



КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

Памяти Пуанкаре

А. Шенсине

кладбище Монпарнас, 9 июля 2012 года

Дамы и господа, члены семьи Анри Пуанкаре, представители институтов и научных сообществ, математики, философы, физики, журналисты, случайные прохожие, любопытные, поэты... Этот человек все еще молод, ему 58 лет, его гений достиг полного расцвета; я вижу его, сидящего за своим рабочим столом: одна его рука покоится на краю стола, другая вытянута вдоль ноги, слегка согнутой в колене, взгляд обращен вовнутрь, за стекла его пенсне, волосы в легком беспорядке, брови приподняты. Он так близок к нам и так от нас далек... Именно к этому человеку обращаюсь я сегодня от вашего имени, — с тем уважением, которое внушает его величественная тень, и одновременно с непринужденностью, возникшей как результат длительного общения с его мыслью, сила и новизна которой до сего дня остаются безупречными.

Анри Пуанкаре, позволь мне обращаться к тебе на «ты»: в конце концов, ты все еще так молод; и разве мы с тобой не посещали одну и ту же школу, в которой было принято обращение «дорогой друг»? Произнести речь в память о тебе! Это означает рассказать о математике и физике XX века, а также о новых технологиях и о философии науки. Но здесь нет школьной доски, нет формул, нет даже чертежей, чтобы почтить память геометра. Так что я попытаюсь с помощью простых слов оживить те пейзажи, которые ты позволил нам открыть, те континенты, которые ты позволил нам исследовать.

Ты родился 29 апреля 1854 года в городе Нанси, в известной семье, принадлежавшей к лотарингской буржуазии. Твой отец, Леон Пуанкаре, был неврологом и преподавал на медицинском факультете; твой дядя, Антони Пуанкаре, выпускник Политехнической школы, был генеральным инспектором управления дорог и мостов; твоему кузену Раймону Пуанкаре суждено было стать президентом Республики в 1913–1920 годах; твоя жена Луиза Пулен д'Андеси, на который ты женишься в 1881 году, по линии матери происходит из семьи Этьена Жоффруа Сент-Илера...

Алан Шенсине

Alain.Chenciner@imcce.fr

Institut de Mecanique Celeste et de Calcul des Ephemerides (IMCCE)

77, avenue Denfert Rochereau, 75014 Paris

Departement de Mathematiques, Universite Paris VII

2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

В шестнадцать лет ты столкнулся с войной, с оккупацией, и это сильно повлияло на тебя. Спокойное величие твоей одаренности проявилось с отроческих лет. Поль Appel, учившийся вместе с тобой в подготовительном классе, позднее напишет, как озадачивала его уже в те времена точность твоих решений, когда, исследуя поставленную задачу, ты шел прямо к цели, будто ясновидящий, не обременяя себя промежуточными пояснениями. Ты решил поступать в Политехническую школу, и ты поступил в нее первым учеником.

Это было счастливое время для математиков Политехнической школы, совсем не такое, как сегодняшний день. Еще были живы традиции Монжа, Лагранжа, Пуассона, Фурье, Коши. Эрмит, чей разум был совершенно противоположен твоему, — этот антигеометр, смеившийся Бертрана на его посту, — оказал на тебя глубокое влияние своим курсом анализа, в котором много внимания уделялось дифференциальным уравнениям. Прославившийся, в частности, тем, что смог доказать трансцендентность числа e , Эрмит вдохновил тебя на изучение квадратичных и тернарных форм. Противоположность ваших натур превосходно описал Адамар:

«Когда сталкиваешься с открытием Эрмита, хочется сказать:

— Как удивительно, что человеческое существо смогло достигнуть такой экстраординарной манеры рассуждений!

А читая мемуар Пуанкаре, я бы сказал:

— Как могло случиться, что никто не додумался до таких глубоко естественных и логичных вещей намного раньше?»

К этому периоду относится твоя первая публикация. Забавным свидетельством твоего превращения в математика служит превосходная диаграмма, адресованная твоей матери: там ты с замечательной точностью описываешь эволюцию своего насморка.

Закончив Политехническую школу вторым, ты в октябре 1875 года поступаешь в Горный институт, и в 1878 году тебя назначают инженером в Везуль.

В 1879 году ты защищаешь диссертацию, озаглавленную «О свойствах функций, определяемых с помощью уравнений в частных производных».

Одна из лемм твоей диссертации положила начало теории *нормальных форм*, то есть поиску замен локальных координат с таким расчетом, чтобы сделать геометрию положения как можно более наглядной.

И если на комиссию, в состав которой входили Жан-Клод Буке, Пьер-Оссиан Бонне и Гастон Дарбу, большое впечатление произвели результаты, то критические замечания вызвала манера изложения, зачастую неточная и малопонятная. Это стало постоянной отличительной чертой твоих работ: твоя мысль была слишком быстрой, твои интересы — слишком разнообразными. Как только ты получал результат, у тебя уже не было времени повторно редактировать и шлифовать его. Тебя уже занимали другие задачи. Позднее об этом хорошо сказал Дарбу: «оказавшись на вершине, он никогда не возвращался на пройденный путь». Прекрасный пример этого можно найти в параграфе 341 главы XXIX тома 3 твоих «Новых методов небесной механики», опубликованных в 1899 году: «*До сих пор, говоря о том, что данный интеграл достигает минимума, я использовал краткий, но неправильный оборот речи, хотя он вряд ли мог бы ввести кого-то в заблуждение; я имел в виду, что первая вариация данного интеграла обращается в нуль; это необходимое условие достижения минимума, но не достаточное.*»

Геометрия, группа — это главные слова! Ты развиваешь теорию фуксовых функций, существенно обобщающих эллиптические функции, чтобы иметь возможность интегрировать линейные дифференциальные уравнения с алгебраическими коэффициентами в явном

виде. Но только открытие тесной связи с неевклидовой геометрией позволило тебе достичь поставленной цели. Фуксовы функции естественным образом привели тебя к теореме об униформизации. В 1882 году ты, как и Клейн, заявляешь о ее доказательстве; однако пришлось ждать 1907 года, чтобы наконец, одновременно с Кёбе, полностью доказать эту теорему, которая, увенчав работы Римана, господствовала в математике XIX столетия.

Год 1881-й, год твоей женитьбы, стал по-настоящему удивительным. Заменив локальное аналитическое исследование в поле комплексных чисел (то есть методы Брио и Буке) на глобальное качественное исследование в поле действительных чисел, ты переворачиваешь теорию дифференциальных уравнений и создаешь то, что сегодня принято называть *теорией динамических систем*. В ней, например, фигурирует твоя «теорема об индексе», утверждающая, что в векторном поле на сфере количество узлов и фокусов совпадает с количеством седлообразных точек плюс 2. Помнишь ли ты введение к своему мемуару «О кривых, определяемых с помощью дифференциального уравнения»? *«Возьмем, например, задачу трех тел: позвольте спросить, будет ли одно из тел всегда оставаться в определенной области неба или оно сможет удалиться на бесконечно большое расстояние; будет ли расстояние между двумя телами возрастать или убывать до бесконечности, или оно всегда будет заключено в каких-то известных пределах? Разве нельзя задать тысячу вопросов подобного рода? И мы сможем ответить на любой из них, научившись строить на качественном уровне траектории трех тел. А если рассмотреть большее количество тел, то разве вопрос о неизменности элементов планет не есть истинный вопрос качественной геометрии? Убедившись в том, что большая ось не имеет вековых изменений, мы тем самым покажем, что она все время колеблется в известных пределах. Вот обширное поле для исследований, которое открывается перед геометрами...»* Итак, вот тот момент, когда, в возрасте 27 лет, ты понимаешь, что, зная явное аналитическое решение дифференциального уравнения, мы можем получить не так уж много реальной информации о поведении системы, описываемой этим уравнением.

Но вскоре, уже сделав существенный вклад в арифметику (квадратичные формы, автоморфные формы) и в алгебраическую геометрию (абелевы функции), ты совершаешь первые вылазки в неисследованную область функций двух комплексных переменных (мероморфные функции, области голоморфности). И, как и в других случаях, твой вклад оказывается фундаментальным, ты открываешь новые неисследованные пространства.

Продолжим. Будь то дифференциальные уравнения, алгебраические функции двух переменных или конечные подгруппы групп Ли, тебе необходимо найти инструменты, позволяющие выполнять качественные исследования. И, как это делал Риман, ты создаешь их полностью заново. В 1895 году появляется текст, ставший основой алгебраической топологии, твой «Analysis situs» («Анализ положения»); в книге, содержащей около 100 страниц, ты вводишь понятия гомологии, чисел Бетти, фундаментальной группы, характеристики Эйлера–Пуанкаре, двойственности Пуанкаре (теория пересечения); это эволюция математики во всех направлениях, и она поразительна. Для начала ты не вполне правильно формулируешь свою знаменитую гипотезу, доказанную Перельманом столетие спустя и дающую нам гомотопическую характеристику трехмерной сферы среди всех трехмерных «дифференцируемых многообразий». Но вскоре ты приводишь замечательный контрпример сферы гомологии, у которой фундаментальная группа совпадает с группой додекаэдра.

В том же 1885 году ты публикуешь свой фундаментальный труд о фигурах равновесия жидкой массы, где изучаешь «бифуркации», связанные с изменением устойчивости: от эллипсоида вращения Маклорена до эллипсоида Якоби с тремя разными осями и до только что открытых тобой грушевидных фигур, которые, в свою очередь, могут распадаться

на две неравные массы. Джордж Дарвин, сын Чарльза Дарвина, собирался получить отсюда механизм образования Луны, но Ляпунов, а затем Жан и, наконец, Эли Картан докажут, что подобный сценарий неустойчив.

Настолько же важным оказалось твое открытие, совершенное два года спустя и связанное с *замечанием*. Оно снабжает нас законом распределения зарядов на сфере, обеспечивающим снаружи такой же потенциал, как и данное распределение внутри шара, что позволяет во многих случаях обосновать *принцип Дирихле* и, следовательно, решать граничные задачи для уравнения Лапласа, фундаментального при изучении ньютонова притяжения, а также электричества и магнетизма.

Теперь я перейду к одной из наиболее важных частей твоего наследия, во всяком случае, к наиболее значимой для меня: к твоей *Небесной механике* и, в частности, к *задаче трех тел*. Первая твоя статья по данной теме относится к 1883 году, а итогом исследований стал трехтомный труд «Новые методы небесной механики», вышедший в свет в 1892–1899 годах и содержащий в целом 1300 страниц. В этой выдающейся книге, про которую Пенлеве говорил, что, возможно, именно этот труд несет в себе наиболее глубокий отпечаток твоей индивидуальности, ты развиваешь идеи мемуара «О задаче трех тел и об уравнениях динамики», удостоенного в 1889 году премии короля Швеции и Норвегии Оскара II. Сколько новых понятий ведут свое происхождение именно отсюда: существование и устойчивость *периодических решений*, *асимптотических решений*, *характеристические показатели*, *интегральные инварианты*, *гомоклинные решения*, *отображение первого возвращения*. Здесь ты доказываешь существование и расходимость *рядов Линдштедта*, полностью осознавая возможность того, что некоторые ряды с фиксированными частотами сходятся, что и доказал Колмогоров в 1954 году; здесь ты представляешь *интегральные инварианты* как бесконечно малый аналог тех *первых интегралов*, для которых ты доказал, что мы не сможем найти другие интегралы помимо тех, которые классическим образом выводятся из симметрий задачи; здесь ты доказываешь свою знаменитую *теорему о рекуррентности*, виртуозно оперируя теми самыми непрерывными вероятностями, которые так пугали Жозефа Бертрана. Именно отсюда происходит то, что сегодня принято называть (не слишком удачно, на мой взгляд) *детерминистским хаосом*, — отсюда и из работ Адамара, посвященных геодезическим поверхностям с отрицательной кривизной, так игриво описанных Пьером Дюэмом, который рассматривает геодезические, намотанные вокруг двух рогов у быка. Однако задача трех тел, точнее, те ее частные случаи, которыми ты занимался прежде всего, например, случай малой планеты, возмущаемой Юпитером, связана с задачей о *геодезических* на поверхности, близкой к сфере, то есть имеющей положительную кривизну, и ты прекрасно понимал, что этот случай несоизмеримо сложнее, чем случай отрицательной кривизны, исследованный Адамаром.

В первоначальном мемуаре основным вопросом был вопрос об *устойчивости*. Тебе удалось решить эту задачу, вводя понятие *поверхности сечения*, определяемой с помощью возвращений к перигелию, и используя интегральные инварианты, чтобы свести ее к изучению итераций отображения, сохраняющего участок какой-то области на плоскости в ней самой. Нам известна история твоей ошибки, допущенной, вероятно, в результате слишком тонкого анализа, когда ты принял за нуль величину, про которую знал, что она была бы равна нулю для всех порядков в теории возмущений (сегодня мы говорим об *экспоненциально малом расщеплении сепаратрис*). Но мы также знаем, что вся современная теория консервативных динамических систем происходит от этой ошибки, оказавшейся в конечном итоге чрезвычайно плодотворной. В частности, эргодическая теория уточняет твою теоре-

му о рекуррентности, утверждающую, что почти при всех *начальных условиях* консервативная динамическая система, фазовое пространство которой занимает конечный объем, с течением времени вернется сколь угодно близко к своим начальным условиям, причем неоднократно. Именно это ты назвал *устойчивостью по Пуассону*, имея в виду отсутствие чисто вековых членов вплоть до второго порядка у больших полуосей планет, чтобы чем-то заменить утраченную устойчивость из мемуара.

Последняя опубликованная тобой статья касается периодических решений, этой «*единственной брешы, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в ту область, которая до сих пор считалась недостижимой*». В этой статье ты показываешь, насколько важна твоя теорема, позднее названная *последней геометрической теоремой*, доказанная два года спустя Биркгофом. Ее можно понимать как предшественницу *симплектической топологии*.

Сколько идей, которые мы могли бы считать современными, можно найти уже в этих трех томах! Очевидно, именно из-за тебя члены группы УЛИПО создали концепцию *плагиата по предвосхищению*.¹

Вместе с дифференциальными уравнениями, теорией потенциала, задачами трех тел мы попадаем в область математической физики, которой ты даешь следующую характеристику: «*Подводя итог, скажем, что цель математической физики состоит не только в том, чтобы обеспечить физику вычисление некоторых констант или интегрирование некоторых дифференциальных уравнений. Помимо прочего, именно она должна помочь нам понять скрытую гармонию вещей, заставляя увидеть их с другой стороны. Из всех разделов анализа наиболее возвышенными, наиболее, если можно так сказать, чистыми являются те, которые окажутся наиболее плодотворными в руках людей, умеющих ими пользоваться.*» («Значение науки», глава 5.)

В тех примерно 15 томах, из которых состоит издание твоих курсов лекций, прочитанных в Сорбонне, ты даешь нам обзор и, я бы сказал, переосмысливаешь всю совокупность современных тебе физических теорий: «*Термодинамика*», «*Электричество и оптика*», «*Аналитическая теория распространения тепла*», «*Математическая теория света*», «*Теория вероятностей*», «*Капиллярные явления*», «*Вихри*», «*Фигуры равновесия жидкой массы*», «*Лекции о космогонических гипотезах*»... Кроме того, ты преподаешь в Высшей школе телеграфистов; ты занимаешься популяризацией беспроводного телеграфа в небольшой элементарной книжке; ты публикуешь статью о принципах механики у Декарта и у Лейбница в качестве послесловия к «*Монадологии*» Лейбница; будучи президентом Бюро долгот, ты руководишь экспедицией по измерению меридиана города Кито; вместе с Реми Перрье и Полем Пенлеве ты принимаешь участие в редактировании прекрасной книги для детей, озаглавленной «*О чем говорят вещи.*» И как у тебя все это получается?

Было много споров о том, верно или нет, что ты изобрел *теорию относительности* раньше Эйнштейна. Сегодня мы согласны в том, что у тебя имелась вся ее математическая внешность, а так же ее концептуальные основания: невозможность обнаружить абсолютное движение, невозможность непосредственно по интуиции установить одновременность двух событий, произошедших в разных местах. Но у тебя имелась своеобразная тенденция к номинализму, и именно она помешала тебе сразу сделать решительный шаг, окончательно отбросив эфир. Но разве сам Эйнштейн не вернулся к абстрактной форме эфира? А *группа Пуанкаре* до сих пор жива!

¹УЛИПО (фр. OULIPO = OUvroir de LIttérature POtentielle, то есть «цех потенциальной литературы») — объединение французских писателей и математиков, основанное в 1960 году. — Прим. перев.

Не будем забывать и о философии. Я не знаю, можно ли и сегодня сказать, как это сделал Фредерик Массон, принимая тебя во Французскую академию наук на место Сюлли-Прюдома, что ты «посвятил в загадки высокой научной философии целую нацию». Правда, что продать за короткое время 16 000 экземпляров книги, посвященной философии науки, — это не рядовое достижение. Правда и то, что четыре твои книги: «Наука и гипотеза», «Наука и метод», «Значение науки», «Последние мысли» — до сих пор не потеряли своей концептуальной силы. Далекие от спонтанной философии ученого, они образуют стройную и согласованную философию науки. Хорошей иллюстрацией твоего *геометрического конвенционализма* служит следующий отрывок, посвященный понятию группы движений, перевод твоей статьи «On the foundations of geometry», вышедшей в 1898 году в журнале «The Monist»: *«Когда эксперимент показывает нам, что некоторый феномен совершенно не соответствует указанным законам, мы исключаем его из списка движений. Когда мы видим, что какое-то изменение подчиняется нашим законам лишь приблизительно, мы, в соответствии с искусственным соглашением, будем рассматривать это изменение как результирующую двух других изменений-компонент. Первая компонента понимается как движение, строго удовлетворяющее только что упомянутым мною законам, тогда как вторая компонента, будучи малой, понимается как качественное изменение. Таким образом, мы говорим, что естественные твердые тела способны не только существенно изменять свое положение, но также подвергаются малым деформациям и малому тепловому расширению.»*

В завершение ты пишешь:

«Точно так же, как категория пространства представлений, общая концепция группы представляет собой форму нашего понимания, а группа движений возникает как результат последовательности конвенциональных решений, приспособляющих, в рассчитанном равновесии, наш опыт к этой категории. Иначе говоря, интересующие нас законы не навязаны нам природой, наоборот, это мы налагаем их на природу. Но если мы и налагаем их на природу, то лишь потому, что она позволяет нам сделать это. Если бы она оказала нам слишком большое сопротивление, мы бы отыскивали в нашем арсенале другую форму, которая оказалась бы более приемлемой.»

Как говорит об этом Герхардт Хайнцман, строить математическую реальность — означает создавать, исходя из воображения ощущений; такое построение должно управляться опытом; опыта недостаточно, но он всего лишь дает нам возможность осознать определенные умозрительные категории, с которыми мы можем согласовать наш опыт, приняв какое-то решение (заключив соглашение).

Здесь недостает такого слова как *красота* или *гармония*, но ты не забываешь о них, ты, — написавший во введении к «Значению науки»:

«Однако то, что мы называем объективной реальностью, при окончательном анализе оказывается тем, что является общим для большинства мыслящих существ и могло бы стать общим для всех; эта общая часть, как мы увидим ее, не может быть ничем иным, кроме гармонии, выраженной посредством законов математики.»

Таким образом, именно эта гармония и есть единственная объективная реальность, единственная истина, которой мы могли бы достигнуть; и если я добавлю, что универсальная гармония мира служит источником всякой красоты, то мы поймем, какой ценностью мы должны наделить этот медленный и трудный прогресс, позволяющий нам постепенно все лучше и лучше узнавать ее.»

Анри Пуанкаре, что может быть лучшим приветствием для тебя, чем те слова, которые ты сам адресовал когда-то Альфану:

Ученый, достойный этого имени, и прежде всего геометр, перед лицом своего труда испытывает то же впечатление, что и художник; его радость столь же велика и имеет ту же природу. Если бы я не писал для публики, влюбленной в Науку, то я не посмел бы выражаться подобным образом; я опасался бы недоверия профанов. Но здесь я могу открыто высказать свою мысль. Мы работаем, но не столько ради того, чтобы получить те положительные результаты, к которым, как полагает толпа, мы единственно привязаны, сколь ради того, чтобы вновь пережить это эстетическое чувство и поделиться им с теми, кто способен его испытать.»

Eloge de Poincaré

Alain Chenciner

Institut de Mecanique Celeste et de Calcul des Ephemerides (IMCCE)

77, avenue Denfert Rochereau, 75014 Paris

Departement de Mathematiques, Universite Paris VII

2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

Alain.Chenciner@imcce.fr

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 645–651 (Russian)