварианта Джеллетта следует, что знак $\omega_{\mathbf{k}}$ при полном опрокидывании должен меняться, поскольку $\omega_{\mathbf{k}}(\theta = \pi) = -((R - \epsilon)/(R + \epsilon))\omega_{\mathbf{k}}(\theta = 0)$ и $R > \epsilon > 0$. Но это невозможно, если должно выполняться условие $Routh = \text{const}$.

В модели качения движение определяется функциональным соотношением вида $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. В самом деле, сохраняющимися величинам соответствуют три соотношения для компонент угловой скорости $\omega_{\mathbf{i}}, \omega_{\mathbf{j}}, \omega_{\mathbf{k}}$. Более детально, при заданном θ раусиан (8.1) задает $\omega_{\mathbf{k}}$, затем инвариант Джеллетта определяет $\omega_{\mathbf{i}}$, и, наконец, энергия E определяет скорость опрокидывания $\dot{\theta} = \omega_{\mathbf{j}}$ (ср. (3.4)), что дает функциональное соотношение вида $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Заметим, что из условия $\mathbf{V}_Q = 0$ и (3.9) можно найти $U(\theta), V(\theta)$. При таком подходе, как отмечается в [3], необходимо проверять, является ли найденное решение физически возможным, то есть необходимо учитывать, что качение нельзя поддерживать при $|R_t| < \mu_s R_n$, где μ_s — коэффициент трения покоя. В работе [3] отмечается, что этому условию удовлетворяют лишь несколько решений для прецессии в режиме чистого качения. Однако анализ оставляет открытой возможность периодического движения с чистым качением вблизи промежуточных состояний, рассмотренных выше.

Скольжение и качение

Можно задать вопрос, возможны ли переходы между скольжением и качением при движении волчка. Как было отмечено в работе [9], такие переходы необходимо учитывать при разработке реалистической модели для описания динамики китайского волчка. Тогда различным режимам будут соответствовать разные системы уравнений. Переключение между скольжением и качением происходит, когда абсолютная скорость контакта \mathbf{V}_Q обращается в нуль. В модели с кулоновским трением переключение от качения к скольжению возникает, когда касательная сила реакции опоры, необходимая для поддержания качения, превосходит $\mu_s R_n$. Мы отсылаем к работе [4], где обсуждается эта тема и проводится моделирование, и к работе [3], где проводится подробный анализ модели с чистым качением. Здесь мы рассмотрим два случая — движение маятника и поведение китайского волчка вблизи устойчивого промежуточного состояния.

- 1) Движение маятникового типа легко наблюдать, поместив китайский волчок на стол, повернув его на угол θ_S и затем освободив его. В этом режиме мы имеем $J = 0 = Routh$. Обычно наблюдается движение с чистым качением. Только при больших значениях θ_S вначале может наблюдаться некоторое скольжение. При выполнении условия чистого

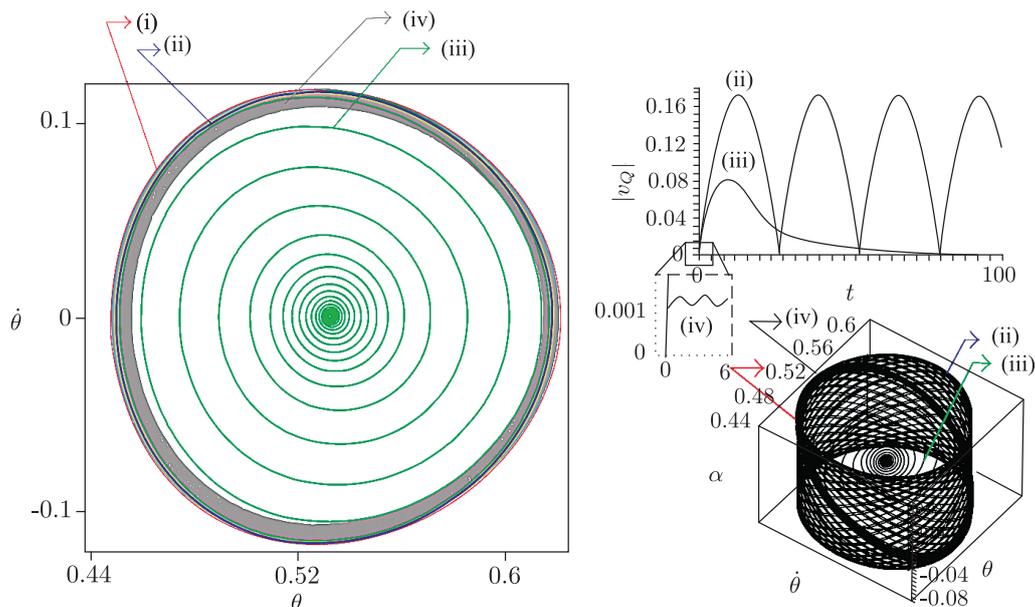


Рис. 15. Периодическое движение вокруг промежуточного состояния (IS) в плоскости $\theta, \dot{\theta}$ при $m = 1 = g$, $\epsilon = 0.3R$, $A = 0.92C$. Решение (i) соответствует случаю чистого качения при $J = 0.63$, $E = 1.1$ и $Routh = 0.33$; решение (ii) — случаю чистого скольжения при $\mu = 0$; решение (iii) — при $\mu = 0.1$; решение (iv) — при $\mu = 10$; показаны первые 100 секунд. Результаты выбраны для устойчивого промежуточного состояния с $\theta_{IS} = \pi/6$. Начальным условием для решений (ii), (iii) и (iv) служит точка на кривой решения (i). Решение (i) описывает периодическое движение, решение (ii) — квазипериодическое движение, показанное в координатах $(\theta, \dot{\theta}, \alpha)$. При $\mu > 0$ траектории спиралями закручиваются вверх к промежуточному состоянию. При сильном трении это движение становится очень медленным (показаны только первые 100 секунд). Показана также скорость точки контакта $|v_Q|$. В случае (iii) эта скорость велика вдали от промежуточного состояния, в случае (iv) — очень мала, что соответствует очень медленному движению по спирали. Заметим, что $v_Q = 0$ при $t = 0$, как и следовало ожидать.

качения получается решение маятникового типа. Уравнение движения со скольжением (3.18) дает качественно иное решение. При $\mu = 0$ получается маятниковое решение для чистого скольжения, при котором центр масс остается неподвижным, однако волчок совершает периодическое опрокидывание подобно маятнику. (Напомним, что при $\mu = 0$ возможны периодические решения, соответствующие бифуркациям Хопфа. Однако они исчезают при $\mu > 0$.) При включении трения значение $\theta = 0$ становится устойчивым, и решение с опрокидыванием маятника медленно приближается к устойчивому решению. В этом случае маятник лучше всего моделируется уравнениями для чистого качения.

- 2) Периодическое движение вокруг промежуточного состояния характеризуется прецессией оси волчка вокруг оси z в сочетании с нутацией $\theta(t)$, где $0 < \theta_m \leq \theta(t) \leq \theta_M < \pi$. В случае чистого качения можно найти точные периодические решения. Используя точку на этом периодическом решении в качестве начального условия для уравнения (3.18), можно исследовать сохранение этого решения при добавлении трения (см. рис. 15). При $\mu = 0$ получается квазипериодическое движение вокруг решения с чистым качением. Добавление трения делает такое движение неустойчивым, и решение приводит к промежуточному состоянию. Такое поведение становится доминирующим уже при $\mu = 0, 1$ (отметим также высокое значение $|v_Q|$). Однако при еще большем

значении μ затухание замедляется, и решение очень долго остается в окрестности решения для чистого качения. Значение $|v_Q|$ в этом случае очень мало, что соответствует выполнению условия перехода от скольжения к качению.

Приложения

А. Доказательство теоремы 5.1

Нижеследующие разделы, адресуемые интересующемуся читателю, содержат вычисления, необходимые для непосредственного линейного анализа устойчивости стационарных состояний. Они составляют доказательство теоремы 5.1.

А.1. Устойчивость вертикального состояния $\theta = 0$

Производя разложение в ряд Тейлора по θ

$$Z_Q = h(\theta) \approx -R + \epsilon - \epsilon \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3), \quad X_Q = h'(\theta) \approx \epsilon \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) + O(\theta^4), \quad (A.1)$$

линеаризуя \mathbf{V}_Q по θ

$$V_{X,Q} \approx U - (R - \epsilon)\dot{\theta}, \quad V_{Y,Q} \approx V + nR\theta - (R - \epsilon)\dot{\phi}\theta, \quad X_{Z,Q} \approx 0 \quad (A.2)$$

и учитывая, что $R_n \approx mg$ и $n = \text{const}$, получаем линеаризованные уравнения (3.16) и (3.15) при $\theta = 0$:

$$\dot{U} - \dot{\phi}V = -\mu g(U - \dot{\theta}(R - \epsilon)), \quad (A.3)$$

$$\dot{V} + \dot{\phi}U = -\mu g(V + Rn\theta - (R - \epsilon)\dot{\phi}\theta), \quad (A.4)$$

$$A(\ddot{\phi}\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}) - Cn\dot{\theta} = \mu mg(R - \epsilon)(V - (R - \epsilon)\dot{\phi}\theta + Rn\theta), \quad (A.5)$$

$$A(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\theta) + Cn\dot{\phi}\theta = -mg\epsilon\theta + \mu mg(R - \epsilon)(U - \dot{\theta}(R - \epsilon)). \quad (A.6)$$

Вводя комплексные координаты

$$\xi = \theta e^{i\varphi}, \quad w = (U + iV)e^{i\varphi}, \quad (A.7)$$

можно свести уравнения (A.3)–(A.6) к двум комплексным уравнениям. Складывая уравнение (A.3) с уравнением (A.4), умноженным на i , получаем

$$\dot{w} = \mu g(-w + (R - \epsilon)\dot{\xi} - iRn\xi). \quad (A.8)$$

Сложение уравнения (A.5), умноженного на i , с уравнением (A.6) дает

$$A\ddot{\xi} - iCn\dot{\xi} = \mu mg \left((R - \epsilon)w - (R - \epsilon)^2\dot{\xi} + iR(R - \epsilon)n\xi \right) - \epsilon mg\xi. \quad (A.9)$$

Эти уравнения допускают решение вида $(\xi, w) = (\boldsymbol{\xi}, w)e^{\lambda t}$, если λ удовлетворяет детерминантному уравнению

$$D(\lambda, \mu) \equiv -A\lambda^3 + (-\mu mg\epsilon^2 - \mu gA + 2\mu mgR\epsilon + iCn - \mu mgR^2)\lambda^2 + (i\mu mgR^2n - mg\epsilon + i\mu gCn - i\mu mgRn\epsilon)\lambda - \mu mg^2\epsilon = 0. \quad (A.10)$$

При $\mu = 0$ корнями уравнения (A.10) будут

$$\lambda_1(0) = 0, \quad \lambda_{2,3} = i \frac{Cn \pm S}{2A}, \quad (\text{A.11})$$

где

$$S^2 \equiv C^2 n^2 + 4Amg\epsilon. \quad (\text{A.12})$$

При отсутствии трения ($\mu = 0$) вертикальное состояние $\theta = 0$ маргинально устойчиво, поскольку корни $\lambda_{2,3}$ чисто мнимые в силу неравенства $n^2 > -4Amg\epsilon/C^2$.

Теперь исследуем влияние слабого трения ($0 < \mu \ll 1$), рассматривая, как изменятся корни (A.11) в первом приближении по μ :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mu) &= -\mu g, \\ \lambda_{2,3}(\mu) &= \lambda_{2,3}(0) - \mu \left(\frac{mg(R-\epsilon)}{AS} [S(R-\epsilon) \mp ARn] \pm \frac{2m^2 g^2 \epsilon (R-\epsilon)^2}{S(Cn \pm S)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Поскольку $\text{Re}(\lambda_1(\mu)) < 0$, вертикальное состояние $\theta = 0$ устойчиво, если $\text{Re}(\lambda_{2,3}(\mu)) < 0$. Этот случай реализуется при

$$n^2 \left[\frac{A}{C} - \left(1 - \frac{\epsilon}{R} \right) \right] < \frac{mg\epsilon}{C} \left(1 - \frac{\epsilon}{R} \right)^2. \quad (\text{A.14})$$

Отсюда следует, что в группе I ($A/C < (1 - \epsilon/R)$) всегда устойчиво вертикальное состояние $\theta = 0$, в группах II и III ($A/C > (1 - \epsilon/R)$) для устойчивости необходимо $n_0 < n_-$.

Остается показать, как из условия $\text{Re}(\lambda_{2,3}(\mu)) < 0$ получается соотношение (A.14). Ограничимся неравенством $\text{Re}(\lambda_2(\mu)) < 0$, поскольку для $\text{Re}(\lambda_3(\mu))$ годятся те же рассуждения. Из неравенства $\text{Re}(\lambda_2(\mu)) < 0$ следует

$$-\frac{1}{A} [S(R-\epsilon) - ARn] < -2mg\epsilon \frac{R-\epsilon}{Cn+S} \Leftrightarrow (Cn+S) \left(Rn - \frac{S}{A}(R-\epsilon) \right) < -2mg\epsilon(R-\epsilon). \quad (\text{A.15})$$

С учетом (A.12) отсюда получаем

$$\left(R - \frac{C}{A}(R-\epsilon) \right) (n^2 C + Sn) < 2mg\epsilon(R-\epsilon). \quad (\text{A.16})$$

Заметим, что при $(R - (C/A)(R-\epsilon)) < 0$ это условие выполняется для всех n . Если же имеет место неравенство $(R - (C/A)(R-\epsilon)) > 0$, то $(0 <) Sn < 2mg\epsilon(R-\epsilon)/(R - (C/A)(R-\epsilon)) - n^2 C$. Возведя обе части в квадрат, получаем

$$n^2 < \frac{mg\epsilon R}{A \mathcal{K}} (1 - \epsilon R)^2, \quad (\text{A.17})$$

где $\mathcal{K} \equiv (R - (C/A)(R-\epsilon))$. Поскольку рассматривается случай $\mathcal{K} > 0$, последнее условие можно переписать в виде (A.14).

ЗАМЕЧАНИЕ А.1. Пренебрегая трансляционными эффектами, то есть отбрасывая все, что связано с переменной w (ср. [5]), будем иметь

$$\dot{w} = \mu(R-\epsilon)\dot{\xi} - i\mu Rn\xi, \quad (\text{A.18})$$

$$A\ddot{\xi} - iCn\dot{\xi} = -\mu(R-\epsilon)^2\dot{\xi} - (\epsilon - i\mu Rn)\xi, \quad (\text{A.19})$$

где мы положили для простоты $m = 1$, $g = 1$. Уравнение (A.19) представляет уравнение типа Максвелла – Блоха [5] и позволяет воспользоваться результатами анализа, проведенного в [5]. Аналогичный результат получается, когда линеаризация проводится вблизи состояния $\theta = \pi$.



А.2. Устойчивость вертикального состояния $\theta = \pi$

Устойчивость вертикального состояния $\theta = \pi$ исследуется так же, как в разделе А.1. Вводя комплексные координаты

$$\xi = (\theta - \pi)e^{i\varphi}, \quad w = (U + iV)e^{i\varphi}, \quad (A.20)$$

из уравнений движения (3.15)–(3.16) получаем систему комплексных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -\mu g(w + (R + \epsilon)\dot{\xi} + iRn\xi), \\ A\ddot{\xi} + iCn\dot{\xi} &= \mu mg \left((R + \epsilon)w - (R + \epsilon)^2\dot{\xi} - iR(R + \epsilon)n\xi \right) + mg\epsilon\xi. \end{aligned} \quad (A.21)$$

Соответствующее детерминантное уравнение для определения собственного значения λ имеет вид

$$\begin{aligned} D(\lambda, \mu) &= -A\lambda^3 + (-2\mu mg\epsilon R - \mu gA - \mu mg\epsilon^2 - iCn - \mu mgR^2)\lambda^2 + \\ &+ (-i\mu mgR^2n + mg\epsilon - i\mu gCn - i\mu mg\epsilon Rn)\lambda + \mu g^2m\epsilon. \end{aligned} \quad (A.22)$$

При $\mu = 0$ корнями $\lambda(\mu)$ уравнения (A.22) будут

$$\lambda_1(0) = 0, \quad \lambda_{2,3}(0) = -i\frac{Cn \mp S}{2A}, \quad \text{где } S^2 \equiv C^2n^2 - 4Amg\epsilon. \quad (A.23)$$

Таким образом, при $\mu = 0$ вертикальное состояние $\theta = \pi$ будет, самое большое, маргинально устойчивым при чисто мнимом $\lambda_{2,3}$, то есть при условии

$$|n| > 2\frac{\sqrt{Amg\epsilon}}{C} \equiv n_*. \quad (A.24)$$

Это есть, конечно, также необходимое условие устойчивости при малом μ . При $S \neq 0$, что соответствует резонансу $\lambda_2(0) = \lambda_3(0)$ при $|n| = 2\sqrt{Amg\epsilon}/C$, корни уравнения (A.22) изменяются на величину порядка μ :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mu) &= -\mu g, \\ \lambda_{2,3}(\mu) &= \lambda_{2,3}(0) + \\ &+ \mu \left(\frac{mg(R + \epsilon)}{AS} (-S(R + \epsilon) \mp AnR) \pm \frac{2m^2g^2\epsilon(R + \epsilon)^2}{S(Cn \mp S)} \right). \end{aligned} \quad (A.25)$$

Таким образом, для устойчивости требуется $\text{Re}(\lambda_{2,3}(\mu)) < 0$, что соответствует условию

$$n^2 \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{R} \right) - \frac{A}{C} \right] > \frac{mg\epsilon}{C} \left(1 + \frac{\epsilon}{R} \right)^2. \quad (A.26)$$

Условие (A.26) никогда не выполняется для группы III, так что состояние $\theta = \pi$ неустойчиво. В случае групп I и II, когда $A/C < (1 + \epsilon/R)$, условие устойчивости имеет вид

$$n_\pi > \sqrt{\frac{mg\epsilon}{C[(1 + \epsilon/R) - A/C]}} \left(1 + \frac{\epsilon}{R} \right) \equiv n_+. \quad (A.27)$$

Заметим, что для волчков групп I и II $n_+^2 \geq n_*^2$, где $n_* \equiv 2\sqrt{Amg\epsilon}/C$. Равенство $n_*^2 = n_+^2$ выполняется при $A/C = (1/2)(1 + \epsilon/R)$.

А.3. Устойчивость промежуточных состояний $0 < \theta < \pi$

В этом разделе мы рассмотрим промежуточные асимптотические состояния, которые существуют при выполнении условия (5.7). Такое состояние, если оно существует, имеет вид $v_0 = (0, 0, \bar{\alpha}, 0, \bar{\theta}, \bar{\pi})$, где $\bar{\alpha}, \bar{\theta}, \bar{\pi}$ — постоянные, связанные соотношением (5.4). Чтобы исследовать устойчивость, рассмотрим собственные значения $SO(2)(\varphi)$ -приведенных уравнений движения, которые получаются из (3.18), если там отбросить уравнение для $\dot{\varphi}$.

Если обозначить через J_0 соответствующий якобиан этого приведенного уравнения, то собственные значения λ будут удовлетворять детерминантному уравнению

$$D(\lambda, \mu) \equiv \det(J_0 - \lambda I_6) = \lambda p_5(\lambda) = 0, \quad (A.28)$$

где I_6 — единичная матрица 6×6 , а $p_5(\lambda)$ — многочлен 5-й степени по λ . Таким образом, нуль всегда будет решением уравнения (A.28).

ЗАМЕЧАНИЕ А.2. Систему уравнений нельзя свести к виду Максвелла–Блоха вблизи промежуточного состояния, как это было сделано в случае двух состояний с вертикальным спином.

При $\mu = 0$ шесть корней уравнения (A.28) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\alpha_0, \quad \lambda_{5,6} = \pm i\alpha_0 \sqrt{A}, \quad (A.29)$$

где

$$A \equiv \frac{A^2 + 2AB \cos \bar{\theta} + B^2}{A(m\epsilon^2 \sin^2 \bar{\theta} + A)} > 0, \quad B \equiv (A - C) \cos \bar{\theta} + C \frac{\epsilon}{R}, \quad (A.30)$$

$\bar{\alpha}$ определяется соотношением (5.6). Заметим, что из (5.7) следует $B > 0$. Все собственные значения λ_j , $j = 1, \dots, 6$, лежат на мнимой оси, так что при $\mu = 0$ промежуточные состояния маргинально устойчивы.

ЗАМЕЧАНИЕ А.3. Следует отметить, что при $\mu = 0$ возникает резонанс $\lambda_{3,4} = \lambda_{5,6} = \pm i\bar{\alpha}$ при $A = 1$. Используя вышеприведенные выражения для $\bar{\alpha}$ и A , можно убедиться, что это равенство выполняется, когда уравнение

$$\left[\left(\frac{A}{C} - 1 \right) \left(3 \frac{A}{C} - 1 \right) + \frac{A}{C^2} m \epsilon^2 \right] \cos^2 \bar{\theta} + 2 \frac{\epsilon}{R} \left(2 \frac{A}{C} - 1 \right) \cos \bar{\theta} + \frac{\epsilon^2}{R^2} - \frac{A}{C^2} m \epsilon^2 = 0 \quad (A.31)$$

допускает наличие вещественного корня между -1 и 1 . Резонанс исчезает при учете членов более высокого порядка по μ .

При малом μ ($0 < \mu \ll 1$) корни принимают вид

$$\lambda_j(\mu) \equiv \lambda_j(0) + \mu q_j, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (A.32)$$

Из (A.28) следует

$$\begin{aligned} q_1 = 0 \quad q_2 = m^3 g^3 \epsilon^2 R^4 \sin^2 \bar{\theta} g(\cos \theta) \mathcal{D} \mathcal{E}, \\ q_3 = q_4 = -mg, \quad q_5 = q_6 = a_0(a_1 m + a_2), \quad a_0 \equiv \frac{m^3 g^3 \epsilon^2}{2A^2 R^2 B^2 \mathcal{F}^2 \alpha_0^4 A} > 0, \end{aligned} \quad (A.33)$$

\bar{a}^2 и λ_5 имеют прежний смысл,

$$g(\cos \bar{\theta}) \equiv \left(\frac{A}{C} - 1 \right) + \frac{4 [(A/C - 1) \cos \bar{\theta} + \epsilon/R]^2}{(A/C) \sin^2 \bar{\theta} + (\cos \bar{\theta} - \epsilon/R)^2}. \quad (A.34)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются формулами

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv -\epsilon^2 \sin^2 \theta_0 [AR (R \cos^2 \theta_0 - 2\epsilon \cos \theta_0 + R) - C(R \cos \theta_0 - \epsilon)^2]^2 < 0, \\ a_2 &\equiv AC^2 R^4 f \left(\frac{A}{C}; \frac{\epsilon}{R}, \cos \theta_0 \right), \end{aligned} \quad (A.35)$$

где

$$f \left(\frac{A}{C}; \frac{\epsilon}{R}, \cos \theta_0 \right) \equiv f_2 \frac{A^2}{C^2} + f_1 \frac{A}{C} + f_0, \quad (A.36)$$

$$\begin{aligned} f_2 &\equiv -2 + 6 \frac{\epsilon}{R} \cos \theta_0 - 5 \left(\frac{\epsilon^2}{R^2} + 1 \right) \cos^2 \theta_0 + 10 \cos^3 \theta_0 \frac{\epsilon}{R} - \left(1 + 3 \frac{\epsilon^2}{R^2} \right) \cos^4 \theta_0, \\ f_1 &\equiv -4 \frac{\epsilon}{R} \left(\frac{\epsilon^2}{R^2} + 2 \right) \cos \theta_0 + 6 \left(1 + 3 \frac{\epsilon^2}{R^2} \right) \cos^2 \theta_0 - \\ &\quad - 4 \frac{\epsilon}{R} \left(4 + \frac{\epsilon^2}{R^2} \right) \cos^3 \theta_0 + 2 \left(1 + 2 \frac{\epsilon^2}{R^2} \right) \cos^4 \theta_0 + 2 \frac{\epsilon^2}{R^2}, \\ f_0 &\equiv -\frac{\epsilon^2}{R^2} - \frac{\epsilon^4}{R^4} - 2 \frac{\epsilon}{R} \left(-1 - 3 \frac{\epsilon^2}{R^2} \right) \cos \theta_0 + \left(-1 - \frac{\epsilon^4}{R^4} - 10 \frac{\epsilon^2}{R^2} \right) \cos^2 \theta_0 - \\ &\quad - 2 \frac{\epsilon}{R} \left(-3 - \frac{\epsilon^2}{R^2} \right) \cos^3 \theta_0 - \left(\frac{\epsilon^2}{R^2} + 1 \right) \cos^4 \theta_0. \end{aligned} \quad (A.37)$$

Коэффициенты \mathcal{D}, \mathcal{E} вычисляются с помощью пакета Maple:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \mathcal{B}^2 - A \left(A - C + C \frac{\epsilon^2}{R^2} \right), \\ \mathcal{E} &\equiv -\frac{A - C}{AB [-m(R\epsilon\mathcal{B} - \epsilon^2 C)^2 + R^2(C - A)^2(m\epsilon^2 + A)]}. \end{aligned} \quad (A.38)$$

Для волчков группы II эти коэффициенты имеют определенный знак для значений θ_0 в интервале $(0, \pi)$. Заметим, что $q_{3,4} < 0$ и $q_{5,6} < 0$. Первое неравенство очевидно, второе менее наглядно и будет доказано ниже. Трение стабилизирует на уровне $O(\mu)$ при $q_2 < 0$.

Знак q_2 зависит только от $g(\cos \bar{\theta})$, так как два члена \mathcal{D}, \mathcal{E} никогда не обращаются в нуль в интервале $0 < \bar{\theta} < \pi$. Нуль функции $g(\cos \bar{\theta})$ представляет точку бифуркации, в которой происходит изменение типа устойчивости. При $q_2 > 0$ промежуточные состояния теряют устойчивость. Для краткости мы отсылаем читателя к работе [10], где рассмотрены подробности поведения функции $g(\cos \theta)$, которая также возникает в качестве критической функции при анализе устойчивости методом приведения раусиана. Этот анализ завершает доказательство теоремы 5.1.

Доказательство неравенства $q_5 < 0$. Чтобы доказать это неравенство, достаточно доказать, что $a_2 \leq 0$ (см. (A.33)), поскольку $a_0 > 0$ и $a_1 < 0$. Знак a_2 определяется знаком функции $f(A/C; \epsilon/R, \cos \theta_0)$. Рассматривая функцию f как квадратичный многочлен $\tilde{f}(A/C)$ от A/C , получаем, что дискриминант уравнения $\tilde{f}(A/C) = 0$ равен

$$\Delta_f \equiv -\sin^2 \theta_0 \left(-1 + \frac{\epsilon}{R} \cos \theta_0 \right)^2 \times \left[\left(\frac{\epsilon}{R} \cos \theta_0 - 1 \right)^2 + \underbrace{1 - 2 \frac{\epsilon}{R} \cos \theta_0 + \frac{\epsilon^2}{R^2}}_{>0} \right] \quad (A.39)$$

и отрицателен при всех θ_0 и ϵ/R . Следовательно, знак \tilde{f} остается неизменным. Легко убедиться, что при $\theta_0 = 0, \pi, \pi/2$ знак a_2 всегда отрицателен (например, $f(A/C; \epsilon/R, 1) = -2(\epsilon/R - 1)^2(\epsilon/R + 2(A/C) - 1)^2$), так что $a_2 \leq 0$ для всех $\epsilon/R, A/C$ и θ_0 . Мы приходим к выводу, что $q_5 \leq 0$.

Список литературы

- [1] Perry J. Spinning tops and gyroscopic motions. New York: Dover, 1957. 102 pp. [Перри Дж. Вращающийся волчок. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2001. 112 с.]
- [2] Cohen R. J. The tippe top revisited // Amer. J. Phys., 1977, vol. 45, no. 1, pp. 12–17.
- [3] Gray C. G., Nickel B. G. Constants of the motion for nonslipping tippe tops and other tops with round pegs // Amer. J. Phys., 2000, vol. 68, no. 9, pp. 821–828.
- [4] Or A. C. The dynamics of a tippe top // SIAM J. Appl. Math., 1994, vol. 54, no. 3, pp. 597–609.
- [5] Bou-Rabee N. M., Marsden J. E., Romero L. A. Tippe top inversion as a dissipation-induced instability // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2004, vol. 3, no. 3, pp. 352–377.
- [6] Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies. New York: MacMillan, 1905. 431 pp. [Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: В 2-х тт. М.: Наука, 1983. 464 с.]
- [7] Braams C. M. On the influence of friction on the motion of a top // Physica, 1952, vol. 18, pp. 503–514.
- [8] Jellett J. H. A treatise on the theory of friction. London: MacMillan, 1872. 220 pp. [Джеллетт Дж. Х. Трактат по теории трения. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2009. 264 с.]
- [9] Kane T. R., Levinson D. A realistic solution of the symmetric top problem // J. Appl. Mech., 1978, vol. 45, no. 4, pp. 903–909.
- [10] Ciocci M. C., Langerock B. Dynamics of the tippe top via Routhian reduction // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2007, vol. 12, no. 6, pp. 602–614.
- [11] Branicki B. Y. M., Moffatt H. K., Shimomura Y. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: 3. Geometry of steady state structures for convex bodies // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2006, vol. 462, no. 2066, pp. 371–390.
- [12] Branicki B. Y. M., Shimomura Y. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: 4. Stability of steady spin states and the «rising egg» phenomenon for convex axisymmetric bodies // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2006, vol. 462, no. 2075, pp. 3253–3275.
- [13] Ebenfeld S., Scheck F. A new analysis of the tippe top: Asymptotic states and Liapunov stability // Ann. Physics, 1995, vol. 243, no. 2, pp. 195–217.
- [14] Rauch-Wojciechowski S., Sköldstam M., Glad T. Mathematical analysis of the tippe top // Regul. Chaotic Dyn., 2005, vol. 10, no. 4, pp. 333–362.
- [15] Moffatt H. K., Shimomura Y., Branicki M. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface: 1. Stability and the gyroscopic approximation // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2004, vol. 460, no. 2052, pp. 3643–3672.
- [16] Bastiaens R., Detand J., Rysman O., Defloo T. Efficient use of traditional-, rapid- and virtual prototyping in the industrial product development process // Proc. of the 4th Internat. Conf. on Adv. Res. in Virtual and Rapid Prototyping (VRAP'09) (Lleira, Portugal, 2009) / P. J. da Silva Bártolo et al. London: Taylor & Francis, 2010. P. 515–520.
- [17] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Динамические системы — 3 / В. И. Арнольд. (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 3.) М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–290.
- [18] Moffatt H. K., Tokieda T. Celt reversals: A prototype of chiral dynamics // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 2008, vol. 138, no. 2, pp. 361–368.



- [19] Tokieda T. Private communications, in Proceedings of the Geometric Mechanics and its Applications (MASIE), Lausanne, Switzerland, July 2004.
- [20] Friedl Ch. Der Stehaufkreisel: Zulassungsarbeit zum 1. Staatsexamen. Universität Augsburg, 1997. 63 pp. <http://www.physik.uniaugsburg.de/%18wobsta/tippetop/index.shtml.en>.
- [21] Ueda T., Sasaki K., Watanabe S. Motion of the tippe top: Gyroscopic balance condition and stability // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2005, vol. 4, no. 4, pp. 1159–1194.

Towards a Prototype of a Spherical Tippe Top

M. C. Ciocci¹, B. Malengier², B. Langerock³, B. Grimonprez⁴

¹ Howest, ELIT, University College West Flanders, G. K. De Goedelaan 5, 8500 Kortrijk, Belgium

² Department of Mathematical Analysis, Research Group NaM2, University of Ghent, Galglaan 2, 9000 Ghent, Belgium

³ Department of Architecture, Sint-Lucas Visual Arts, Institute for Higher Education in the Sciences and the Arts, 9000 Ghent, Belgium

⁴ Howest, Industrial Design Center, University College West Flanders, Marksesteenweg 58, 8500 Kortrijk, Belgium

Among spinning objects, the tippe top exhibits one of the most bizarre and counterintuitive behaviours. The commercially available tippe tops basically consist of a section of a sphere with a rod. After spinning on its rounded body, the top flips over and continues spinning on the stem. The commonly used simplified mathematical model for the tippe top is a sphere whose mass distribution is axially but not spherically symmetric, spinning on a flat surface subject to a small friction force that is due to sliding. Three main different dynamical behaviours are distinguished: tipping, nontipping, hanging, that is, the top rises but converges to an intermediate state instead of rising all the way to the vertical state. Subclasses according to the stability of relative equilibria can further be distinguished. Our concern is the degree of confidence in the mathematical model predictions, we applied 3D printing and rapid prototyping to manufacture a “3-in-1 toy” that could catch the three main characteristics defining the three main groups in the classification of spherical tippe tops as mentioned above. We propose three designs. This “toy” is suitable to validate the mathematical model qualitatively and quantitatively.

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 391–425 (Russian)

Originally published in: *Journal of Applied Mathematics*, 2012, Article ID 268537, 34 pages, © 2012 M. C. Ciocci et al.