Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 523–540.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.01
MSC 2010: 70E40, 37J35

Об одном квадратичном интеграле уравнений Пуанкаре – Жуковского

В. Ю. Ольшанский

Для уравнений Пуанкаре – Жуковского в случае, когда матрицы гамильтониана являются недиагональными, получены условия существования квадратичного интеграла $(\mathbf{YS}, \mathbf{K}) = \mathrm{const}$ и его явная форма. Показано, что при существовании данного интеграла уравнения приводятся к случаю Шоттки.

Ключевые слова: уравнения Пуанкаре – Жуковского, квадратичный интеграл, недиагональные матрицы, случай Шоттки

1. Введение

Рассмотрим уравнения Пуанкаре – Жуковского [1, 2]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times (\mathbf{AM} + \mathbf{Bp}) + \mathbf{p} \times (\mathbf{Cp} + \mathbf{B}^T\mathbf{M}), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times (\mathbf{AM} + \mathbf{Bp}) + \mathbf{M} \times (\mathbf{Cp} + \mathbf{B}^T\mathbf{M}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Система (1.1) в переменных $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{p}, \mathbf{S} = \mathbf{M} - \mathbf{p}$ записывается в виде

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times (\mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S}), \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times (\mathbf{B}'^T\mathbf{K} + \mathbf{C}'\mathbf{S}), \tag{1.2}$$

$$2\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{C} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^T, \quad 2\mathbf{B}' = \mathbf{A} - \mathbf{C} + \mathbf{B}^T - \mathbf{B}, \quad 2\mathbf{C}' = \mathbf{A} + \mathbf{C} - \mathbf{B} - \mathbf{B}^T. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — линейные операторы $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ — симметрические и $\mathbf{M}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Уравнения, в частности, описывают движение вокруг неподвижной точки твердого тела, эллипсоидальная полость в котором заполнена идеальной несжимаемой жидкостью с однородной завихренностью [1–3]. В этом случае вектор $\mathbf{S}$ пропорционален завихренности жидкости $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{K}$ — кинетический момент системы «тело плюс жидкость», $\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела, $\mathbf{I}$ — оператор инерции системы, компоненты оператора $\mathbf{J}$ выражаются через полуоси эллипсоидальной полости [4].

Получено 3 февраля 2012 года
После доработки 14 марта 2012 года

Ольшанский Владимир Юрьевич
olshanskiy_vlad@mail.ru
Институт проблем точной механики и управления РАН
410028, Россия, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

Интегралами системы (1.2) являются

$$F_1 = K^2, \quad F_2 = S^2, \quad F_3 = 2H = (\mathbf{A}'\mathbf{K}, \mathbf{K}) + 2(\mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S}) + (\mathbf{C}'\mathbf{S}, \mathbf{S}). \tag{1.4}$$

При существовании четвертого интеграла система является интегрируемой. Обзор известных случаев интегрируемости приведен в монографии [4], где указаны, в частности, классические случаи интегрируемости с дополнительным квадратичным интегралом [5, 6].

А. П. Веселовым показано [7], что при существовании дополнительного квадратичного интеграла в случае, когда матрица $\mathbf{B}'$ не вырождена и собственные значения $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$ различны, существует преобразование $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{R}_1\mathbf{K}$, $\widetilde{\mathbf{S}} = \mathbf{R}_2\mathbf{S}$, $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in SO(3)$, приводящее уравнения к виду с диагональными матрицами $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$. Для системы с диагональными матрицами в гамильтониане сформулированы условия существования дополнительного полиномиального интеграла [7, 8].

Актуальной остается задача записи интеграла и условий его существования через исходные недиагональные матрицы гамильтониана. Так, в работе [9] приведено несколько примеров «новых интегрируемых случаев при наличии в гамильтониане... матриц общего вида». Отметим, что в этих примерах интегралы и условия их существования не указаны явно, приводятся условия, связывающие элементы матриц гамильтониана системы и матриц квадратичного интеграла. Делается вывод [9] о существовании дополнительного квадратичного интеграла при произвольных диагональных матрицах $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, что прямо противоречит теореме Веселова [7].

Ниже, при рассмотрении задачи определения условий существования дополнительного квадратичного интеграла,

$$F = (\mathbf{X}\mathbf{K}, \mathbf{K}) + 2(\mathbf{Y}\mathbf{S}, \mathbf{K}) + (\mathbf{Z}\mathbf{S}, \mathbf{S}), \tag{1.5}$$

выделен частный случай, когда

$$\mathbf{X} = \mu_1\mathbf{E} + \mu\mathbf{A}', \quad \mathbf{Z} = \mu_2\mathbf{E} + \mu\mathbf{C}'. \tag{1.6}$$

В этом случае любой квадратичный интеграл (1.5) можно записать в виде $F = \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \mu F_3 + 2((\mathbf{Y} - \mu\mathbf{B}')\mathbf{S}, \mathbf{K})$. Таким образом, при выполнении условий (1.6) для нахождения дополнительных квадратичных интегралов достаточно рассмотреть задачу нахождения интеграла вида

$$(\mathbf{Y}\mathbf{S}, \mathbf{K}) = \mathrm{const}. \tag{1.7}$$

В настоящей работе приведен явный вид интеграла (1.7) и условий его существования. Показано, что, с одной стороны, интеграл Шоттки можно записать в виде (1.7) (предложение 8). С другой стороны, при существовании интеграла (1.7) преобразование $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$, $\widetilde{\mathbf{S}} = \mathbf{R}\mathbf{S}$ приводит к случаю Шоттки с диагональными матрицами гамильтониана (теорема 1 настоящей работы). Таким образом, интеграл (1.7) является обобщением интеграла Шоттки на случай недиагональных матриц. Также показано, что для приведенных в работе [9] примеров условия (1.6) выполнены и интегралы [9] являются частными случаями интеграла (1.7), а при диагональных матрицах — содержатся в случае Шоттки.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Интеграл (1.7) системы (1.2) при невырожденном операторе $\mathbf{B}'$ существует тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\mathbf{B}'\mathbf{B}'^T = \mathbf{A}'^2 + \psi_1\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{A}', \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}'\mathbf{C}' = \psi\mathbf{B}' + \mathbf{A}'\mathbf{B}', \tag{2.2}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ — *некоторые параметры.*

Интеграл может быть записан в виде

$$\eta_1 K_1 \widetilde{S}_1 + \eta_2 K_2 \widetilde{S}_2 + \eta_3 K_3 \widetilde{S}_3 = \mathrm{const}, \tag{2.3}$$

$$\eta_1 = -\Delta a_2 \Delta a_3 \Delta\beta_1 + \beta_3 \Delta a_3 \Delta\beta_2 - \beta_2 \Delta a_2 \Delta\beta_3 \quad (1\,2\,3). \tag{2.4}$$

Здесь $\Delta p_1 = p_2 - p_3$ $(1\,2\,3)$; a_i, $\mathbf{e}_i$ *и* c_i, $\mathbf{l}_i$ — *собственные значения и векторы операторов* $\mathbf{A}'$ *и* $\mathbf{C}'$; $K_i = (\mathbf{K}, \mathbf{e}_i)$, $\widetilde{S}_i = (\mathbf{S}, \mathbf{l}_i)$, $\beta_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{B}'\mathbf{l}_i)$.

Условия (2.1), (2.2) *эквивалентны следующим условиям:*

$$\mathbf{C}' = \psi\mathbf{E} + \mathbf{R}^T\mathbf{A}'\mathbf{R}, \quad \mathbf{B}' = \mathcal{B}\mathbf{R}, \tag{2.5}$$

$$\sum_i \beta_i^2 \Delta a_i + \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta a_3 = 0. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathcal{B} = \mathrm{diag}(\beta_i)$ *в базисе* $(\mathbf{e}_i)$, *ортогональный оператор* $\mathbf{R}$ *задает поворот правого ортобазиса* $(\mathbf{l}_i)$ *в правый ортобазис* $(\mathbf{e}_i)$, $\mathbf{e}_i = \mathbf{R}\mathbf{l}_i$.

Интеграл (2.3) *и условие* (2.6) *можно также записать в виде*

$$\varphi_1(\mathbf{K}, \mathbf{RS}) + \varphi_2((\mathbf{A}'\mathbf{K}, \mathbf{RS}) + (\mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S})) = \mathrm{const}, \tag{2.7}$$

$$\varphi_1 = \sum a_i\beta_i\Delta a_i - \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta a_3, \quad \varphi_2 = \sum \beta_i \Delta a_i, \tag{2.8}$$

$$\sum_j (b_{1j}^2 - a_1^2)(a_2 - a_3) + \sum_j (b_{2j}^2 - a_2^2)(a_3 - a_1) + \sum_j (b_{3j}^2 - a_3^2)(a_1 - a_2) = 0. \tag{2.9}$$

Здесь $b_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{B}'\mathbf{e}_j)$ — *элементы матрицы оператора* $\mathbf{B}'$ *в базисе* $(\mathbf{e}_i)$.

Следствие 1. *Если при невырожденном операторе* $\mathbf{B}'$ *существует дополнительный интеграл* (1.7), *то уравнения Пуанкаре – Жуковского* (1.2) *приводятся к виду*

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times (\mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathcal{B}\widetilde{\mathbf{S}}), \quad \dot{\widetilde{\mathbf{S}}} = \widetilde{\mathbf{S}} \times (\mathcal{B}\mathbf{K} + \mathbf{A}'\widetilde{\mathbf{S}}), \quad \widetilde{\mathbf{S}} = \mathbf{RS}, \tag{2.10}$$

где матрицы операторов $\mathbf{A}', \mathcal{B}$ *являются диагональными.*

Отметим, что уравнения (2.10) соответствуют случаю Шоттки [5], когда в уравнениях (1.2) $\mathbf{C}' = \mathbf{A}'$ и в уравнениях (1.1) $\mathbf{B} = 0$.

Следствие 2. *В случае, когда* $\mathbf{C}' = \mathbf{A}'$, *матрицы* $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ — *диагональные и матрица* $\mathbf{B}'$ — *невырожденная, для существования дополнительного квадратичного интеграла* (1.7) *необходимо и достаточно выполнения условия* $\sum(b_{ii}^2 - a_i^2)\Delta a_i = 0$. *Интеграл может быть записан в одной из форм*

$$\varphi_1(\mathbf{K}, \mathbf{S}) + \varphi_2((\mathbf{A}' + \mathbf{B}')\mathbf{K}, \mathbf{S}) = \mathrm{const}, \quad \sum \eta_i K_i S_i = \mathrm{const}. \tag{2.11}$$

Ниже показано (предложение 8), что при задании матриц $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$ параметрами Шоттки λ_i дополнительный интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} F = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)K_1S_1 + (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)K_2S_2 +\\ + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)K_3S_3 = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Заменой $\mathbf{A}' = \alpha\mathbf{E} + \mathbf{A}_2$ условие (2.1) в случае диагональных матриц можно привести к виду $\mathbf{B}'^2 = \mathbf{A}_2^2 + \psi_s\mathbf{A}_2$, допускающему представление матриц $\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}_2$ при помощи параметров Шоттки. При $\psi_2^2 > 4\psi_1$ эти параметры являются действительными величинами, а при $\psi_2^2 < 4\psi_1$ — комплексными. При $\psi_2^2 \neq 4\psi_1$ указано (предложение 9) следующее задание пятью действительными параметрами элементов связанных условием (2.6) диагональных матриц

$$a_k = \alpha + \beta(\tau_k - \frac{\sigma}{\tau_k}), \quad b_k = \beta(\tau_k + \frac{\sigma}{\tau_k}), \quad \sigma = \pm 1, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.13}$$

Дополнительный интеграл записывается в виде

$$(\tau_1 - \tau)K_1S_1 + (\tau_2 - \tau)K_2S_2 + (\tau_3 - \tau)K_3S_3 = \mathrm{const}, \quad 2\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \sigma\tau_1\tau_2\tau_3. \tag{2.14}$$

Матрицу оператора $\mathbf{R}$ можно задать тремя параметрами (например, углами Эйлера), формулы (2.13) задают пятью параметрами матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathcal{B}$. Учитывая формулы (2.5), операторы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ в случае существования интеграла (1.7) можно задать девятью параметрами.

Отдельно рассмотрен случай $\psi_2^2 = 4\psi_1$, когда матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ задать параметрами Шоттки невозможно.

Получены условия, при которых интеграл (2.3) имеет неполную форму — один из коэффициентов η_i равен нулю. Показано (предложение 11), что если, например, $\eta_2 = 0$, то интеграл может быть представлен в форме

$$K_1(b_{11}S_1 + b_{12}S_2 + b_{13}S_3) + K_3(b_{31}S_1 + b_{32}S_2 + b_{33}S_3) = \mathrm{const}. \tag{2.15}$$

Рассмотрен частный случай (предложение 12), когда операторы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$ имеют общий собственный вектор. Матрицы операторов $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ в этом случае задаются семью произвольными параметрами.

Если выполнены условия существования неполной формы интеграла (2.15) и операторы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$ имеют общий собственный вектор, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{l}_2$, то интеграл (2.15) может быть записан в виде

$$(\mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S}) - b_{22}K_2S_2 = \mathrm{const}. \tag{2.16}$$

Показано, что при выполнении условий приведенных в работе [9] теорем 1–6 имеет место представление операторов $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ в виде (1.6); следовательно, дополнительный интеграл может быть записан в виде (1.7), а уравнения Пуанкаре – Жуковского в случае невырожденного оператора $\mathbf{B}'$ приводятся к диагональному виду с $\mathbf{B} = 0$, то есть приводятся к случаю Шоттки. Неверным является утверждение [9], сформулированное как следствие теорем 5, 6, о том, что уравнения Пуанкаре – Жуковского всегда имеют дополнительный квадратичный интеграл, если матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ — диагональные и интеграл содержит все известные случаи (Шоттки, Стеклова и др.). Более того, все приведенные в теоремах 1–6 примеры соответствуют частному случаю, когда операторы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$ имеют общий собственный вектор. Ниже рассмотрены условия теоремы 1 [9], которые связывают 26 ненулевых элементов матриц интеграла и гамильтониана пятнадцатью нелинейными уравнениями. Получено явное задание матриц $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ семью параметрами и показано, что дополнительный интеграл может быть записан в форме (2.16).

3. Доказательство теоремы 1

Дифференцируя интеграл (1.7) в силу системы (1.2), получим тождества

$$\langle \mathbf{YS}, \mathbf{K}, \mathbf{A}'\mathbf{K}\rangle + \langle \mathbf{Y}^T\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{B}'^T\mathbf{K}\rangle \equiv 0, \tag{3.1}$$

$$\langle \mathbf{YS}, \mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S}\rangle + \langle \mathbf{Y}^T\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{C}'\mathbf{S}\rangle \equiv 0. \tag{3.2}$$

Выделяя в тождестве (3.1) члены $K_j^2 S_i$, получим следующие 9 условий для элементов b_{ij}, y_{ij} матриц операторов $\mathbf{B}', \mathbf{Y}$ в базисе $(\mathbf{e}_i)$:

$$y_{ij}b_{ik} = y_{ik}b_{ij}, \quad j < k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{3.3}$$

Эта система распадается на три подсистемы одного вида

$$x_1d_2 = x_2d_1, \quad x_1d_3 = x_3d_1, \quad x_2d_3 = x_3d_2, \tag{3.4}$$

где $x_i = y_{ji}, d_i = b_{ji}, j \in (1, 2, 3)$.

Обозначим $\mathbf{b}_i = \mathbf{B}'^T\mathbf{e}_i, \mathbf{y}_i = \mathbf{Y}^T\mathbf{e}_i$. Если матрица $\mathbf{B}'$ — невырожденная, то все ее строки — ненулевые, и из условий (3.4) следует пропорциональность строк $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{y}_i = \mu_i\mathbf{b}_i$. Операторы $\mathbf{B}', \mathbf{Y}$ можно задать равенством

$$\mathbf{B}' = \sum_i \mathbf{e}_i\mathbf{b}_i^T, \quad \mathbf{Y} = \sum_i \mu_i\mathbf{e}_i\mathbf{b}_i^T. \tag{3.5}$$

Тождество (3.1) принимает вид

$$\Big\langle \sum_i \mu_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{S})\mathbf{e}_i, \mathbf{K}, \mathbf{A}'\mathbf{K}\Big\rangle + \Big\langle \sum_i \mu_i K_i\mathbf{b}_i, \mathbf{S}, \sum_j \mu_j K_j\mathbf{b}_j\Big\rangle \equiv 0.$$

Выделяя коэффициенты при K_iK_j, получим тождества $\Delta a_1\mu_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{S}) + \Delta\mu_1\langle \mathbf{S}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\rangle \equiv \equiv 0$ $(1\,2\,3)$, которые эквивалентны системе условий

$$\Delta a_1\mu_1\mathbf{b}_1 + \Delta\mu_1\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = 0 \quad (1\ 2\ 3). \tag{3.6}$$

Предложение 1. *Для существования дополнительного интеграла* (1.7) *при невырожденном операторе* $\mathbf{B}'$ *необходимо, чтобы векторы* $\mathbf{b}_i$ *были попарно ортогональны и выполнялись условия*

$$\Delta a_1\mu_1\beta_1 + \Delta\mu_1\beta_2\beta_3 = 0 \quad (1\ 2\ 3). \tag{3.7}$$

Параметры β_i *заданы равенствами* $\mathbf{b}_i = \beta_i\mathbf{l}_i$, *где* $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ *— некоторая правая ортонормированная тройка.*

Доказательство. Из условий (3.6) следует $\Delta a_1\mu_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \Delta a_2\mu_2(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$. Предположим, что векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ не ортогональны, тогда $\Delta a_1\mu_1 = \Delta a_2\mu_2 = 0$. В этом случае при невырожденной матрице $\mathbf{B}'$ из условий (3.6) следует $\Delta\mu_1 = \Delta\mu_2 = 0$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = = \mu$. Так как $\mu \neq 0$ (иначе из представления (3.5) получим $\mathbf{Y} = 0$), то $\Delta a_1 = \Delta a_2 = 0$ и $a_1 = a_2 = a_3$. Таким образом, если какая-то пара векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ не ортогональна, то $\mathbf{A}' = \nu\mathbf{E}, \mathbf{Y} = \mu\mathbf{B}'$. При этом тождество (3.1) выполнено, а тождество (3.2) принимает вид $\langle \mathbf{B}'^T\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{C}'\mathbf{S}\rangle \equiv 0$. Учитывая представление (3.5), получим эквивалентную систему тождеств $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{S}, \mathbf{C}'\mathbf{S}\rangle \equiv 0, i = 1, 2, 3$. Так как векторы $\mathbf{b}_i$ некомпланарны, то получаем тождество $\mathbf{S} \times \mathbf{C}'\mathbf{S} \equiv 0$, которое выполнено, только если $\mathbf{C}' = \nu_2\mathbf{E}$. Интеграл (1.7) при $\mathbf{Y} = \mu\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}' = \nu_1\mathbf{E}$ и $\mathbf{C}' = \nu_2\mathbf{E}$ является следствием интегралов (1.4).

Таким образом, при существовании дополнительного интеграла (1.7) векторы $\mathbf{b}_i$ должны образовывать ортогональную тройку. Векторные условия (3.6) эквивалентны скалярным условиям (3.7). ■

Предложение 2. *Условие* (2.6) *необходимо для существования интеграла* (1.7). *Это условие может быть записано в форме* (2.9).

Доказательство. Определитель системы (3.7) относительно параметров μ_i должен быть равен нулю, откуда и следует условие (2.6). Учитывая равенства $\beta_i^2 = \mathbf{b}_i^2$, условия (2.6) запишем в форме (2.9). ■

Предложение 3. *Векторы* $\mathbf{b}_i (i = 1, 2, 3)$ *являются собственными векторами оператора* $\mathbf{C}'$.

Доказательство. Учитывая представления (3.5), получим, что тождества (3.2) эквивалентны следующей системе тождеств

$$\Delta\mu_1(\mathbf{b}_2, \mathbf{S})(\mathbf{b}_3, \mathbf{S}) - \mu_1\langle\mathbf{b}_1, \mathbf{S}, \mathbf{C}'\mathbf{S}\rangle \equiv 0 \quad (1\ 2\ 3). \tag{3.8}$$

Полагая в этих тождествах $\mathbf{S} = \mathbf{b}_r$ $(r = 1, 2, 3)$, получим условия

$$\mu_1(\mathbf{b}_2, \mathbf{C}'\mathbf{b}_3) = 0 \quad (1\ 2\ 3). \tag{3.9}$$

Если все $\mu_i \neq 0$, то отсюда следует предложение 3. Пусть, например, $\mu_1 = 0$, тогда из тождества (3.8) следует $\Delta\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = \mu_3 \neq 0$. Из условий (3.9) следует, что $\mathbf{b}_1$ — собственный вектор $\mathbf{C}'$. Из тождеств (3.8) получим

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{S})(\mathbf{b}_3, \mathbf{S}) + \langle\mathbf{b}_2, \mathbf{S}, \mathbf{C}'\mathbf{S}\rangle \equiv 0, \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{S})(\mathbf{b}_2, \mathbf{S}) - \langle\mathbf{b}_3, \mathbf{S}, \mathbf{C}'\mathbf{S}\rangle \equiv 0.$$

Полагая в первом тождестве $\mathbf{S} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, получим $(\mathbf{b}_3, \mathbf{C}'\mathbf{b}_2) = 0$, и отсюда, с учетом условий (3.9), следует, что $\mathbf{b}_2$ — собственный вектор $\mathbf{C}'$. ■

Предложение 4. *Для существования интеграла* (1.7) *необходимо выполнение условий*

$$\Delta c_i = \Delta a_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.10}$$

Доказательство. Векторы $\mathbf{b}_i = \beta_i\mathbf{l}_i$ являются собственными векторами оператора $\mathbf{C}', \beta_i \neq 0$. Систему тождеств (3.8) можно записать в виде

$$(\beta_2\beta_3\Delta\mu_1 + \beta_1\mu_1\Delta c_1)\widetilde{S}_2\widetilde{S}_3 \equiv 0, \quad \widetilde{S}_i = (\mathbf{S}, \mathbf{l}_i) \quad (1\ 2\ 3).$$

Следовательно, тождества (3.8) выполнены при условиях

$$\mu_1\beta_1\Delta c_1 + \beta_2\beta_3\Delta\mu_1 = 0 \quad (1\ 2\ 3). \tag{3.11}$$

Если $\mu_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, то из условий (3.7), (3.11) следуют условия (3.10). Если, например, $\mu_1 = 0$, то из условий (3.11) следует $\Delta\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = \mu_3 \neq 0$. Из условий (3.7), (3.11) получим

$$\beta_2\Delta c_2 + \beta_1\beta_3 = \beta_2\Delta a_2 + \beta_1\beta_3 = 0, \quad \beta_3\Delta c_3 - \beta_1\beta_2 = \beta_3\Delta a_3 - \beta_1\beta_2 = 0.$$

Отсюда следует $\Delta c_2 = \Delta a_2, \Delta c_3 = \Delta a_3$, но тогда и $\Delta c_1 = \Delta a_1$. ■

Предложение 5. *Для существования интеграла* (1.7) *необходимо выполнение условий* (2.5).

Доказательство. Условия (3.10) выполнены, только если $c_i = a_i + \psi, i = 1,2,3$. Пусть $\mathbf{R}$ — ортогональный оператор, задающий поворот правого ортобазиса $(\mathbf{l}_i)$ собственных векторов оператора $\mathbf{C}'$ в правый ортобазис $(\mathbf{e}_i)$ собственных векторов оператора $\mathbf{A}'$:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R}\mathbf{l}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{3.12}$$

Записывая операторы $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{C}'$ в виде $\mathbf{A}' = \sum a_i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T$ и $\mathbf{C}' = \sum c_i\mathbf{l}_i\mathbf{l}_i^T$, получим

$$\mathbf{C}' = \sum (a_i + \psi)\mathbf{R}^T\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{R} = \mathbf{R}^T(\mathbf{A}' + \psi\mathbf{E})\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{A}'\mathbf{R} + \psi\mathbf{E}.$$

Так как $\mathbf{b}_i = \beta_i\mathbf{l}_i = \beta_i\mathbf{R}^T\mathbf{e}_i$, то из формулы (3.5) получим представление оператора $\mathbf{B}'$ в виде (2.5), где $\mathcal{B} = \sum \beta_i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T$. ■

Предложение 6. *Условия* (2.1), (2.2) *эквивалентны условиям* (2.5), (2.6).

Доказательство. Условие (2.6) можно записать в виде

$$\sum (\beta_i^2 - a_i^2)\Delta a_i = 0. \tag{3.13}$$

При $\mathbf{A}' \neq \kappa\mathbf{E}$ это условие выполнено тогда и только тогда, когда существуют параметры ψ_1, ψ_2, такие, что

$$\beta_i^2 = a_i^2 + \psi_1 + \psi_2 a_i, \quad i = 1,2,3. \tag{3.14}$$

Отсюда получаем $\mathcal{B}^2 = \mathbf{A}'^2 + \psi_1\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{A}'$. Из условия (2.5) следует $\mathcal{B}^2 = \mathbf{B}'\mathbf{B}'^T$, и получаем условие (2.1).

Из условий (2.5) получим $\mathbf{R} = \mathcal{B}^{-1}\mathbf{B}'$. Так как симметрические операторы $\mathbf{A}'$ и $\mathcal{B}$ имеют общие собственные векторы $\mathbf{e}_i (i = 1,2,3)$, то $\mathcal{B}^{-1}\mathbf{A}'\mathcal{B}^{-1} = \mathbf{A}'\mathcal{B}^{-2}$, где $\mathcal{B}^{-2} = (\mathbf{B}'\mathbf{B}'^T)^{-1} = ((\mathbf{B}')^{-1})^T(\mathbf{B}')^{-1}$. Оператор $\mathbf{C}'$ запишем в виде $\mathbf{C}' = \psi\mathbf{E} + \mathbf{B}'^T\mathbf{A}'((\mathbf{B}')^{-1})^T$. Отсюда следует $\mathbf{C}'\mathbf{B}'^T = \psi\mathbf{B}'^T + \mathbf{B}'^T\mathbf{A}'$, и получаем условие (2.2).

Покажем теперь, что из условий (2.1), (2.2) следуют условия (2.5), (2.6). Из условий (2.2) следуют равенства $c_i\mathbf{B}'\mathbf{l}_i = \psi\mathbf{B}'\mathbf{l}_i + \mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{l}_i, i = 1,2,3$, где $c_i, \mathbf{l}_i$ — собственные значения и векторы оператора $\mathbf{C}'$. Обозначим $\mathbf{s}_i = \mathbf{B}'\mathbf{l}_i$, тогда

$$c_i\mathbf{s}_i = \psi\mathbf{s}_i + \mathbf{A}'\mathbf{s}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{s}_i$ $(i = 1,2,3)$ — собственные векторы оператора $\mathbf{A}'$. Так как оператор $\mathbf{B}'$ невырожденный, то все векторы $\mathbf{s}_i$ попарно не колинеарны. Можно считать $\mathbf{s}_i \parallel \mathbf{e}_i$, и из условий (3.15) получаем равенства $c_i = a_i + \psi$, откуда $\Delta c_i = \Delta a_i$. Пусть $\mathbf{R}$ — ортогональный оператор, заданный равенствами (3.12), тогда оператор $\mathbf{C}'$ при выполнении условий (3.10) можно записать в виде (2.5).

Так как $\mathbf{B}'\mathbf{l}_i \parallel \mathbf{e}_i$, запишем $\mathbf{B}'\mathbf{l}_i = \beta_i\mathbf{e}_i$, где β_i — некоторые параметры. Тогда $\mathbf{B}'\mathbf{l}_i = \beta_i\mathbf{R}\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{B}' = \mathcal{B}\mathbf{R}$. При этом $\mathbf{B}'\mathbf{B}'^T = \mathcal{B}^2$, и из условия (2.1) получим условия (3.14). Исключая из этих условий параметры ψ_1, ψ_2, получим условие (2.6). Выражая величины β_i^2 из равенства $\mathcal{B}^2 = \mathbf{B}'\mathbf{B}'^T$ через элементы b_{ij} матрицы $\mathbf{B}'$, получим условие (2.9). ■

Предложение 7. *Дополнительный интеграл можно записать в виде* (2.3) *или* (2.7).

Доказательство. Учитывая представление оператора $\mathbf{Y}$ в виде (3.5), интеграл (1.7) запишем в виде

$$(\mathbf{YS}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^T\mathbf{YS} = \sum \mu_i\beta_i\mathbf{K}^T\mathbf{e}_i\mathbf{l}_i^T\mathbf{S} = \sum \mu_i\beta_i(\mathbf{K}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{l}_i, \mathbf{S}) = \sum \eta_i K_i\widetilde{S}_i,$$

где $\eta_i = \mu_i\beta_i$. Учитывая условия (3.7), для определения параметров η_i получаем систему уравнений

$$\Delta a_1\eta_1 + \eta_2\beta_3 - \eta_3\beta_2 = 0 \quad (1\ 2\ 3). \tag{3.16}$$

Складывая все равенства системы (3.16), получим условие

$$\sum \eta_i\Delta\sigma_i = 0, \quad \sigma_i = a_i + \beta_i.$$

Это условие выполнено, только если параметры η_i имеют вид

$$\eta_i = \varphi_1 + \varphi_2\sigma_i = \varphi_1 + \varphi_2(a_i + \beta_i), \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.17}$$

Подставляя отсюда η_i в систему (3.16), получим для φ_1, φ_2 три условия:

$$\varphi_1(\Delta a_i - \Delta\beta_i) + \varphi_2(a_i\Delta a_i + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\Delta a_i - a_j\beta_j + a_k\beta_k) = 0 \quad (i\ j\ k). \tag{3.18}$$

Эти условия совместны, так как определитель каждой пары уравнений равен нулю в силу условия (2.6). Умножив каждое из равенств (3.18) на соответствующее a_i и сложив, получим условие для определения входящего в интеграл отношения φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1\sum a_i\Delta\beta_i = \varphi_2\sum(a_i^2\Delta a_i + a_ja_k\Delta\beta_i).$$

Данному равенству удовлетворяют значения φ_1, φ_2, заданные формулой (2.8). Если подставить выражения (2.8) в формулу (3.17), то получим для параметров η_i равенства (2.4).

Интеграл (2.3) можно, при учете формул (3.17), записать в виде

$$\varphi_1\sum K_i\widetilde{S}_i + \varphi_2\sum(a_i + \beta_i)K_i\widetilde{S}_i = \mathrm{const}.$$

Здесь $\widetilde{S}_i = (\mathbf{S}, \mathbf{l}_i) = (\mathbf{S}, \mathbf{R}^T\mathbf{e}_i) = (\mathbf{RS}, \mathbf{e}_i)$. Учитывая равенство $\mathbf{B}' = \mathcal{B}\mathbf{R}$, получим форму записи (2.7) для дополнительного интеграла.

Теорема 1 доказана. ■

Покажем справедливость следствия 1. Полагая $\widetilde{\mathbf{S}} = \mathbf{RS}$, уравнения (1.2) при учете условий (2.5) запишем в виде

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times (\mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathcal{B}\widetilde{\mathbf{S}}), \quad \dot{\widetilde{\mathbf{S}}} = \mathbf{R}(\mathbf{R}^T\widetilde{\mathbf{S}} \times (\mathbf{R}^T\mathcal{B}\mathbf{K} + \mathbf{R}^T\mathbf{A}'\widetilde{\mathbf{S}})).$$

Учитывая тождество $\mathbf{P}^T(\mathbf{Px} \times \mathbf{Py}) = (\det\mathbf{P})\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ и условие $\det\mathbf{R} = 1$, получаем систему (2.10).

При $\mathbf{R} = \mathbf{E}$ из теоремы 1 следует существование интеграла $\sum \eta_iK_iS_i = \mathrm{const}$. Коэффициенты η_i задаются по-прежнему формулой (2.4) или (3.17). Условия (2.5) дают $\mathbf{C}' = \psi\mathbf{E} + \mathbf{A}'$, $\mathbf{B}' = \mathcal{B}$, и отсюда следует, что матрицы операторов $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ являются диагональными в базисе $(\mathbf{e}_i)$, причем можно считать $\mathbf{C}' = \mathbf{A}'$, тогда $\mathbf{B} = 0$. Условие (2.6) является необходимым и достаточным для существования дополнительного квадратичного интеграла в этом случае. Таким образом, получаем следствие 2 теоремы 1.

4. Связь с интегралом Шоттки

В случае, когда $\mathbf{B} = 0$ и матрицы $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(A_i), \mathbf{C} = \operatorname{diag}(C_i)$ заданы четырьмя параметрами λ_i

$$A_i = (\lambda_j + \lambda_k)^{-1}, \quad C_i = (\lambda_0 + \lambda_i)^{-1}, \quad (i\ j\ k) \tag{4.1}$$

известен интеграл Шоттки [5], представленный в форме [4]:

$$F_s = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_0^2} p_1^2 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_0^2} p_2^2 + \frac{\lambda_3^2}{\lambda_3^2 - \lambda_0^2} p_3^2. \tag{4.2}$$

Так как $M^2 + p^2 = \mathrm{const}$, то дополнительный интеграл в случае Шоттки можно записать в виде

$$F_4 = 4 \sum \frac{p_i^2}{\lambda_i^2 - \lambda_0^2} = \sum \frac{(K_i - S_i)^2}{\lambda_i^2 - \lambda_0^2}. \tag{4.3}$$

Покажем, что этот интеграл можно записать в форме (2.12) и, следовательно, в форме (1.7).

Предложение 8. *Если* $\mathbf{B} = 0$ *и элементы диагональных матриц* $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ *заданы равенствами* (4.1)*, то дополнительный интеграл можно записать в виде* (2.12)*. Интеграл* F *есть линейная комбинация интегралов* (1.4)*,* (4.3)*,* $F = \sum c_i F_i$*, где*

$$\begin{aligned} &c_1 = c_2 = (\lambda_0^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2)/2, \quad c_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3), \\ &c_4 = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_3)/2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = 0$ и элементы матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, заданы формулами (4.1). Пусть a_i, b_i — элементы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, тогда

$$\begin{gathered} a_i = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{c - \alpha_i}\Big), \quad b_i = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{c - \alpha_i}\Big), \\ \alpha_i = \lambda - \lambda_i, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad c = \lambda_0 + \lambda. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Так как при $\mathbf{A}' = \mathbf{C}'$ получим $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$, то интеграл (2.11) можно записать в виде $\varphi_1(\mathbf{K}, \mathbf{S}) + \varphi_2(\mathbf{AK}, \mathbf{S}) = \mathrm{const}$, или, при учете формул (4.1), в виде

$$\sum_i \Big(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\lambda - \lambda_i}\Big) K_i S_i = \mathrm{const}. \tag{4.6}$$

Учитывая условие (2.6), параметры φ_1, φ_2, заданные равенствами (2.8), можно записать в виде

$$\varphi_1 = \sum (a_i + b_i) b_i \Delta a_i, \quad \varphi_2 = -\sum b_i \Delta a_i.$$

Учитывая представления a_i, b_i в виде (4.5), получим равенства

$$\Delta a_i = -\frac{c}{2p_0 p_1} \alpha_i \Delta\alpha_i (c - \alpha_i)(c + \alpha_i - 2\lambda), \quad p_0 = \prod_i (c - \alpha_i), \quad p_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$\varphi_1 = \frac{c}{4p_0 p_1} \sum_i (c - 2\alpha_i)(c + \alpha_i - 2\lambda) \frac{\Delta\alpha_i}{\alpha_i}, \quad \varphi_2 = -\frac{c}{4p_0 p_1} \sum_i (c - 2\alpha_i)(c + \alpha_i - 2\lambda) \Delta\alpha_i.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = -\frac{c^2(c-2\lambda)}{4p_0p_1}\cdot\frac{\Delta\alpha_1\Delta\alpha_2\Delta\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \quad \varphi_2 = -\frac{c}{2p_0p_1}\Delta\alpha_1\Delta\alpha_2\Delta\alpha_3,$$

и тогда

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\lambda_0^2-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}{2(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Подставляя это выражение в интеграл (4.6), приведем его к виду (2.12).

Сравнивая интеграл (2.12) с линейной комбинацией $\sum c_iF_i$, получим равенство $c_2 = c_1$ и шесть линейных уравнений для трех коэффициентов c_1, c_3, c_4. Указанная система оказывается совместной, и ее решение записывается в виде (4.4). ■

Отметим, что если матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ заданы параметрами Шоттки (4.1), то элементы матриц $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, определенные формулой (4.5), удовлетворяют условиям

$$a_i^2 - b_i^2 = 2a_i/(\lambda+\lambda_0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Эти условия содержатся, как частный случай, в условиях (3.14) или (2.1) при $\psi_1 = 0, \psi_2 = -2/(\lambda+\lambda_0)$. При параметризации Шоттки элементы диагональных матриц $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ заданы четырьмя параметрами λ_i. При записи условия существования дополнительного интеграла в виде (3.14) свободных параметров пять: $\psi_1, \psi_2, a_1, a_2, a_3$. Учитывая, что исходные уравнения не изменяются при преобразовании $\mathbf{A}' = \alpha\mathbf{E} + \mathbf{A}_2$, можно подобрать параметр α так, чтобы условие (2.1) (для диагональных матриц) привести к виду с $\psi_1 = 0$:

$$\mathbf{B}'^2 = \mathbf{A}_2^2 + \psi_s\mathbf{A}_2, \quad \psi_s = 2\alpha + \psi_2. \tag{4.7}$$

При этом должно выполняться равенство $\alpha^2+\psi_2\alpha+\psi_1 = 0$. Если $\psi_2^2 > 4\psi_1$, то параметры α, ψ_s и матрица $\mathbf{A}_2$ являются действительными. Параметры Шоттки λ_i $(i = 0, \ldots, 3)$, задающие матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, в этом случае являются действительными величинами. Если же $\psi_2^2 < 4\psi_1$, то величина ψ_s является чисто мнимой, а элементы матрицы $\mathbf{A}_2$ — комплексные. Параметры Шоттки λ_i тоже являются комплексными, что иногда может оказаться неудобным. Коэффициенты интеграла (2.12) являются комплексными величинами вида $\eta_i = z\zeta_i$, где z — комплексная величина, ζ_i — действительные величины, и система имеет действительный интеграл вида $\sum\zeta_iK_iS_i = \mathrm{const}$.

В случае $\psi_2^2 = 4\psi_1$ дополнительный интеграл в виде Шоттки не существует. Этот случай рассмотрен в параграфе 5 (предложение 10).

Пример. Элементы матриц $\mathbf{A}' = \mathrm{diag}(1/2, 5/3, 11/4)$, $\mathbf{B}' = \mathrm{diag}(5/2, 10/3, 17/4)$ удовлетворяют необходимому и достаточному условию (2.6) существования дополнительного интеграла. Эти элементы удовлетворяют условиям (3.14) при $\psi_1 = 5$, $\psi_2 = 2$. Приведение к виду (4.7) выполняется при $\alpha = 2i-1$, тогда $\psi_s = 4i$. Элементы матриц $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{A}_2 = \mathrm{diag}(a_k^{(2)}) = \mathrm{diag}(3/2-2i, 8/3-2i, 15/4-2i)$ удовлетворяют условиям $(a_k^{(2)})^2 - (b_k)^2 = -4ia_k^{(2)}$, $k = 1, 2, 3$. Это позволяет по формулам (4.5) найти единственным образом параметры Шоттки, которые в данном примере являются следующими комплексными величинами:

$$\lambda_1 = (23-7i)/680, \quad \lambda_2 = (57+27i)/680, \quad \lambda_3 = (79+41i)/680.$$

Коэффициенты интеграла (2.12) также являются комплексными величинами $\eta_1 = 17 \times \times 29(3+5i), \eta_2 = 17 \cdot 27(3+5i), \eta_3 = 17 \cdot 25(3+5i)$. Дополнительным интегралом является $29S_1K_1 + 27S_2K_2 + 25S_3K_3 = \mathrm{const}$. $\Diamond$

Приведем параметрическое описание элементов матриц с действительными значениями параметров при $\psi_2^2 \neq 4\psi_1$ и соответствующую запись дополнительного интеграла.

Предложение 9. *Элементы диагональных матриц, связанных условием* $\mathbf{B}'^2 = \mathbf{A}'^2 + \psi_1\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{A}'$, *при* $\psi_2^2 \neq 4\psi_1$ *можно представить в виде* (2.13). *Дополнительный интеграл имеет вид* (2.14). *Коэффициенты* $\eta_i = \tau_i - \tau$ *интеграла* (2.14) *можно выразить через элементы матриц* $\mathbf{A}'$ *и* $\mathbf{B}'$ *следующим образом:*

$$\eta_i = (\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4})(q_i - \frac{1}{2}tr\mathbf{Q}) - \frac{1}{2}\det\mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \mathrm{diag}(q_i) = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' + \frac{\psi_2}{2}\mathbf{E}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Условие, связывающее $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, можно записать в виде

$$\mathbf{B}'^2 = (\mathbf{A}' - \alpha\mathbf{E})^2 + \kappa\mathbf{E}, \quad \alpha = -\psi_2/2, \quad \kappa = \psi_1 - \psi_2^2/4. \tag{4.9}$$

Пять параметров τ_1, τ_2, τ_3, α, β задают формулами (2.13) при $\kappa \neq 0$ все множество матриц $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$, удовлетворяющих условию (4.9). Здесь $\sigma = \mathrm{sign}(\kappa)$, $\beta = \sqrt{|\kappa|}/2$.

Вычисляя коэффициенты в интеграле (2.3) по формуле (2.4), получим

$$\eta_i = -\frac{\Delta\tau_1\Delta\tau_2\Delta\tau_3}{\tau_1\tau_2\tau_3}2\beta^3(\sigma\tau_1\tau_2\tau_3 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 2\tau_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда следует возможность записи интеграла в форме (2.14). Так как из формул (2.13) следует $\beta\tau_k = a_k + b_k - \alpha$, то коэффициенты интеграла можно записать в виде (4.8). $\blacksquare$

5. Некоторые частные случаи

5.1. Случай $\psi_2^2 = 4\psi_1$

В параграфе 4 отмечено, что при существовании дополнительного квадратичного интеграла в случае $\mathbf{B} = 0$ элементы матриц $\mathbf{A}'$, $\mathcal{B}$ при $\psi_2^2 > 4\psi_1$ могут быть заданы действительными параметрами Шоттки, а при $\psi_2^2 < 4\psi_1$ — комплексными параметрами Шоттки. В случае $\psi_2^2 = 4\psi_1$ условие (3.14) записывается в виде

$$\mathcal{B} = \pm(\mathbf{A}' + \psi_2/2\mathbf{E}). \tag{5.1}$$

Матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathcal{B}$ при этом задать параметрами Шоттки невозможно, так как если $\beta_i - - a_i = \mathrm{const}$ или $\beta_i + a_i = \mathrm{const}$, то из представлений (4.5) следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, но тогда $\mathbf{A}' = \mu_1\mathbf{E}$, $\mathcal{B} = \mu_2\mathbf{E}$ и интеграл (4.2) является при этом следствием интегралов F_1, F_2, F_3, а не дополнительным интегралом.

Получим форму интеграла и условия его существования в рассматриваемом случае непосредственно из теоремы 1.

Предложение 10. *Уравнения Пуанкаре – Жуковского обладают интегралом*

$$(\mathbf{K}, \mathbf{RS}) = \mathrm{const}. \tag{5.2}$$

если выполнены условия

$$\mathbf{C}' = \psi\mathbf{E} + \mathbf{R}^T\mathbf{A}'\mathbf{R}, \quad \mathbf{B}' = (\mathbf{A}' + \alpha\mathbf{E})\mathbf{R}, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{R} \in SO(3)$ *и* α, ψ *— произвольные параметры.*

Доказательство. Если, в соответствии с условием (5.1), $\beta_i = \pm(a_i + \alpha)$, то из формул (2.8) получим $\varphi_2 = 0$. Если $\beta_i = -(a_i + \alpha), i = 1, 2, 3$, то и $\varphi_1 = 0$. Если $\beta_i = a_i + \alpha$, то $\varphi_1 = -2\Delta a_1 \Delta a_2 \Delta a_3$ и формула (2.7) дает интеграл (5.2). Условия (5.3) получаем из условий (5.1) и (2.5). ■

Отметим, что если операторы $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{C}'$ имеют общие собственные векторы, то интеграл (5.2) и условия (5.3) записываются в виде

$$(\mathbf{K}, \mathbf{S}) = \mathrm{const}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{A}' + \psi\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{A}' + \alpha\mathbf{E}. \tag{5.4}$$

5.2. Неполная форма интеграла (2.3)

Рассмотрим случай, когда один из коэффициентов η_i в интеграле (2.3) равен нулю, пусть $\eta_2 = 0$. Уравнения (3.16) принимают вид

$$\Delta a_1 \eta_1 - \eta_3 \beta_2 = 0, \quad \eta_3 \beta_1 - \eta_1 \beta_3 = 0, \quad \Delta a_3 \eta_3 + \eta_1 \beta_2 = 0. \tag{5.5}$$

Так как η_i определены с точностью до общего множителя, то можно положить

$$\eta_1 = \beta_1, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = \beta_3. \tag{5.6}$$

Из условий (5.5) следует

$$\beta_2 \beta_3 = \beta_1 \Delta a_1, \quad \beta_2 \beta_1 = -\beta_3 \Delta a_3. \tag{5.7}$$

Отсюда получим $\beta_1^2 \Delta a_1 + \beta_3^2 \Delta a_3 = 0$. Условие (2.6) при $\Delta a_2 \neq 0$ запишется в виде $\beta_2^2 + \Delta a_1 \Delta a_3 = 0$, и тогда

$$\beta_2 = \delta\sqrt{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \quad \delta = \pm 1.$$

Учитывая условия (5.7), получим связь между β_1, β_3:

$$\beta_3 = \mathrm{sign}(\Delta a_1)\delta\sqrt{\frac{-\Delta a_1}{\Delta a_3}}\beta_1.$$

Интеграл принимает вид

$$\sqrt{|a_1 - a_2|}K_1\widetilde{S}_1 + \delta\,\mathrm{sign}(a_2 - a_3)\sqrt{|a_2 - a_3|}K_3\widetilde{S}_3 = \mathrm{const}. \tag{5.8}$$

Необходимо выполнение условия $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) < 0$; следовательно, величина a_2 является наименьшей или наибольшей из значений a_1, a_2, a_3.

Матрица $\mathcal{B}$ может быть записана в виде

$$\mathcal{B} = \mathrm{diag}(\sqrt{|\Delta a_3|}\beta, \delta\sqrt{|\Delta a_1 \Delta a_3|}, \delta\,\mathrm{sign}(\Delta a_1)\sqrt{|\Delta a_1|}\beta), \tag{5.9}$$

здесь β — произвольный параметр.

Предложение 11. *Неполная форма дополнительного интеграла может быть представлена в виде* (2.15) *или в следующем эквивалентном виде:*

$$(\mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S}) - K_2(b_{21}S_1 + b_{22}S_2 + b_{23}S_3) = \mathrm{const}. \tag{5.10}$$

Здесь (b_{ij}) — *матрица* $\mathbf{B}'$ *в базисе* $(\mathbf{e}_i)$.

Доказательство. Учитывая равенство $\mathbf{R} = \mathcal{B}^{-1}\mathbf{B}'$, получим $\mathbf{l}_i = \mathbf{R}^T\mathbf{e}_i = \beta_i^{-1}\mathbf{B}'^T\mathbf{e}_i$, и тогда $\widetilde{S}_i = (\mathbf{S}, \mathbf{l}_i) = \beta_i^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{S}, \mathbf{e}_i)$.

В силу (5.6), интеграл (2.3) может быть записан в виде

$$\sum \beta_i K_i \widetilde{S}_i - \beta_2 K_2 \widetilde{S}_2 = \sum K_i(\mathbf{B}'\mathbf{S}, \mathbf{e}_i) - K_2(\mathbf{B}'\mathbf{S}, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S}) - K_2(\mathbf{B}'\mathbf{S}, \mathbf{e}_2) = \mathrm{const}.$$

и тогда интеграл может быть записан в виде (5.10) или (2.15). ■

Выделим обсуждаемый ниже случай $\mathbf{l}_2 = \mathbf{e}_2$. В этом случае вектор $\mathbf{e}_2$ является собственным вектором оператора $\mathbf{B}'^T$ и $b_{21} = b_{23} = 0$. Интеграл (5.10) принимает вид (2.16).

5.3. Случай, когда $\mathbf{A}', \mathbf{C}'$ имеют общий собственный вектор

Пусть $\mathbf{l}_2 = \mathbf{e}_2$, тогда можно записать $\mathbf{l}_1 = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_3, \mathbf{l}_3 = -\sin\varphi\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\mathbf{e}_3$.

Матрица (r_{ij}) оператора поворота $\mathbf{R}$ в базисе $(\mathbf{e}_i)$ задана равенствами

$$r_{11} = r_{33} = \cos\varphi, \quad r_{22} = 1, \quad r_{13} = -r_{31} = \sin\varphi, \quad r_{12} = r_{21} = r_{23} = r_{32} = 0.$$

Выражения для элементов матрицы $\mathbf{C}'$ получим из первого условия (2.5):

$$\begin{aligned} &c_{13} = (a_1 - a_3)\sin\varphi\cos\varphi, \quad c_{23} = c_{12} = 0, \quad c_{22} = \psi + a_2, \\ &c_{11} = \psi + a_1\cos^2\varphi + a_3\sin^2\varphi, \quad c_{33} = \psi + a_1\sin^2\varphi + a_3\cos^2\varphi. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Из второго условия (2.5) найдем

$$\begin{aligned} &b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, \quad b_{13} = \beta_1\sin\varphi, \quad b_{31} = -\beta_3\sin\varphi, \\ &b_{11} = \beta_1\cos\varphi, \quad b_{22} = \beta_2, \quad b_{33} = \beta_3\cos\varphi. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Отметим, что если операторы $\mathbf{A}', \mathbf{C}'$ имеют общий собственный вектор, то этот вектор также будет собственным и для оператора $\mathbf{B}'$.

Условие (2.9) примет вид

$$(b_{11}^2 + b_{13}^2 - a_1^2)(a_2 - a_3) + (b_{22}^2 - a_2^2)(a_3 - a_1) + (b_{31}^2 + b_{33}^2 - a_3^2)(a_1 - a_2) = 0. \tag{5.13}$$

Так как $\widetilde{\mathbf{S}} = \mathbf{RS}$, то

$$\widetilde{S}_1 = \cos\varphi S_1 + \sin\varphi S_3, \quad \widetilde{S}_2 = S_2, \quad \widetilde{S}_3 = -\sin\varphi S_1 + \cos\varphi S_3,$$

и интеграл записывается в виде

$$(\eta_1 K_1 S_1 + \eta_3 K_3 S_3)\cos\varphi + \eta_2 K_2 S_2 + (\eta_1 K_1 S_3 - \eta_3 K_3 S_1)\sin\varphi = \mathrm{const}. \tag{5.14}$$

Доказано следующее утверждение.

Предложение 12. *Если операторы* $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$ *имеют общий собственный вектор* $\mathbf{l}_2 = \mathbf{e}_2$ *и величины* $a_i, \beta_i (i = 1, 2, 3)$ *связаны условием* (2.6) (*или заданы пятью произвольными параметрами* α, β, τ_1, τ_2, τ_3 *формулой* (2.13)), *то дополнительный квадратичный интеграл может быть записан в виде* (5.14), *если элементы матриц операторов* $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ *в базисе* $(\mathbf{e}_i)$ *заданы равенствами* (5.11), (5.12), *где* φ, ψ — *произвольные параметры. Коэффициенты* η_i *интеграла заданы формулой* (2.4).

6. О некоторых новых квадратичных интегралах

В работе [9] указывается на наличие новых случаев существования дополнительного квадратичного интеграла (1.5). Отметим, что условия существования и сами интегралы не приведены авторами [9] в явной форме. Например, в теореме 1 [9] указаны по восемь нулевых элементов матриц $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$. Для остающихся двадцати шести элементов этих матриц даны девять условий, связывающих элементы матриц $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ с элементами $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, и шесть нелинейных условий, связывающих элементы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ между собой. В аналогичной неявной форме представлены и другие (теоремы 1–8) результаты.

В качестве следствия теорем 5, 6 (в работе [9]) приведено утверждение, находящееся в прямом противоречии с известным результатом А. П. Веселова [7]. Утверждается [9], что дополнительный квадратичный интеграл всегда существует, если матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ являются диагональными, а полученное в [9] решение содержит, как частные результаты, все известные случаи — Шоттки, Стеклова и другие.

В соответствии с теоремой Веселова [7, 8], для существования дополнительного полиномиального интеграла в случае диагональных матриц $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ необходимо выполнение условия (2.6), связывающего элементы $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$, и аналогичного условия, связывающего элементы $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{B}'$.

Ниже мы покажем, что во всех рассмотренных в теоремах 1–6 [9] случаях выполнены условия (1.6) и, следовательно, дополнительный интеграл в каждом из этих случаев является линейной комбинацией интегралов F_1, F_2, F_3 и интеграла (1.7). Как показано в теореме 1 настоящей работы, система Пуакаре–Жуковского (1.2) преобразованием $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$, $\widetilde{\mathbf{S}} = \mathbf{RS}$ (при существовании интеграла (1.7) в случае невырожденной матрицы $\mathbf{B}'$) приводится к классическому случаю Шоттки с диагональными матрицами в гамильтониане. Более того, во всех теоремах 1–6 [9] матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ имеют общий собственный вектор, и приведенные в этих теоремах интегралы включены в описанный выше (см. параграф 5.3) частный случай. Дополнительный интеграл может быть записан в виде (5.14).

а) Выпишем часть условий теоремы 1 [9], которые в обозначениях, принятых при записи системы (1.2) и интеграла (1.5), имеют вид

$$a_{12} = a_{23} = c_{12} = c_{23} = 0, \tag{6.1}$$

$$X_{12} = X_{23} = Z_{12} = Z_{23} = 0, \tag{6.2}$$

$$a_{13}Z_{13} = c_{13}X_{13}, \tag{6.3}$$

$$a_{13}(X_{22} - X_{33}) = (a_{22} - a_{33})X_{13}, \quad c_{13}(Z_{22} - Z_{33}) = (c_{22} - c_{33})Z_{13}, \tag{6.4}$$

$$\Delta a_1 X_{11} + \Delta a_2 X_{22} + \Delta a_3 X_{33} = 0, \quad \Delta c_1 Z_{11} + \Delta c_2 Z_{22} + \Delta c_3 Z_{33} = 0. \tag{6.5}$$

Здесь $a_{ij}, c_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}$ — элементы матриц операторов $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ в некотором базисе $(\mathbf{g}_i)$ и $\Delta a_i = a_{jj} - a_{kk}$. Случай $\Delta a_i = \Delta c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, приводящий к значительному упрощению условий [9], не будем здесь рассматривать. Если же не все Δa_i и не все Δc_i равны нулю, то любые наборы параметров X_{ii}, Z_{ii}, удовлетворяющих условиям (6.5), могут быть записаны в виде

$$X_{ii} = \mu_1 + \mu_2 a_{ii}, \quad Z_{ii} = \nu_1 + \nu_2 c_{ii}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6.6}$$

Первое условие (6.4) при $a_{22} \neq a_{33}$ приводит к равенству $X_{13} = \mu_2 a_{13}$. Учитывая условия (6.2), (6.6), получим $\mathbf{X} = \mu_1\mathbf{E} + \mu_2\mathbf{A}'$. Аналогично получаем $\mathbf{Z} = \nu_1\mathbf{E} + \nu_2\mathbf{C}'$. Условие (6.3) дает равенство $a_{13}c_{13}\nu_2 = a_{13}c_{13}\mu_2$. Анализируемые здесь случаи интегрируемости приведены в работе [9] «при наличии в гамильтониане матриц общего недиагонального вида». Полагая поэтому $a_{13} \neq 0, c_{13} \neq 0$, получим $\nu_2 = \mu_2$, но тогда матрицы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ удовлетворяют условию (1.6).

Отметим, что в соответствии с условием (6.1) орт $\mathbf{g}_2$ является собственным вектором операторов $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{C}'$.

b) Часть условий теоремы 3 [9] можно записать в виде

$$a_{12} = a_{23} = c_{12} = c_{23} = 0, \quad X_{12} = X_{23} = Z_{12} = Z_{23} = 0, \tag{6.7}$$

$$a_{23} + c_{23} = 0, \quad X_{23} + Z_{23} = 0, \tag{6.8}$$

$$c_{ii} = c_0 + a_{ii}, \quad Z_{ii} = Z_0 + X_{ii}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6.9}$$

$$a_{23}(X_{11} - X_{33}) = (a_{11} - a_{33})X_{23}, \quad a_{23}(X_{22} - X_{33}) = (a_{22} - a_{33})X_{23}. \tag{6.10}$$

Из условий (6.10) при $\Delta a_i \neq 0$ следует

$$X_{23} = \frac{a_{23}}{a_{11} - a_{33}}(X_{11} - X_{33}) = \frac{a_{23}}{a_{22} - a_{33}}(X_{22} - X_{33}). \tag{6.11}$$

Отсюда, при $a_{23} \neq 0$, имеем $\Delta a_1(X_{11} - X_{33}) = -\Delta a_2(X_{22} - X_{33})$ и получаем первое условие (6.5) и представление (6.6) для X_{ii}. Из условий (6.11) теперь следует равенство $X_{23} = \mu_2 a_{23}$. Учитывая условия (6.7), получаем $\mathbf{X} = \mu_1\mathbf{E} + \mu_2\mathbf{A}'$. Из условий (6.9) следует $Z_{ii} = \mu_3 + \mu_2 c_{ii}$, где $\mu_3 = Z_0 + \mu_1 - \mu_2 c_0$. Учитывая условия (6.8), получим $Z_{23} = -X_{23} = -\mu_2 a_{23} = \mu_2 c_{23}$; следовательно, $\mathbf{Z} = \mu_3\mathbf{E} + \mu_2\mathbf{C}'$, и операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ представлены в виде (1.6).

При условиях (6.7) общим собственным вектором операторов $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$ является $\mathbf{g}_1$.

c) Приведем часть необходимых условий теоремы 5 [9]. Они включают в себя условия (6.1), (6.2), (6.5), а также следующие условия:

$$a_{13} = b_{13}\frac{X_{13}}{Y_{13}}, \quad c_{13} = b_{13}\frac{Z_{13}}{Y_{13}}, \tag{6.12}$$

$$b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, \quad b_{13}^2 = b_{31}^2, \tag{6.13}$$

$$a_{11} - a_{22} = \frac{b_{13}}{Y_{13}}(X_{11} - X_{22}), \quad c_{11} - c_{22} = \frac{b_{13}}{Y_{13}}(Z_{11} - Z_{22}). \tag{6.14}$$

Из условий (6.5) следуют равенства (6.6), и из условий (6.13) получим $Y_{13} = \mu_2 b_{13} = \nu_2 b_{13}$. Если $b_{13} = 0$, то из условий (6.1), (6.12), (6.13) следует, что матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ — диагональные. Если $b_{13} \neq 0$, то получим $\mu_2 = \nu_2$. Из условий (6.12) следует

$$a_{13} = b_{13}\frac{X_{13}}{\mu_2 b_{13}}, \quad c_{13} = b_{13}\frac{Z_{13}}{\mu_2 b_{13}}.$$

Отсюда $X_{13} = \mu_2 a_{13}, Z_{13} = \mu_2 c_{13}$, и, учитывая условия (6.1), (6.6) и равенство $\mu_2 = \nu_2$, получаем, что операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ имеют вид (1.6). Общим собственным вектором операторов $\mathbf{A}'$, $\mathbf{C}'$ является $\mathbf{g}_2$.

Теоремы 2, 4, 6 являются следствиями теорем 1, 3, 5 [9]. При выполнении условий теорем 2, 4, 6 операторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ также представимы в форме (1.6), дополнительный интеграл может быть записан в виде (1.7) и уравнения Пуанкаре – Жуковского приводятся к случаю Шоттки.

d) Получим явный вид интеграла и укажем явное приведение к случаю Шоттки на примере теоремы 1 [9].

Как показано выше, из условий (6.1)–(6.5) следует представимость операторов **X** и **Z** в виде (1.6). Система условий (6.1)–(6.5) эквивалентна системе условий (6.1), (1.6). Выпишем оставшиеся условия теоремы 1 [9]:

$$b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, \quad Y_{12} = Y_{21} = Y_{23} = Y_{32} = 0, \tag{6.15}$$

$$b_{11} = b_{13}\frac{Y_{11}}{Y_{13}}, \quad b_{22} = a_{13}\frac{Y_{22}}{X_{13}}, \quad b_{33} = b_{31}\frac{Y_{33}}{Y_{31}}, \quad b_{31}Y_{13} = b_{13}Y_{31}, \tag{6.16}$$

$$X_{13} = Y_{22}(Y_{13}Y_{33} + Y_{31}Y_{11})/y, \quad Z_{13} = Y_{22}(Y_{11}Y_{13} + Y_{33}Y_{31})/y, \tag{6.17}$$

$$X_{11} - X_{33} = Y_{22}(Y_{11}^2 - Y_{33}^2 + Y_{13}^2 - Y_{31}^2)/y, \quad X_{33} - X_{22} = Y_{22}(Y_{33}^2 + Y_{31}^2)/y, \tag{6.18}$$

$$Z_{11} - Z_{33} = Y_{22}(Y_{11}^2 - Y_{33}^2 + Y_{31}^2 - Y_{13}^2)/y, \quad Z_{33} - Z_{22} = Y_{22}(Y_{33}^2 + Y_{13}^2)/y. \tag{6.19}$$

Здесь $y = Y_{13}Y_{31} - Y_{11}Y_{33}$.

Из второго условия (6.16) при учете (1.6) получим

$$Y_{22} = \mu b_{22}. \tag{6.20}$$

Преобразуем, с учетом условий (1.6), (6.20), (6.16), первое условие (6.17):

$$\mu a_{13} = \frac{\mu b_{22}(\dfrac{Y_{13}}{Y_{11}} + \dfrac{Y_{31}}{Y_{33}})}{\dfrac{Y_{13}Y_{31}}{Y_{11}Y_{33}} - 1} = \frac{\mu b_{22}(\dfrac{b_{13}}{b_{11}} + \dfrac{b_{31}}{b_{33}})}{\dfrac{b_{13}b_{31}}{b_{11}b_{33}} - 1}$$

Выполнив аналогичное преобразование второго условия (6.17) и условий (6.18), (6.20), запишем

$$\begin{cases} a_{13} = k(b_{33}b_{13} + b_{11}b_{31}), \quad c_{13} = k(b_{11}b_{13} + b_{31}b_{33}), \\ a_{11} - a_{33} = k(b_{11}^2 - b_{33}^2 + b_{13}^2 - b_{31}^2), \quad c_{11} - c_{33} = k(b_{11}^2 - b_{33}^2 + b_{31}^2 - b_{13}^2), \\ a_{33} - a_{22} = k(b_{33}^2 + b_{31}^2), \quad c_{33} - c_{22} = k(b_{33}^2 + b_{13}^2), \quad k = \dfrac{b_{22}}{b_{13}b_{31} - b_{11}b_{33}}. \end{cases} \tag{6.21}$$

Отметим, что при записи условий теоремы 1 [9] неявно предполагается, что оператор $\mathbf{B}'$ — невырожденный. Действительно, при условиях (6.15) имеем $\det \mathbf{B}' = b_{22}(b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31})$. Приведенная в [9] запись условий возможна, только если $b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} \neq 0$. Очевидно, следует считать и $b_{22} \neq 0$, иначе получим из (6.21) $\mathbf{A}' = \kappa_1\mathbf{E}$ и $\mathbf{C}' = \kappa_2\mathbf{E}$.

Первое, третье и четвертое условия (6.16) запишем в виде

$$\frac{Y_{11}}{Y_{33}} = \frac{b_{11}}{b_{33}}, \quad \frac{Y_{13}}{Y_{31}} = \frac{b_{13}}{b_{31}}, \quad \frac{Y_{11}}{Y_{13}} = \frac{b_{11}}{b_{13}}. \tag{6.22}$$

Таким образом, условия теоремы 1 [9] эквивалентны системе условий (1.6), (6.1), (6.15), (6.20)–(6.22).

Слагаемые $\mu_1\mathbf{E}$, $\mu_2\mathbf{E}$ в формуле (1.6) выделяют из интеграла (1.5) интегралы $\mu_1 F_1$ и $\mu_2 F_2$; эти слагаемые можно опустить. Операторы $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ в интеграле (1.5) определены с точностью до общего множителя, поэтому множитель μ в условиях (1.6), (6.20) можно положить равным единице.

Условия существования интеграла (1.6), (6.1), (6.15), (6.20), (6.21) запишем в следующем эквивалентном виде, введя параметры a, b, c, d, ν:

$$\begin{cases} b_{11} = a, b_{33} = b, b_{13} = c, b_{31} = d, b_{22} = k(cd - ab), b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, \\ a_{13} = k(bc + ad), \quad c_{13} = k(ac + bd), \quad a_{12} = a_{23} = c_{12} = c_{23} = 0, \\ a_{11} - a_{33} = k(a^2 - b^2 + c^2 - d^2), \quad a_{33} - a_{22} = k(b^2 + d^2), \\ c_{11} - c_{33} = k(a^2 - b^2 + d^2 - c^2), \quad c_{33} - c_{22} = k(b^2 + c^2), \\ \mathbf{X} = \mathbf{A}', \quad \mathbf{Z} = \mathbf{C}', \\ Y_{22} = k(cd - ab), \quad Y_{11} = k\nu a, \quad Y_{13} = k\nu c, \quad Y_{31} = k\nu d, \quad Y_{33} = k\nu b, \\ Y_{12} = Y_{21} = Y_{23} = Y_{32} = 0. \end{cases} \tag{6.23}$$

Условия (6.23) эквивалентны представлению операторов в следующем виде

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = a_{22}\mathbf{E} + \dfrac{a^2 + c^2}{k}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1^T + \dfrac{b^2 + d^2}{k}\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3^T + \dfrac{ad + bc}{k}(\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3^T + \mathbf{g}_3\mathbf{g}_1^T), \\ \mathbf{C}' = c_{22}\mathbf{E} + \dfrac{a^2 + d^2}{k}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1^T + \dfrac{b^2 + c^2}{k}\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3^T + \dfrac{ac + bd}{k}(\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3^T + \mathbf{g}_3\mathbf{g}_1^T), \\ \mathbf{B}' = a\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1^T + b\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3^T + \dfrac{cd - ab}{k}\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2^T + c\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3^T + d\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1^T, \\ \mathbf{X} = \mathbf{A}', \quad \mathbf{Z} = \mathbf{C}', \quad \mathbf{Y} = k\nu\mathbf{B}' + k(1 - k\nu)(cd - ab)\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2^T. \end{cases} \tag{6.24}$$

Таким образом, формула (1.5) задает дополнительный интеграл системы, если матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ заданы формулами (6.24), где $a, b, c, d, k, a_{22}, c_{22}, \nu$ — произвольные параметры, $(\mathbf{g}_i)$ — произвольная правая ортонормированная тройка векторов. В качестве дополнительного интеграла можно выбрать и интеграл $F - F_3$. Учитывая формулы (6.24), получим

$$F - F_3 = 2(k\nu - 1)((\mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S}) + k(ab - cd)S_2K_2) = \mathrm{const}.$$

Так как, в соответствии с (6.23), $k(ab - cd) = -b_{22}$, то после сокращения на $2(k\nu - 1)$ получаем в точности интеграл (2.16).

В рассматриваемом случае вектор $\mathbf{g}_2$ является собственным вектором операторов $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{C}'$. Если от базиса $(\mathbf{g}_i)$ перейти к базису $(\mathbf{e}_i)$ собственных векторов оператора $\mathbf{A}'$ поворотом вокруг $\mathbf{g}_2$ и перейти к переменным $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}, \widetilde{\mathbf{S}} = \mathbf{RS}$, то получим случай Шоттки для уравнений Пуанкаре – Жуковского с диагональными матрицами в гамильтониане, причем $\mathbf{A}' = \mathbf{C}' + \kappa\mathbf{E}$.

В соответствии с предложением 12, операторы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ в случае $\mathbf{l}_2 = \mathbf{e}_2$ задаются семью параметрами $\alpha, \beta, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \varphi, \psi$. Полученное здесь представление этих операторов в виде (6.24) в случае выполнения условий теоремы 1 [9] также содержит семь параметров $a, b, c, d, k, a_{22}, c_{22}$.

Список литературы

[1] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.: Т. 2. М.: Гостехиздат, 1948. С. 31–152.

[2] Poincaré H. Sur la précession des corps déformables // Bull. Astron. Ser. 1, 1910, vol. 27, pp. 321–356 (*см. также:* Пуанкаре А. Последние работы. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. С. 74–111).

[3] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. 384 с.

[5] Schottky F. Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen // Sitzungsberichte der König. Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1891, vol. 13, pp. 227–232 (*см. также:* Шоттки Ф. Об аналитической задаче вращения твердого тела в четырехмерном пространстве // Система Клебша. Разделение переменных, явное интегрирование?: Сб. ст. / А. В. Борисов, А. В. Цыганов. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2009. С. 153–158).

[6] Stekloff V. A. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remple par un liquide incompressible en sur les variations des latitudes // Ann. de la Faculte des Sciences l'Universite de Toulouse, Ser. 3, 1909, vol. 1, pp. 145–256 (*см. также:* Стеклов В. А. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. В. Цыганов. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2011).

[7] Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на SO(4) // Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 6, с. 1298–1300.

[8] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия: Методы и приложения. М.: МГУ, 1988. 413 с.

[9] Брусенцова Е. А., Плешаков Ю. Д. Новые интегрируемые случаи в задаче Жуковского–Пуанкаре // Докл. РАН, 2008, т. 418, № 4, с. 473–476.

On quadratic integral Poincare – Zhukovsky's equations

Vladimir Yu. Olshanskii

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Scienses
Rabotchaya 24, Saratov, 410028, Russia
olshanskiy_vlad@mail.ru

For Poincaré – Zhukovsky's equations with non-diagonal matrices in the Hamiltonian, we obtain conditions for existence of the quadratic integral $(\mathbf{YS}, \mathbf{K}) = \mathrm{const}$ and the explisit form of it. It is shown that if the integral exists, then the equations reduce to the Schottky's case.

MSC 2010: 70E40, 37J35
Keywords: Poincaré – Zhukovsky's equations, quadratic integral, non-diagonal matrices, Schottky's case

Received February 3, 2012, accepted March 14, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 523–540 (Russian)