Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 569–583.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45

О сфере Рауса

И. А. Бизяев, А. В. Цыганов

Обсуждается вложение неголономного векторного поля для сферы Рауса в подгруппу коммутирующих гамильтоновых векторных полей. Доказано, что соответствующая скобка Пуассона приводится к канонической скобке на алгебре $e^*(3)$ в области, где у исходного векторного поля отсутствуют гомоклинические траектории.

Ключевые слова: неголономная механика, сфера Рауса, скобки Пуассона

1. Введение

С математической точки зрения любая динамическая система на фазовом пространстве $\mathcal{M}$ с координатами $x_1, \ldots x_m$ определяется уравнениями движения

$$\dot{x}_i = X_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.1}$$

Эта система дифференциальных уравнений задает векторное поле

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.2}$$

Получено 28 июля 2012 года
После доработки 29 сентября 2012 года

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.1935

Бизяев Иван Алексеевич
bizaev_90@mail.ru
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

которое является линейным оператором на пространстве гладких функций на многообразии $\mathcal{M}$, определяющим изменение любой характеристики системы

$$\dot{F} = X(F) = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

при выполнении динамических уравнений (1.1).

Наиболее общая формулировка закона движения голономных механических систем дается так называемым принципом наименьшего действия. Согласно этому принципу каждая механическая система полностью характеризуется определенной функцией H, которая называется энергией системы, функцией Гамильтона или просто гамильтонианом.

Например, для того чтобы построить векторное поле X (1.2) с помощью функции H, достаточно подействовать бивектором P на вектор производных гамильтониана

$$X = X_H \equiv P\,dH. \tag{1.3}$$

Если далее предположить, что энергия сохраняется

$$\dot{H} = X_H(H) = (P\,dH, dH) = 0,$$

а различные эволюции совместны друг с другом, то есть

$$X_{H_1}(X_{H_2}(F)) = X_{H_2}(X_{H_1}(F)) + X_{X_{H_1}(H_2)}(F),$$

где H_1 и H_2 — функции Гамильтона (например, свободного движения и движения в потенциальном поле), то бивектор P будет бивектором Пуассона, то есть кососимметричным бивектором, удовлетворяющим тождеству Якоби (см., например, [1, 15]). В этом случае векторное поле X (1.3) называется гамильтоновым векторным полем.

Для ряда других негамильтоновых динамических систем, например для нескольких классических неголономных систем, векторное поле строится с помощью гамильтонина и плотности инвариантной относительно X меры

$$X = gP\,dH; \tag{1.4}$$

здесь, как и прежде, H — энергия системы, P — бивектор Пуассона, а функция g определяет плотность инвариантной меры

$$\mu = g^n\,dx_i\,dx_j.$$

Соответствующее векторное поле X (1.4) называется конформо-гамильтоновым (см. [3, 8, 16]).

В общем случае принцип наименьшего действия не применим к неголономным системам (см. фундаментальные работы Герца [10] и Пуанкаре [17]). Однако если у системы уравнений (1.1) есть несколько интегралов движения $H_1, \ldots, H_n$, то вполне естественно предположить, что энергетический принцип может быть обобщен так, чтобы исходное векторное поле определялось сразу всеми интегралами движения

$$X = g_1 P\,dH_1 + \cdots + g_n P\,dH_n. \tag{1.5}$$

Другими словами, можно предположить, что векторное поле X (1.2) является линейной комбинацией коммутирующих гамильтоновых векторных полей PdH_j. Такие обобщенно-конформные векторные поля встречаются и в бигамильтоновой геометрии [22] и при рассмотрении некоторых неголономных систем [24]. В отличие от конформно-гамильтоновых векторных полей (1.4), в этом случае решения исходных уравнений движения не могут быть получены из решений гамильтоновых уравнений движения простой заменой времени.

Если такое разложение (1.5) существует, то слоение на инвариантные торы исходной динамической системы будет таким же, как в случае гамильтоновой системы. Таким образом, мы можем изучать лиувиллево слоение вспомогательной гамильтоновой системы, определяемой векторными полями $P\,dH_j$, используя стандартные методы, разработанные для гамильтоновых систем. Затем мы можем постараться перенести полученные результаты на слоение исходной системы и сделать некоторые качественные выводы о типах траекторий, устойчивости и т. д.

Далее мы докажем, что векторное поле для неголономной сферы Рауса является обобщенно-конформным векторным полем вида (1.5) на шестимерном фазовом пространстве, а также изучим свойства соответствующих скобок Пуассона.

2. Сфера Рауса

Следуя [4, 11, 12, 19], рассмотрим качение неуравновешенного динамически симметричного шара по плоскости без проскальзывания. «Неуравновешенный» означает, что центр масс не совпадает с геометрическим центром, а «симметричный» означает, что два момента инерции совпадают друг с другом. Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта имеет вид

$$v + \omega \times r = 0, \tag{2.1}$$

где ω и v — угловая скорость и скорость центра масс тела, r — вектор из центра масс в точку контакта относительно подвижной системы координат, связанной с главными осями шара. Скобки (a, b) обозначают обычное скалярное произведение, а $a \times b$ — векторное произведение трехмерных векторов.

В подвижной системе координат угловой момент подвижной сферы относительно точки касания имеет вид

$$M = \mathbf{I_Q}\omega, \quad \mathbf{I_Q} = \mathbf{I} + mr^2\mathbf{E} - mr \otimes r. \tag{2.2}$$

Здесь m — масса шара, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции динамически симметричного шара, что означает равенство двух моментов инерции

$$I_1 = I_2.$$

Если $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор нормали в точке контакта, то

$$r = (R\gamma_1, R\gamma_2, R\gamma_3 + a),$$

где R — радиус шара и a — расстояние от геометрического центра до центра масс шара.

Фазовое пространство, уравнения движения и их редукция детально изложены в работах [4, 5, 7, 11, 12]. В силу этого мы сразу перейдем к уравнениям движения, возникающим после исключения множителя Лагранжа. Эти уравнения движения на шестимерном редуцированном пространстве с координатами $x = (\gamma, M)$ имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r), \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \tag{2.3}$$

Уравнения движения (2.3) обладают интегралами движения

$$H_1 = (M, \omega), \quad H_2 = (M, M) - mr^2 H_1, \quad H_3 = (M, r), \quad H_4 = (\gamma, \gamma) \tag{2.4}$$

и инвариантной мерой

$$\mu = g^{-1}(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}M, \quad g(\gamma) = \sqrt{I_1I_3 + I_1mR^2(H_4 - \gamma_3^2) + I_3m(R\gamma_3 + a)^2}. \tag{2.5}$$

Как и в случае движения симметричного волчка, для сферы Рауса существуют два линейных по скоростям интеграла движения, которые являются обобщениями циклических интегралов, соответствующих прецессии и собственному вращению. Первый из них

$$H_3 = (M, r)$$

представляет собой интеграл Джеллетта[1], который имеется также при достаточно общем законе трения в точке контакта [14] (см. также § 243, с. 192 в книге Рауса [19]).

Второй линейный по скоростям интеграл

$$\widehat{H}_2 = g(\gamma)\,\omega_3 \tag{2.6}$$

был найден Э. Раусом в 1884 году [19] и С. А. Чаплыгиным в работе [11]. Этот интеграл движения связан с квадратичным интегралом H_2 соотношением

$$H_2 = I_1H_1 + \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\widehat{H}_2^2 - \frac{m}{I_1}\,H_3^2.$$

Согласно [4], именно этот квадратичный интеграл движения допускает обобщение на динамически несимметричную ситуацию, в отличие от линейного интеграла движения $\widehat{H}_2$.

Для сферы Рауса, находящейся в гравитационном поле, к уравнениям движения (2.3) добавится одно слагаемое

$$\dot{M} = M \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r) + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \tag{2.7}$$

где $U = -m\mathrm{g}(r, \gamma)$ и g — ускорение свободного падения. В этом случае инвариантная мера μ и интегралы H_3, H_4 и $\widehat{H}_2$ сохраняются, а квадратичные интегралы имеют вид

$$H_1 = (\omega, M) + 2U, \quad H_2 = M^2 - mr^2(\omega, M) - 2m\mathrm{g}\big(aI_1\gamma_3 - mR^2\gamma^2(a^2 + \gamma^2R^2)\big). \tag{2.8}$$

Всюду далее мы будем рассматривать сферу Рауса в поле тяжести.

Согласно [12], отвечающее уравнениям (2.7) векторное поле X имеет гомоклинические траектории. Как следствие, сфера становится гироскопически нестабильной и опрокидывается, если центр масс находится выше геометрического центра находятся на одной вертикальной оси, а движение либо слишком медленное, либо такое, что значение интеграла Джеллета меньше порогового значения, описанного в [12].

2.1. Скобки Пуассона

Для того чтобы построить разложение (1.5) исходного векторного поля по гамильтоновым векторным полям, нам надо найти подходящий бивектор Пуассона. Так как для сферы Рауса шесть уравнений движения (2.7) обладают четырьмя интегралами движения и инвариантной мерой, то, по теореме Эйлера–Якоби, эти уравнения интегрируемы

[1]В отличие от встречающейся в отечественной литературе французской транскрипции «Желле», мы используем более корректную транскрипцию фамилии ирландского ученого J. H. Jellett.

в квадратурах. В силу этого можно предположить, что совместные поверхности уровня интегралов движения образуют лиувиллево слоение фазового пространства динамической системы, которая является гамильтоновой относительно бивектора Пуассона P, такого, что

$$P\,dC_{1,2} \equiv P\,\mathrm{d}H_{i,j} = 0, \quad (P\,\mathrm{d}H_\ell, \mathrm{d}H_k) \equiv \{H_\ell, H_k\} = 0, \quad [P, P] = 0, \tag{2.9}$$

где $[.,.]$ — скобка Схоутена и (i, j, k, ℓ) — какая-либо перестановка индексов $(1, 2, 3, 4)$. Тем самым предполагается, что интегрируемость по Эйлеру–Якоби исходных негамильтоновых уравнений движения (2.7) эквивалентна интегрируемости по Лиувиллю гамильтоновых уравнений движения с теми же интегралами движения.

Первое из этих уравнений означает, что функции $C_{1,2} = H_{i,j}$ являются функциями Казимира для бивектора P. Второе уравнение означает, что на соответствующих четырехмерных симплектических листах два оставшихся интеграла движения $H_{\ell,k}$ находятся в инволюции и определяют лагранжево слоение, которое можно отождествить с некоторой гамильтоновой системой уравнений. Выполнение третьего условия гарантирует выполнение тождества Якоби и остальных свойств скобок Пуассона.

В данной работе мы будем решать уравнения (2.9) в классе линейных по моментам M_i бивекторов Пуассона при различном выборе функций Казимира. Так как мы предполагаем, что бивекторы линейны по моментам, то соответствующие функции Казимира тоже предполагаются линейными, то есть мы имеем три варианта выбора функций Казимира и интегралов движения:

1. $C_1 = (\gamma, \gamma)$, $C_2 = (M, r)$, $H_\ell = H_1$, $H_k = H_2$;
2. $C_1 = (\gamma, \gamma)$, $C_2 = g(\gamma)\,\omega_3$, $H_\ell = H_1$, $H_k = H_3$;
3. $C_1 = (M, r)$, $C_2 = g(\gamma)\,\omega_3$, $H_\ell = H_1$, $H_k = H_4$.

В общем случае в качестве функций Казимира необходимо взять две линейные комбинации интегралов движения первых степеней

$$C_{1,2} = a_{1,2}(\gamma, \gamma) + b_{1,2}(M, r) + c_{1,2}g(\gamma)\,\omega_3, \quad a_{1,2}, b_{1,2}, c_{1,2} \in \mathbb{C}.$$

Однако полученные в общем случае результаты принципиально не отличаются от результатов, полученных при рассмотрении трех частных случаев, перечисленных выше.

Аналогичная система уравнений (2.9) для осесимметричного волчка Лагранжа, также обладающего двумя линейными по моментам интегралами движения, рассматривалась в [21], где показано, как решения подобных уравнений могут быть использованы для построения переменных разделения и цепочек Ленарда–Магри для бигамильтоновых динамических систем.

После того как решение P уравнений (2.9) найдено, мы можем попытаться построить разложение исходного векторного поля X по соответствующим векторным полям $P\,dH_\ell$ и $P\,dH_k$. Такое разложение существует, если $\operatorname{rank} P = 4$, то есть если эти гамильтоновы векторные поля образуют базис.

3. Первая скобка Пуассона

Подставляя линейный по моментам M_i анзац для элементов бивектора Пуассона

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ijk}(\gamma)M_k + b_{ij}(\gamma)$$

в уравнения (2.9) при

$$C_1 = H_4 = (\gamma, \gamma), \quad C_2 = H_3 = (M, r), \quad H_\ell = H_1, \quad H_k = H_2$$

и решая получившуюся систему алгебро-дифференциальных уравнений, мы получим следующее утверждение.

Предложение 1. *В рассматриваемом нами случае уравнения* (2.9) *в пространстве линейных по M бивекторов Пуассона имеют единственное решение, параметризуемое двумя функциями $\alpha(\gamma_1/\gamma_2)$ и $\beta(\gamma_3)$*

$$P = \alpha g \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}_\alpha \\ -\mathbf{\Gamma}_\alpha^\top & \mathbf{M}_\alpha \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}_\beta \\ -\mathbf{\Gamma}_\beta^\top & \mathbf{M}_\beta \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Матрицы $\Gamma_{\alpha,\beta}$ имеют вид

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1\gamma_2(R\gamma_3 + a)}{R(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} & \dfrac{\gamma_2^2(R\gamma_3 + a)}{R(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} & -\gamma_2 \\ -\dfrac{\gamma_1^2(R\gamma_3 + a)}{R(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} & -\dfrac{\gamma_1\gamma_2(R\gamma_3 + a)}{R(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_\beta = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & \dfrac{\gamma_1^2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & 0 \\ -\dfrac{\gamma_2^2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & \dfrac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & 0 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а кососимметричные матрицы $M_{\alpha,\beta}$

$$\mathbf{M}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)(R\gamma_3 + a)}{R(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} & -M_2 \\ * & 0 & M_1 \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & M_3 - \dfrac{\gamma_3(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - \dfrac{m\sigma R(R\gamma_3 + a)}{g^2} & \dfrac{m\sigma\gamma_2 R^2}{g^2} \\ * & 0 & -\dfrac{m\sigma\gamma_1 R^2}{g^2} \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

где $g \equiv g(\gamma)$ и

$$\sigma = mR\Big(m(r, \gamma)C_2 + I_3(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) + I_1 M_3 \gamma_3\Big).$$

Область определения этого решения уравнений (2.9) *зависит от конкретного выбора функций α и β.*

Соответствующие скобки Пуассона имеют вид

$$\begin{aligned} &\{M_1, \gamma_1\} = -\frac{\alpha g \gamma_1\gamma_2(R\gamma_3 + a)}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)R} + \frac{\beta\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, && \{M_1, \gamma_2\} = \frac{\alpha g \gamma_1^2(R\gamma_3 + a)}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)R} + \frac{\beta\gamma_2^2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \\ &\{M_1, \gamma_3\} = -\beta\gamma_2, && \{M_2, \gamma_3\} = \beta\gamma_1, \\ &\{M_2, \gamma_1\} = -\frac{\alpha g \gamma_2^2(R\gamma_3 + a)}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)R} - \frac{\beta\gamma_1^2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, && \{M_2, \gamma_2\} = \frac{\alpha g \gamma_1\gamma_2(R\gamma_3 + a)}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)R} - \frac{\beta\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \\ &\{M_3, \gamma_1\} = \alpha g \gamma_2, \quad \{M_3, \gamma_2\} = -\alpha g \gamma_1, && \{M_3, \gamma_3\} = 0, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

и

$$\{M_1, M_2\} = \frac{\alpha g(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)(R\gamma_3 + a)}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)R} + \beta\left(M_3 - \frac{\gamma_3(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - \frac{\sigma\,(R\gamma_3 + a)}{g^2}\right),$$
$$\{M_1, M_3\} = -\alpha g M_2 + \frac{\beta\sigma R}{g^2}\,\gamma_2, \quad \{M_2, M_3\} = \alpha g M_1 - \frac{\beta\sigma R}{g^2}\,\gamma_1.$$

При $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ эти скобки обладают дополнительными функциями Казимира γ_3 или γ_1/γ_2 соответственно. Частный случай этих скобок Пуассона был получен в работе [18].

С помощью данных скобок и интегралов движения мы можем построить два коммутирующих гамильтоновых векторных поля

$$X_1 = P\,dH_1 \quad \text{и} \quad X_2 = P\,dH_2$$

и попытаться отождествить исходное векторное поле X (2.7) с линейной комбинацией этих гамильтоновых векторных полей.

Предложение 2. *Используя скобки Пуассона* (3.2), *мы можем представить редуцированные уравнения движения* (2.7) *в виде*

$$\dot{x}_k = g_1\{x_k, H_1\} + g_2\{x_k, H_2\}, \quad k = 1, \ldots, 6, \tag{3.3}$$

если и только если

$$\alpha(\gamma_1/\gamma_2) = \text{const}, \quad \beta(\gamma_3) = \alpha g\left(1 + \frac{a}{R\gamma_3}\right). \tag{3.4}$$

В этом случае

$$g_1 = -\frac{(R\gamma_3 + a)I_1 - R\gamma_3 I_3}{2\alpha g(I_1 - I_3)(R\gamma_3 + a)}, \quad g_2 = \frac{a}{2\alpha g(I_1 - I_3)(R\gamma_3 + a)}.$$

Доказательство состоит в непосредственной проверке уравнений (3.3). Отметим, что при выполнении условий (3.4) скобки Пуассона (3.2) имеют сингулярность при $\gamma_3 = 0$ или при условии $g \equiv g(\gamma) = 0$.

Другие выделенные значения функций α и β описываются следующим предложением.

Предложение 3. *Бивектор Пуассона P* (3.1) *совместен*

$$[P_0, P] = 0$$

с каноническим бивектором Пуассона на алгебре $e^*(3)$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma} \\ -\mathbf{\Gamma}^\top & \mathbf{M} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 \\ -M_3 & 0 & M_1 \\ M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix},$$

при условии

$$\alpha(\gamma_1/\gamma_2) = \mathrm{const}, \quad \beta(\gamma_3) = \frac{\alpha g(I_1 R\gamma_3 - I_3(R\gamma_3 + a)}{R\big((I_1 - I_3)\gamma_3 + am(r,\gamma)\big)}, \tag{3.5}$$

то есть скобка Схоутена между ними равна нулю.

Условие совместности означает, что линейная комбинация этих бивекторов

$$P_\lambda = P_0 + \lambda P, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

также является бивектором Пуассона при любом значении параметра λ, то есть удовлетворяет тождеству Якоби. Это также означает, что в этом случае бивектор P (3.1) является тривиальной деформацией канонического бивектора (см. [23]). Интересно, что именно при выполнении этого условия совместности (деформируемости) редуцированные уравнения движения (2.7) представимы в виде

$$\dot{x}_k = \widehat{g}_1\{x_k, H_1\} + \widehat{g}_2\{x_k, \widehat{H}_2\}, \quad k = 1, \ldots, 6, \tag{3.6}$$

где $\widehat{H}_2$ — линейный интеграл Рауса (2.6), а функции

$$\widehat{g}_1 = -\frac{1}{2\beta}, \quad \widehat{g}_2 = \frac{a}{\alpha I_1\big(I_1 R\gamma_3 - I_3(R\gamma_3 + a)\big)}\left(M_3 - \frac{\gamma_3(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\right)$$

зависят уже не только от координат, но и от моментов.

Таким образом, с геометрической точки зрения поверхности уровня интегралов движения для системы Рауса могут быть отождествлены с лиувиллевыми торами гамильтоновой системы, обладающей теми же интегралами движения, при любом значении функций α и β, так как

$$\{H_1, H_2\} = \{H_1, \widehat{H}_2\} = 0, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Однако, с аналитической точки зрения, векторное поле для системы Рауса выражается через соответствующие гамильтоновы векторные поля

$$X = g_1 P\, dH_1 + g_2 P\, dH_2, \quad \text{или} \quad X = \widehat{g}_1 P\, dH_1 + \widehat{g}_2 P\, d\widehat{H}_2$$

только при выполнении условий (3.4) или (3.5), соответственно.

Предложение 4. *В общем случае уравнения движения* (2.7) *на шестимерном фазовом пространстве не могут быть представлены в конформно-гамильтоновом виде*

$$X = gP\, dF(H_1, H_2) \tag{3.7}$$

с помощью линейного по моментам бивектора Пуассона P, удовлетворяющего уравнениям (2.9)*. Здесь $F(H_1, H_2)$ — произвольная функция от интегралов движения H_1 и H_2.*

Для доказательства необходимо подставить линейный по моментам анзац для бивектора Пуассона в уравнения (2.9) и убедиться, что полученная система алгебро-дифференциальных уравнений является несовместной с уравнениями (3.7). Это достаточно просто сделать в любой из современных компьютерных систем символьных вычислений.

3.1. Свойства скобок Пуассона

Как и для сферы Чаплыгина [24] и для системы Веселовой [25], полученные скобки Пуассона можно привести к каноническим скобкам Ли–Пуассона на алгебре $e^*(3)$ и отождествить неголономную систему Рауса с гамильтоновой системой на сфере.

Более того, как и для систем Чаплыгина и Веселовой, таких преобразований несколько. Мы ограничимся рассмотрением одного из отображений Пуассона.

Предложение 5. *Преобразование моментов*

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\left(\frac{\gamma_1\gamma_3\left(R(\gamma_1 M_1+\gamma_2 M_2)-bI_1^{-1}(I_1+m(R\gamma_3+a)^2)\right)}{\alpha g(R\gamma_3+a)}+\frac{\gamma_2(\gamma_2 M_1-\gamma_1 M_2)}{\beta}+c\gamma_1\right),\\
L_2 &= \frac{1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\left(\frac{\gamma_2\gamma_3\left(R(\gamma_1 M_1+\gamma_2 M_2)-bI_1^{-1}(I_1+m(R\gamma_3+a)^2)\right)}{\alpha g(R\gamma_3+a)}-\frac{\gamma_1(\gamma_2 M_1-\gamma_1 M_2)}{\beta}+c\gamma_2\right),\\
L_3 &= \frac{M_3}{\alpha g}+\frac{bm(R\gamma_3+a)}{\alpha g I_1},\quad b=(M,r),\quad c=(L,\gamma),
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

переводит скобки Пуассона $\{.\,,.\}_{\alpha,\beta}$ *в каноническое скобки Ли–Пуассона на алгебре* $e^*(3)$

$$
\{L_i,L_j\}_0=\varepsilon_{ijk}L_k,\quad \{L_i,\gamma_j\}_0=\varepsilon_{ijk}\gamma_k,\quad \{\gamma_i,\gamma_j\}_0=0,
\tag{3.9}
$$

где ε_{ijk} *— полностью антисимметричный тензор.*

Данное пуассоново отображение (3.8) определено только локально, то есть когда

$$
\gamma_1^2+\gamma_2^2\equiv 1-\gamma_3^2\neq 0.
$$

Именно в этой области определения у векторного поля X (2.7), описывающего сферу Рауса в поле тяжести, нет гомоклинических орбит. Именно поэтому мы выбрали именно это пуассоново отображение среди множества других.

Если $c=(\gamma,L)=0$ и выполнено условие (3.4), то исходные интегралы движения являются неоднородными полиномами второго порядка по моментам

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\alpha^2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\left(\frac{g^2-I_1I_3}{mR^2}L_3^2+\frac{g^2(R\gamma_3+a)^2(L_1\gamma_2-L_2\gamma_1)^2}{R^2\gamma_3^2(I_1+mr^2)}\right)-\\
&\quad-\frac{2b\alpha g(R\gamma_3+a)L_3}{I_1R^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}+\frac{b^2(I_1+m(R\gamma_3+a)^2)}{I_1^2R^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)},\\
H_2 &= \frac{\alpha^2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\left(\frac{I_1I_3r^2}{R^2}L_3^2+\frac{g^2I_1(R\gamma_3+a)^2(L_1\gamma_2-L_2\gamma_1)^2}{R^2\gamma_3^2(I_1+mr^2)}\right)-\\
&\quad-\frac{2b\alpha g(R\gamma_3+a)L_3}{R^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}+\left(\frac{I_1+mr^2}{I_1R^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}+\frac{2m}{I_1}\right)b^2.
\end{aligned}
$$

Так как в этом случае существует линейный по скоростям интеграл (2.6)

$$
\widehat{H}_2=\alpha I_1L_3,
$$

соответствующие уравнения Гамильтона интегрируются достаточно просто. Для этого, например, можно перейти к сферическим координатам

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin\phi\sin\theta, & L_1 &= \frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}\,p_\phi - \cos\phi\,p_\theta,\\ \gamma_2 &= \cos\phi\sin\theta, & L_2 &= \frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}\,p_\phi + \sin\phi\,p_\theta,\\ \gamma_3 &= \cos\theta, & L_3 &= -p_\phi, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где ϕ, θ — углы Эйлера, а p_ϕ и p_θ — канонически сопряженные импульсы, так что

$$\{\phi, p_\phi\} = \{\theta, p_\theta\} = 1,$$

а остальные скобки Пуассона равны нулю. В этих переменных гамильтониан и линейный по скоростям интеграл движения имеют вид

$$H_1 = A(\theta)\,p_\phi^2 + B(\theta)\,p_\theta^2 + bC(\theta)\,p_\phi + b^2V(\theta), \quad \widehat{H}_2 = -\alpha I_1\,p_\phi, \tag{3.11}$$

где, как и ранее, b — значение интеграла Джеллетта, а A, B, C и V — функции от угла нутации θ:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \alpha^2\left(I_1 + \frac{I_3(a^2 + 2aR\cos\theta + R^2\cos^2\theta)}{R^2\sin^2\theta}\right), & B(\theta) &= \frac{\beta^2}{I_1 + m(a^2 + 2aR\cos\theta + R^2)},\\ C(\theta) &= \frac{2\alpha g(R\cos\theta + a)}{I_1R^2\sin^2\theta}, & V(\theta) &= \frac{I_1 + m(a^2 + 2aR\cos\theta + R^2)}{I_1^2R^2\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

Тем самым, как и для волчка Лагранжа, для сферы Рауса решение уравнений Гамильтона сводится к решению в квадратурах одного-единственного уравнения

$$\dot\theta = 2B(\theta)\,p_\theta = 2\sqrt{B(\theta)\big(E - A(\theta)c^2 - bcC(\theta) - b^2V(\theta)\big)},$$

где $E = H_1$ и $c = -\widehat{H}_2/\alpha I_1$ — значения интегралов движения.

Таким образом, мы можем достаточно легко найти траектории коммутирующих гамильтоновых векторных полей

$$X_1 = P\,dH_1, \quad X_2 = P\,dH_2 \quad \text{и} \quad \widehat{X}_2 = P\,d\widehat{H}_2.$$

Однако для того чтобы проинтегрировать исходные уравнения движения для сферы Рауса, нам затем надо найти траектории их линейных комбинаций

$$X = g_1X_1 + g_2X_2 \quad \text{или} \quad X = \widehat{g}_1X_1 + \widehat{g}_2\widehat{X}_2,$$

задаваемых соотношениями (3.3) и (3.3) соответственно. Решение этого вопроса выходит за рамки данной публикации.

3.2. Конформно-гамильтоново представление при нулевом значении интеграла Джеллетта

При нулевом значении интеграла Джеллетта $C_2 = (M, r) = 0$, то есть если $b = 0$, интегралы движения $H_{1,2}$ (3.10) становятся однородными квадратичными полиномами по импульсам. В этом случае можно легко построить переменные разделения $q_{1,2}$ для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби, приводя одновременно обе квадратичные по импульсам формы $H_{1,2}$ к диагональному виду. Если же мы знаем переменные разделения, то, как правило, мы можем переписать исходное векторное поле X (1.5) в конформно-гамильтоновой форме.

Действительно, рассмотрим двумерную гамильтонову систему с интегралами движения $H_{1,2}$, удовлетворяющими разделенным уравнениям вида

$$\Phi_i(q_i, p_i, H_1, H_2) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Здесь $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ — переменные разделения и сопряженные им импульсы. Согласно [20], интегралы движения $H_{1,2}$ находятся в инволюции

$$\{H_1, H_2\}_f = 0$$

относительно семейства скобок Пуассона, которые в терминах переменных разделения имеют вид

$$\{q_1, p_1\}_f = f_1(q_1, p_1), \quad \{q_2, p_2\}_f = f_2(q_2, p_2), \quad \{q_1, q_2\}_f = \{p_1, p_2\}_f = 0,$$

где $f_{1,2}$ — произвольные функции. Отвечающий этим скобкам Пуассона бивектор P_f и интегралы движения $H_{1,2}$ связаны соотношениями

$$P_f\, dH_i = F_{i1}\, PdH_1 + F_{i2}\, PdH_2, \quad i = 1, 2. \tag{3.12}$$

Функции F_{ij} зависят от выбора функций $f_{1,2}$ и образуют так называемую управляющую матрицу [20, 22].

Предложение 6. *Если векторное поле X (1.5) является линейной комбинацией коммутирующих гамильтоновых векторных полей $P\,dH_j$*

$$X = g_1 P\, dH_1 + g_2 P\, dH_2,$$

а функции $g_{1,2}$ пропорциональны линейным комбинациям элементов F_{ij} управляющей матрицы

$$g_i = g\Big(a_1 F_{i1} + a_2 F_{i2}\Big), \quad i = 1, 2,$$

то существует бивектор Пуассона P_f, относительно которого данное векторное поле X является конформно-гамильтоновым

$$X = g_1 P\, dH_1 + g_2 P\, dH_2 = g P_f\, dH, \quad H = a_1 H_1 + a_2 H_2.$$

В отличие от исходных интегралов движения $H_{1,2}$ интеграл H может не иметь явного физического смысла.

Для сферы Рауса при нулевом значении интеграла Джеллетта $C_2 = 0$ переменные разделения $q_{1,2}$ являются функциями только от координат γ_i, поэтому соответствующий бивектор P_f получается из линейного по импульсам бивектора P (3.1) при

$$\alpha = -R, \quad \beta = -\frac{g\,(r, \mathbf{I}r)}{(\gamma, \mathbf{I}r)}$$

так, что

$$X = g_1 P\, dH_1 + g_2 P\, dH_2 = -\frac{1}{2\beta}\, P_f\, dH_1.$$

В общем случае, при $C_2 \neq 0$, переменные разделения $q_{1,2}$ являются функциями не только от координат γ_i, но и от моментов M_i. В этом случае элементы искомого бивектора P_f будут не линейными, а более сложными функциями от моментов M_i.

4. Вторая и третья скобки Пуассона

Подставим теперь линейный по моментам M_i анзац для элементов бивектора Пуассона в уравнения (2.9) при

$$C_1 = H_4 = (\gamma, \gamma), \quad C_2 = \widehat{H}_2 = g(\gamma)\,\omega_3, \quad H_\ell = H_1, \quad H_k = H_3.$$

Предложение 7. *Общее решение первых двух уравнений системы* (2.9) *параметризуется тремя произвольными функциями* $\alpha_i(\gamma)$

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}' \\ -\mathbf{\Gamma}'^{\top} & \mathbf{M}' \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где

$$\mathbf{\Gamma}' = \begin{pmatrix} -\gamma_2(\alpha_1+\gamma_3\alpha_3) & -\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\gamma_1\alpha_3 & \dfrac{mR\gamma_2(\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2)(R\gamma_3+a)}{I_1+m(R\gamma_3+a)^2} \\ \gamma_1\alpha_1 & \gamma_1\alpha_2 & -\dfrac{mR\gamma_1(\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2)(R\gamma_3+a)}{I_1+m(R\gamma_3+a)^2} \\ \gamma_1\gamma_2\alpha_3 & -\gamma_1^2\alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$

а элементы кососимметрической матрицы $\mathbf{M}'$ *имеют вид*

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}'_{1,2} &= -\alpha_1 M_1 - \alpha_2 M_2 + \alpha_3(\gamma_1 M_3 - \gamma_3 M_1) - \\
&- \frac{\alpha_3\gamma_1 R(R\gamma_3+a)\Big(m^2(\gamma,r)H_3 + m\big(I_3(\gamma_1 M_1+\gamma_2 M_2)+I_1\gamma_3 M_3\big)\Big)}{g^2}, \\
\mathbf{M}'_{1,3} &= \frac{mR(R\gamma_3+a)(\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2)}{I_1+m(R\gamma_3+a)^2}\,M_2 + \\
&+ \frac{\alpha_3\gamma_1\gamma_2 R^2\Big(m^2(\gamma,r)H_3 + m\big(I_3(\gamma_1 M_1+\gamma_2 M_2)+I_1\gamma_3 M_3\big)\Big)}{g^2}, \\
\mathbf{M}'_{2,3} &= -\frac{mR(R\gamma_3+a)(\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2)}{I_1+m(R\gamma_3+a)^2}\,M_1 - \\
&- \frac{\alpha_3\gamma_1^2 R^2\Big(m^2(\gamma,r)H_3 + m\big(I_3(\gamma_1 M_1+\gamma_2 M_2)+I_1\gamma_3 M_3\big)\Big)}{g^2}.
\end{aligned}$$

Соответствующая третьему уравнению $[P', P'] = 0$ система дифференциальных уравнений в частных производных на функции $\alpha_i(\gamma)$ имеет несколько разных решений. Среди этих решений нас интересует только то, для которого $\operatorname{rank} P' = 4$ и, соответственно, для которого существует разложение исходного векторного поля по гамильтоновым. Выпишем это решение явно:

$$\alpha_1 = -\frac{I_1+m(R\gamma_3+a)^2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2^2 I_1 R\big(I_1+ma(R\gamma_3+a)\big)}{\gamma_1(\mathbf{I}\gamma, r)},$$

$$\alpha_2 \;=\; -\frac{\gamma_2 I_1 R\big(I_1 + ma(R\gamma_3 + a)\big)}{(\mathbf{I}\gamma, r)}, \tag{4.2}$$
$$\alpha_3 \;=\; \frac{I_1 + m(R\gamma_3 + a)^2}{\gamma_1\gamma_3} - \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) R I_1 \big(I_1 + ma(R\gamma_3 + a)\big)}{\gamma_1\gamma_3(\mathbf{I}\gamma, r)}.$$

Соответствующие коэффициенты в разложении

$$X = g_1' P' dH_1 + g_2' P' dH_3^2 \tag{4.3}$$

имеют вид

$$g_1' = -\frac{1}{2\gamma_1\alpha_3 I_1}, \quad g_2' = \frac{I_1(I_1 + ma(R\gamma_3 + a)) - mR(\gamma, \mathbf{I}r)}{2g^2 R I_1^2 (R\gamma_3 + a)}.$$

Как и ранее, нам не удалось найти линейного по моментам решения уравнений (2.9), таких, чтобы исходное векторное поле было представлено в конформно-гамильтоновом виде. Такое решение существует только в случае

$$C_2 = \widehat{H}_2 = g(\gamma)\,\omega_3 = 0.$$

Аналогично первой скобке Пуассона $\{.\,,.\}$ (3.2), вторая скобка $\{.\,,.\}'$ приводится к канонической скобке на алгебре $e^*(3)$ преобразованием типа (3.8). Для краткости мы не будем выписывать явно это преобразование.

Перейдем теперь к рассмотрению третьего варианта выбора функций Казимира и интегралов движения

$$C_1 = (M, r), \quad C_2 = g(\gamma)\,\omega_3, \quad H_\ell = H_1, \quad H_k = H_4.$$

В этом случае общее решение уравнений (2.9) совпадает с предыдущим решением P' (4.1)

$$P'' = P'\big|_{\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0}$$

при условии $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0$. Легко проверить, что $\mathrm{rank} P'' = 3$ и что третьей функцией Казимира будет интеграл H_4

$$P'' dC_3 = 0, \quad C_3 = H_4 \equiv (\gamma, \gamma).$$

Как следствие, мы не можем разложить исходное векторное поле по единственному гамильтоновому полю $P''\,dH_1$, которое естественно не образует необходимого нам базиса векторных полей.

Заметим, что этот математический факт полностью согласуется с кинематикой системы Рауса. Напомним, что по своему физическому определению вектор γ является единичным вектором и поэтому можно всегда положить $H_4 = (\gamma, \gamma) = 1$, так что функция H_4 не может быть динамическим интегралом, задающим эволюцию рассматриваемой динамической системы.

5. Заключение

Для динамических уравнений на шестимерном фазовом пространстве, отвечающих неголономной сфере Рауса после исключения неопределенных множителей Лагранжа, Раусом и Чаплыгиным были построены и интегралы движения, и инвариантная мера. Тем самым было доказано, что система является интегрируемой по теореме Эйлера – Якоби.

Нами построены скобки Пуассона, относительно которых данные интегралы движения находятся в инволюции, и изучены их свойства. Доказано, что соответствующее векторное поле является обобщенно-конформно гамильтоновым, а скобка Пуассона приводится к канонической там, где отсутствуют гомоклинические траектории. Более того, доказано, что при нулевом значении интеграла Джеллетта, когда известны переменные разделения для соответствующей гамильтоновой системы на сфере, исходное векторное поле является конформно-гамильтоновым.

Более того, для векторного поля X в задаче Рауса мы нашли два разложения по двум разным базисам коммутирующих гамильтоновых векторных полей (3.3) и (4.3)

$$X = g_1 PdH_1 + g_2 PdH_2 = g_1' P' dH_1 + g_2' P' dH_3^2.$$

Это можно рассматривать как некий аналог цепочки Ленарда – Магри

$$X = PdH_1 = f_1 P' dH_2 + f_2 P' dH_3$$

для двумерных бигамильтоновых ($f_1 = 1, \quad f_2 = 0$), квазибигамильтоновых ($f_2 = 0$) или биинтегрируемых ($\forall f_{1,2}$) систем гамильтоновой механики [20–22].

Заметим, что в книгах [6, 9] приведен ряд других интегрируемых по Эйлеру – Якоби систем с известными интегралами движения и инвариантной мерой, для которых аналогичные скобки Пуассона и представление векторного поля в виде линейной комбинации гамильтоновых векторных полей пока не найдено (см. так же [2]). Исследование подобных систем, на наш взгляд, будет интересно как для развития пуассоновой геометрии, так и для развития теории Морса и, может быть, даже для качественного исследования поведения данных механических систем.

Авторы благодарны А. В. Борисову, А. В. Болсинову и И. С. Мамаеву за постановку задачи, неподдельный интерес к работе, стимулирующие дискуссии и ценные комментарии.

Список литературы

[1] Abraham R., Marsden J. E. Foundations of mechanics. 2nd ed., Providence, R. I.: AMS, 1978. 826 pp.

[2] Борисов А. В., Цыгвинцев А. В. Показатели Ковалевской и интегрируемые системы классической динамики: 1, 2 // Regul. Chaotic Dyn., 1996, vol. 1, no. 1, pp. 15–37.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.

[4] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.

[5] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.

[6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2005. 576 с.

[7] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[8] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.

[9] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Избранные задачи неголономной механики: Препринт (см. http://ics.org.ru/doc?book=30&dir=r").

[10] Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: АН СССР, 1959. 386 с.

[11] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Исследования по динамике неголономных систем / С. А. Чаплыгин. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. С. 9–27.

[12] Cushman R. Routh's sphere // Rep. Math. Phys., 1998, vol. 42, nos. 1–2, pp. 47–70.

[13] Duistermaat J. J. On global action-angle variables // Comm. Pure Appl. Math., 1986, vol. 33, pp. 687–706.

[14] Джеллетт Дж. Трактат по теории трения. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2009. 264 с.

[15] Jost R. Poisson brackets: An unpedagogical lecture // Rev. Modern Phys., 1964, vol. 36, no. 2, pp. 572–579.

[16] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.

[17] Пуанкаре А. Идеи Герца в механике // Последние работы А. Пуанкаре / А. Пуанкаре. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. С. 52–56.

[18] Ramos A. Poisson structures for reduced non-holonomic systems // J. Phys. A, 2004, vol. 37, pp. 4821–4842.

[19] Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: В 2-х тт.: Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.

[20] Tsiganov A. V. On the two different bi-Hamiltonian structures for the Toda lattice // J. Phys. A, 2007, vol. 40, pp. 6395–6406.

[21] Tsiganov A. V. On maximally superintegrable systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 3, pp. 178–190.

[22] Tsiganov A. V. On bi-integrable natural Hamiltonian systems on Riemannian manifolds // J. Nonlinear Math. Phys., 2011, vol. 18, no. 2, pp. 245–268.

[23] Tsiganov A. V. Integrable Euler top and nonholonomic Chaplygin ball // J. Geom. Mech., 2011, vol. 3, no. 3, pp. 337–362.

[24] Цыганов А. В. О пуассоновых структурах, возникающих при рассмотрении шара Чаплыгина и его обобщений // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 345–353.

[25] Цыганов А. В. Об одном семействе конформно гамильтоновых систем // ТМФ, 2012 (принято в печать).

On the Routh sphere

Ivan A. Bizyaev[1], Andrey V. Tsiganov[2]

[1]Institute of Computer Science
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia
[2]Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia
[1]`bizaev_90@mail.ru`, [2]`andrey.tsiganov@gmail.com`

We discuss an embedding of the vector field associated with the nonholonomic Routh sphere in subgroup of the commuting Hamiltonian vector fields associated with this system. We prove that the corresponding Poisson brackets are reduced to canonical ones in the region without of homoclinic trajectories.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45
Keywords: nonholonomic mechanics, Routh sphere, Poisson brackets

Received July 28, 2012, accepted September 29, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 569–583 (Russian)