



УДК: 531/534+681.3.06

MSC 2010: 00A71; 68U20; 70E18; 70E55; 74H15; 74M10; 74M15; 74M20

Компьютерная модель динамики прямозубого эвольвентного зацепления в редукторах

И. И. Косенко, И. К. Гусев

Описывается методика построения динамической модели редуктора с прямозубыми эвольвентными зацеплениями. Основное внимание уделяется технологии создания модели упругого контактирования цилиндрических тел. Для отслеживания контакта строится алгоритм слежения за контактом двух цилиндрических поверхностей с эвольвентной направляющей, сводящийся к плоской редукции для двух эвольвент. При этом, с учетом свойств эвольвенты и в силу рассмотренного ранее алгоритма слежения, оказалось, что общая нормаль к кривым контактирования (эвольвентам) должна совпасть с линией зацепления. Отсюда немедленно следует упрощенная методика отслеживания контакта, не требующая применения системы дифференциально-алгебраических уравнений общего случая. Эта методика сводится к применению относительно простых формул прямого вычисления. Одновременно в компьютерной модели зубчатые колеса и корпус редуктора остаются трехмерными телами.

В рассматриваемой здесь модели учитывается также возможность люфта в редукторе. Это означает, что при вращении колес возможна потеря контакта между зубьями. После некоторого интервала времени вращения колес без контакта появляется возможность формирования пятна контакта между зубьями обратного хода. Однако динамические причины могут вернуть процесс зацепления к прежнему режиму прямого хода. В модели реализованы все возможные сценарии переключения контактов прямого и обратного хода.

Получено 16 апреля 2012 года

После доработки 12 июня 2012 года

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00354-а, 12-01-00536-а, 12-08-00637-а.

Косенко Иван Иванович

kosenko@ccas.ru

Гусев Илья Константинович

diskus1@land.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

В реальных редукторах для обеспечения надежности зацепления используется перекрытие контактов по времени. Это свойство также реализовано в рассматриваемой динамической модели. Отдельный контакт зубьев, перемещаясь вдоль линии зацепления, не успевает дойти до точки «расщепления» зубьев, а новый контакт следующей по ходу вращения пары зубьев уже формируется и начинает свое движение вдоль линии зацепления вслед за предыдущим контактом.

Ключевые слова: прямозубое эвольвентное зацепление, контактная модель Джонсона, свойства зацепления, алгоритм отслеживания контакта, модель люфта, кратное зацепление, объектно-ориентированное моделирование

1. Введение

Компьютерное моделирование динамики редукторов различной конструкции является достаточно широко распространенной задачей в технике. Среди различных подходов к построению моделей можно выделить два крайних полюса. Во-первых, для построения достаточно подробных динамических моделей можно использовать метод конечных элементов. При этом будет получаться максимально детальная динамическая картина реализации зубчатых зацеплений того или иного типа. Ясно также, что для работы моделей, построенных на основе такого подхода, требуется весьма значительный вычислительный ресурс.

Во-вторых, на противоположном полюсе можно обнаружить упрощенные модели редукторов, позволяющие строить исключительно быстродействующие прототипы машин и агрегатов. Образцы подобных моделей мы можем найти, например, в стандартной библиотеке языка Modelica [1]. Кроме того, на языке Modelica имеются также примеры построения моделей редукторов с достаточно хорошо проработанным динамическим описанием свойств этих устройств и учетом, в частности, влияния сил трения на характер протекающих в зубчатых зацеплениях процессов [2].

Представляется интересным рассмотреть более детально модель процесса контактирования в зубчатых зацеплениях, с одной стороны, применяя различные модели податливого контакта, с другой стороны, оставаясь в рамках динамики систем твердых тел, что позволяет рассчитывать на относительно высокую вычислительную эффективность. Простейшей задачей в этом направлении можно считать моделирование прямозубого эвольвентного зацепления.

Представленная в [3] компромиссная модель может быть модернизирована так, чтобы учесть существенные свойства реального редуктора: люфт в зацеплении и кратность этого зацепления. Последнее свойство всегда обеспечивается в редукторах для предотвращения возможного заклинивания. Кроме того, оказалось, что в случае эвольвентного зацепления алгоритм отслеживания контакта может быть существенно упрощен и ускорен. Для определенности, как и ранее [3] для случая прямозубого зацепления, используем модель Джонсона [4] контактирования цилиндрических тел.

Используя развитые ранее методики [5, 6] компьютерного моделирования трехмерных движений твердых тел, рассмотрим плоскопараллельное движение тел цилиндрической формы (в нашем случае двух тел A и B) в плоскости, перпендикулярной образующей цилиндров, при помощи дополнительного тела C (рис. 1). Вспомогательная система координат связывается с этим телом так, что образующая будет все время параллельной оси $O_C z$, что выражается в виде геометрических условий $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}_C$ ($\alpha = A, B$), где \mathbf{k}_α ($\alpha = A, B, C$) — орты осей $O_\alpha z$ связанных с координатными системами тел. Чтобы обеспечить движение

тел в плоскости, параллельной плоскости O_Cxy , потребуем выполнения еще двух алгебраических условий на z -координаты центров масс тел A и B : $z_{O_A} = \text{const}$, $z_{O_B} = \text{const}$. Все координаты являются относительными по отношению к осям O_Cxyz .

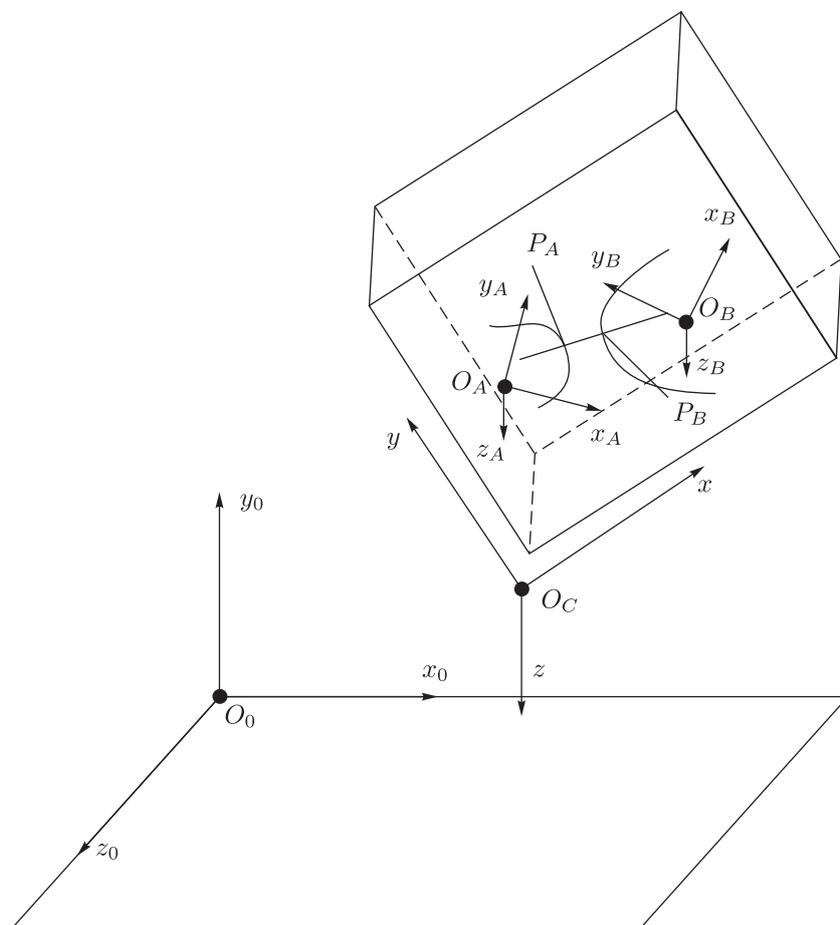


Рис. 1. Системы координат модели: (а) базовая $O_0x_0y_0z_0$, (б) корпуса редуктора O_Cxyz .

Перечисленные алгебраические уравнения легко реализуются в неявной форме, если для фиксации тел A и B относительно тела C использовать, например, модели шарнирных связей [5]. В этом случае само тело C может совершать произвольные трехмерные движения, рассматриваемые нами как переносные (относительно некоторой инерциальной системы отсчета). Так что вполне естественно называть тело C корпусом редуктора (если A и B — модели зубчатых колес). Также вполне естественно после произведенной редукции к плоскости O_Cxy строить аппарат механики контактирования цилиндрических тел при помощи средств двумерной геометрии [3].

2. Геометрические свойства прямозубого эвольвентного зацепления

Упростим и, соответственно, существенно ускорим работу ранее реализованного алгоритма отслеживания контакта двух эвольвентных поверхностей пары контактирующих

зубьев прямозубого зацепления. Как оказалось, данное упрощение, помимо ускорения работы модели, позволяет достаточно легко построить модель кратного зацепления с учетом возможности потери контакта.

Ранее было установлено [3], что в случае эвольвентного зацепления искомые в алгоритме отслеживания контакта точки P_A и P_B (рис. 1), лежащие на общем перпендикуляре к эвольвентам сечений зубчатых колес в окрестности контакта, одновременно расположены на линии зацепления $K_A K_B$ (рис. 2), совпадающей с упомянутым общим перпендикуляром. Таким образом, с геометрической точки зрения в каждый момент времени точка P_A лежит на пересечении эвольвенты зуба колеса A и прямой $K_A K_B$. Аналогичное утверждение имеет место для точки P_B : она лежит на пересечении эвольвенты зуба колеса B и той же линии зацепления $K_A K_B$.

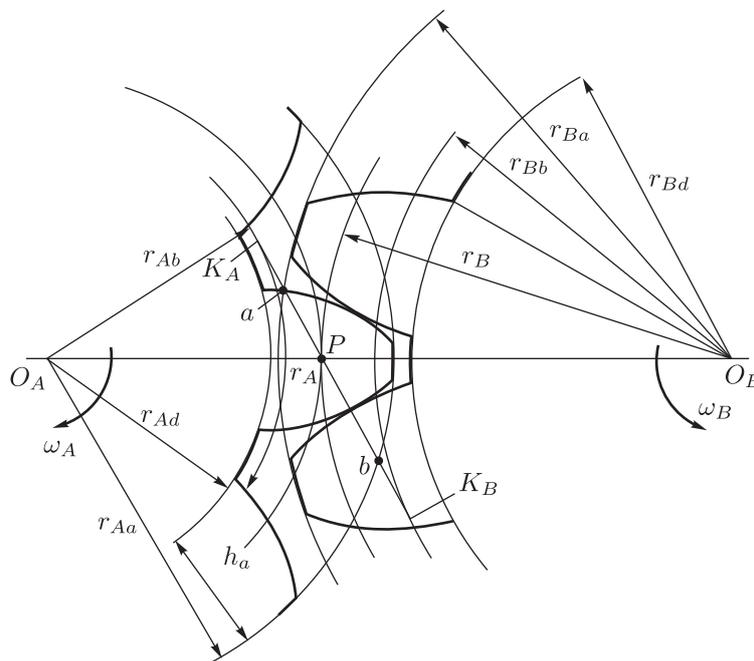


Рис. 2. Схема зацепления.

Так что в случае эвольвент вместо достаточно громоздкого алгоритма отслеживания контакта при помощи системы дифференциально-алгебраических уравнений достаточно вычислять координаты s_A и s_B точек P_A и P_B на прямой $K_A K_B$. Эти координаты можно рассчитывать при помощи чрезвычайно простой процедуры. Рассмотрим ее.

Пусть координаты s_A , s_B отсчитываются от точек K_A и K_B соответственно, где величины s_A и s_B полагаются равными нулю. Таким образом, при $s_A + s_B \geq L = |K_A K_B|$ имеет место контакт, а при $s_A + s_B < L$ контакт отсутствует. В первом случае глубина h взаимного проникания тел в контакте вычисляется по простой формуле $h = L - s_A - s_B \leq 0$.

При вычислении величины h рассматривается пара зубьев, находящихся в контакте. В случае прямого хода (колесо A поворачивается — для определенности — по часовой, а колесо B — против часовой стрелки) в качестве углов поворота φ_A , φ_B колес A и B используются углы, образованные осью $O_C x$ корпуса редуктора и лучами, исходящими из точек O_A , O_B и проходящими через точки «роста» соответствующих эвольвент на основных окружностях (рис. 2).

Если же колесо A (для определенности) поворачивается так, что угол φ_A выходит за пределы (вычисляемого ниже) сегмента $[\varphi_{A \min}, \varphi_{A \max}]$ его допустимых значений, то модель генерирует событие наступления условия $\varphi_A \notin [\varphi_{A \min}, \varphi_{A \max}]$. Тогда значения углов $\varphi_A = \varphi_A^+$, $\varphi_B = \varphi_B^-$ автоматически корректируются на величины (считается, что существует контакт прямого хода редуктора)

$$\begin{aligned} \varphi_A^+ &= \varphi_A^- + m\Delta\varphi_A, & \varphi_B^+ &= \varphi_B^- - m\Delta\varphi_B & \text{при } \varphi_A < \varphi_{A \min}, \\ \varphi_A^+ &= \varphi_A^- - m\Delta\varphi_A, & \varphi_B^+ &= \varphi_B^- + m\Delta\varphi_B & \text{при } \varphi_A > \varphi_{A \max}, \end{aligned}$$

где $\Delta\varphi_A$, $\Delta\varphi_B$ — угловая ширина одного зуба колеса A или B соответственно, m — кратность зацепления. Заметим, что на самом деле φ_A и φ_B не являются в точном смысле углами поворота тел A и B . Это углы поворота зубьев (относительно луча O_Cx), находящихся в данный момент в контакте в пределах зоны возможного контактирования, задаваемой условием $\varphi_A \in [\varphi_{A \min}, \varphi_{A \max}]$. Вышеприведенные формулы просто переключают контакт в следующем упрощенном смысле: используется простое приближенное правило — когда пятно контакта «мгновенно исчезает» за верхней или нижней границами допустимого отрезка $[\varphi_{A \min}, \varphi_{A \max}]$, оно немедленно должно появиться с другого конца этого же отрезка. При этом «ведущим» колесом, генерирующим события, для простоты считается колесо A .

Таким образом, текущий объект контакта в модели при выходе угла поворота за допустимые пределы «перепрыгивает» к следующей паре зубьев через соседние пары контактирующих к m -й паре, где m , как уже упоминалось выше, есть кратность зацепления. Заметим, что степень перекрытия — это (в общем случае вещественное) число, не меньшее единицы. В этом случае величину m следует считать наименьшим целым, не меньшим, чем степень перекрытия.

Граничные значения $\varphi_{A \min}$, $\varphi_{A \max}$ угла наклона эвольвенты в контакте текущей пары зубьев вычисляются из естественных ограничений, накладываемых на область контактирования. Минимальное значение $\varphi_{A \min}$ соответствует конечной точке b контактирования вдоль линии зацепления при прямом ходе (рис. 2). Из рисунка 2 нетрудно понять, что величина $\varphi_{A \min}$ может быть вычислена по формуле $\varphi_{A \min} = \alpha_w - (|K_A a| + |ab|) / r_{Ab}$, соответствующей выбору начала a и конца b контактирования. Здесь α_w — угол зацепления, r_{Ab} — радиус основной окружности колеса A .

Если угловое положение $\varphi_A = \varphi_{A \min}$ колеса A соответствует моменту конца контактирования, то, очевидно, угол $\varphi_A = \varphi_{A \max}$ должен соответствовать началу этого процесса для данной пары зубьев. Легко понять, что в этом случае следует положить $\varphi_{A \max} = \varphi_{A \min} + m\Delta\varphi_A$.

Формулы для расчета координат s_A , s_B точек P_A , P_B также установить нетрудно:

$$\begin{aligned} s_A &= \begin{cases} r_{Ab}(\alpha_w - \varphi_A) & \text{при } \varphi_A < \alpha_w, \\ 0 & \text{при } \varphi_A \geq \alpha_w, \end{cases} \\ s_B &= \begin{cases} r_{Bb}(\alpha_w + \pi - \varphi_B) & \text{при } \varphi_B < \pi + \alpha_w, \\ 0 & \text{при } \varphi_B \geq \pi + \alpha_w, \end{cases} \end{aligned}$$

где r_{Bb} — радиус основной окружности колеса B .

Для учета контактов соседних пар зубьев (в случае степени перекрытия, большей единицы) в модели редуктора следует обеспечить дополнительные объекты контакта колес A и B . Общее количество таких объектов для симуляции прямого хода редуктора должно быть равно m .

Далее ясно, что если в прямом ходе колес редуктора контакт зубьев теряется, то почти наверняка после этого может возникнуть контакт обратного хода между зубьями, отстоящими от пары зубьев потерянного контакта «через» впадину. Так что зубья контакта обратного хода являются соседними для зубьев прямого хода.

Для моделирования обратного хода нужно рассмотреть линию зацепления, полученную из линии рисунка 2 зеркальным отражением относительно оси, соединяющей точки O_A и O_B . Все рассмотренные для прямого хода геометрические свойства контактирования зеркально повторяются для случая обратного хода. В частности, координаты s_A и s_B в этом случае имеют выражения

$$s_A = \begin{cases} r_{Ab}(\alpha_w + \varphi_A) & \text{при } \varphi_A > -\alpha_w, \\ 0 & \text{при } \varphi_A \leq -\alpha_w, \end{cases}$$

$$s_B = \begin{cases} r_{Bb}(\alpha_w - \pi + \varphi_B) & \text{при } \varphi_B > \pi - \alpha_w, \\ 0 & \text{при } \varphi_B \leq \pi - \alpha_w. \end{cases}$$

Заметим здесь, что под прямым и обратным ходом мы понимаем не кинематическое свойство вращаться по часовой стрелке или против, а динамическое свойство «включения» в работу/контакт ведущих/ведомых поверхностей зубьев. Так что прямой ход будет наблюдаться либо при разгоне (ускоренном вращении) ведущего колеса A по часовой стрелке, либо при торможении, когда оно вращается против часовой стрелки. Аналогично, обратный ход в общем положении соответствует либо торможению колеса A при его вращении по часовой стрелке, либо его разгону, когда оно вращается против часовой стрелки. Упрощая формулировки, назовем прямым ходом вращение колес с расположением линии зацепления, показанной на рисунке 2, а обратным ходом — вращение, при котором линия зацепления имеет зеркальное (относительно прямой $O_A O_B$) к показанному на рисунке 2 расположение. Так же, как и в случае прямого хода, при вращении зубчатых колес с обратным ходом следует обеспечить корректное переключение пар контактирующих зубьев.

Переключение пар контактирующих зубьев обратного хода происходит, если область контактирования при перемещении вдоль линии зацепления $K'_A K'_B$ (рис. 3) покидает отрезок контактирования $a'b'$ либо через точку a' , либо через точку b' . При этом следует применить те же соотношения, что и ранее, заменив в них отрезок $[\varphi_{A \min}, \varphi_{A \max}]$ допустимых значений угла φ'_A на отрезок $[\varphi'_{A \min}, \varphi'_{A \max}]$ так, что $\varphi'_{A \min} = -\varphi_{A \max}$, $\varphi'_{A \max} = -\varphi_{A \min}$.

3. Модель учета кратности зацепления

В рассмотренной ранее упрощенной модели зацепления [3] его кратность предполагалась равной единице. Это означает, что в момент потери контакта в точке b одновременно возникает контакт в точке a . Хорошо известно, однако, что на практике такое устройство редуктора приводит к его низкой надежности (заклиниванию, обусловленному ошибками в изготовлении зубчатых колес). Поэтому для надежной работы редуктора предусматривается перекрытие отрезков контакта в парах зубьев: новый контакт в точке a возникает раньше, чем текущий контакт исчезнет в точке b .

Вернемся к примеру, рассмотренному в [3], где была построена виртуальная установка, состоящая из двух зубчатых колес: ведущего A и ведомого B . Для простоты предполагается, что корпус редуктора C является неподвижным телом. Начало O_C инерциальной системы координат O_Cxyz совпадает с центром колеса A , в котором находится цилиндрический шарнир, соединяющий тела A и C . Центр колеса B расположен на горизонтальной

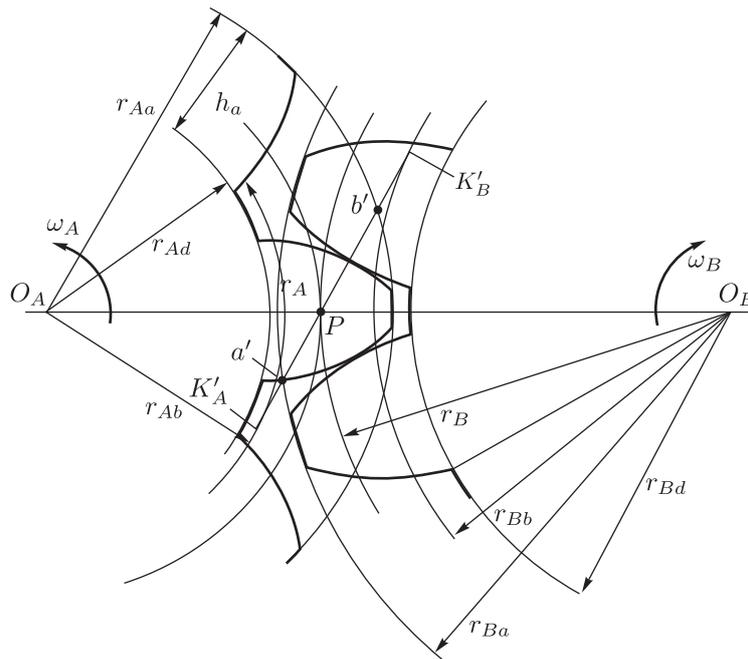


Рис. 3. Зацепление обратного хода.

оси O_Cx . В нем находится второй цилиндрический шарнир, соединяющий тело B и вспомогательный ползун S . Ползун S , в свою очередь, может свободно скользить относительно тела C вдоль оси O_Cx . Однако это скольжение сдерживается пружиной очень большой жесткости, соединяющей тела C и S . В данной экспериментальной установке для вспомогательной верификации была введена податливость между телами B и C , обеспечиваемая при помощи ползуна S . Эта податливость направлена вдоль линии O_AO_B , соединяющей центры колес и совпадающей с осью O_Cx . Такая конструкция предотвращает возникновение статической неопределенности в модели для случая твердотельного контакта по точке в зубчатом зацеплении колес A и B .

В модели зацепления задаются следующие независимые параметры:

- $z_A = 20$ — число зубьев ведущего колеса,
- $z_B = 30$ — число зубьев ведомого колеса,
- $r_A = 0.2$ м радиус начальной окружности ведущего колеса.

После этого остальные геометрические характеристики вычисляются в следующем виде:

- $n = z_B/z_A$ — передаточное число,
- $r_B = nr_A$ — радиус начальной окружности ведомого колеса,
- $\Delta\gamma_A = 2\pi/z_A$, $\Delta\gamma_B = 2\pi/z_B$ — шаговые углы ведущего и ведомого зубчатых колес.

Для дальнейшего определения зацепления важное значение имеет задание величины угла зацепления. Она может быть выбрана при удовлетворении условия $\alpha_w > \alpha_{w\text{inf}}$, где $\alpha_{w\text{inf}} = \inf \alpha_w$ — нижняя грань всех возможных углов зацепления, допускаемых фиксированными значениями вышеперечисленных параметров. Последнее условие есть следствие естественного ограничения $|\overrightarrow{K_A K_B}| > |\overrightarrow{ab}|$. Величина упомянутой грани определяется по



формуле

$$\alpha_{w \text{ inf}} = \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{z_A(1+n)}.$$

Для определенности будем использовать величину

$$\alpha_w = 2.8\alpha_{w \text{ inf}}.$$

Далее при помощи значения угла зацепления и величины передаточного числа рассчитываются все необходимые геометрические характеристики, показанные на рисунке 2. Сначала могут быть найдены радиусы основных окружностей в виде

$$r_{\alpha b} = r_{\alpha} \cos \alpha_w \quad (\alpha = A, B).$$

Затем можно вычислить полную длину линии зацепления

$$|\overrightarrow{K_A K_B}| = r_A(1+n) \sin \alpha_w.$$

С другой стороны, длина любого отрезка контактирования $[a, b] \subset (K_A K_B)$ вдоль этой линии является в точности длиной дуги основной окружности, соответствующей шаговому углу $\Delta\gamma_A$ (либо $\Delta\gamma_B$) любого из колес редуктора, так что имеем

$$|\overrightarrow{ab}| = r_{\alpha b} \Delta\gamma_{\alpha} \quad (\alpha = A, B).$$

Расстояние между центрами колес легко вычисляется в виде $d = r_A + r_B$. Для вычисления начальных условий в модели необходимо выполнить дополнительные расчеты. Для определенности будем считать, что система координат $O_C x_C y_C z_C$ имеет свое начало в точке O_A центра ведущего колеса A : $O_C = O_A$. Начальные абсолютные координаты этих точек совпадают

$$\mathbf{r}_{O_C} = \mathbf{r}_{O_A} = (0, 0, 0)^T,$$

и начальное положение центра ведомого колеса определяется равенством

$$\mathbf{r}_{O_B} = (d, 0, 0)^T.$$

Начальные положения точек K_A и K_B вычисляются по легко выводимым векторным формулам (рис. 2)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{K_A} &= \mathbf{r}_{O_A} + r_{Ab} (\cos \alpha_w, \sin \alpha_w, 0)^T, \\ \mathbf{r}_{K_B} &= \mathbf{r}_{O_B} - r_{Bb} (\cos \alpha_w, \sin \alpha_w, 0)^T, \end{aligned}$$

после чего вектор направления линии зацепления может быть получен в виде $\overrightarrow{K_A K_B} = \mathbf{r}_{K_B} - \mathbf{r}_{K_A}$. Теперь положение точки a начала контакта можно задать в виде

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{K_A} + \frac{1}{2} \left(|\overrightarrow{K_A K_B}| - |\overrightarrow{ab}| \right) \frac{\overrightarrow{K_A K_B}}{|\overrightarrow{K_A K_B}|},$$

а начальное положение точки b конца контактирования — в виде

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_a + \frac{|\overrightarrow{ab}|}{|\overrightarrow{K_A K_B}|} \overrightarrow{K_A K_B}.$$

Учтем, что расстояние от точки a до O_B в точности равно радиусу окружности вершин r_{Ba} колеса B , а расстояние от точки b (в ее начальном положении) до O_A — радиусу окружности вершин r_{Aa} колеса A :

$$r_{Aa} = |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_{O_A}|, \quad r_{Ba} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{O_B}|.$$

Для обеспечения перекрытия в зацеплении при заполнении зубьями двух колес с $z_A = 20$ и $z_B = 30$ рассмотрим случай $z_A = 22$ и $z_B = 33$, обеспечивающий такое же передаточное число $n = 3/2$. При этом реальные угловые ширины $\Delta\varphi_A = \pi/11$ и $\Delta\varphi_B = 2\pi/33$ зубьев будут меньше их номинальных ширины: $\Delta\gamma_A = \pi/10$ и $\Delta\gamma_B = 2\pi/30$.

4. Архитектура визуальной модели

Одновременное существование в полученной модели двух контактов, как в прямом, так и в обратном ходе, требует использовать в компьютерной модели зацепления сразу четыре объекта контакта (два для прямого хода плюс два для обратного). Визуальная модель примера испытательного стенда представлена на рисунке 4. Здесь **Contactf1** и **Contactf2** — объекты контакта прямого хода, а **Contactb1** и **Contactb2** — обратного хода. Таким образом, объекты моделей ведущего (левого) и ведомого (правого) зубчатых колес (объекты **LeftWheel** и **RightWheel** соответственно) имеют каждый по 4 входных порта для информации о силовых винтах, возникающих в областях пятен упругого контакта.

Каждый из упомянутых объектов виртуально работает независимо. Согласованность их «включения» и «выключения» достигается при помощи корректного выбора начальных данных для переменных состояния внутри объектов контакта. В рассматриваемом примере эти начальные данные заданы следующим образом.

Угловые скорости колес в начальный момент предполагаются нулевыми. Для определенности будем также считать, что ось O_Ax_A тела A проходит через корневую точку эвольвенты, лежащую на основной окружности тела. Эта эвольвента в точности задает поверхность зуба, находящуюся в начальный момент в контакте в точке a . Аналогично проходит ось O_Bx_B колеса B — через корневую точку начальной контактной эвольвенты этого колеса.

В начальный момент времени одна пара зубьев колес A и B имеет контакт (с нулевой величиной продавливания) в точке a (рис. 2). Этот контакт для определенности имеет прямой ход редуктора. Из рисунка 2 нетрудно заключить, что в этом положении зубьев для углов наклона φ_A , φ_B радиус-векторов точек начала (лежащих на основных окружностях колес) эвольвент справедливы соотношения

$$\varphi_{A0}^{f1} = \arctg 2(a_y, a_x) - \theta_A, \quad \varphi_{B0}^{f1} = \arctg 2(a_y - y_{C_B}, a_x - x_{C_B}) - \theta_B, \quad (4.1)$$

где θ_A , θ_B — полярные углы точки a на эвольвентах зубьев, вычисляемые в виде

$$\theta_A = \frac{\sqrt{|\mathbf{a}|^2 - r_{Ab}^2}}{r_{Ab}} - \arccos\left(\frac{r_{Ab}}{|\mathbf{a}|}\right),$$

$$\theta_B = \frac{\sqrt{|\mathbf{a} - \mathbf{r}_{C_B}|^2 - r_{Bb}^2}}{r_{Bb}} - \arccos\left(\frac{r_{Bb}}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}_{C_B}|}\right).$$

Таким образом, начальные значения углов поворота колес в объекте **Contactf1** определяются при помощи формул (4.1). Далее, коль скоро предполагается наличие перекрытия

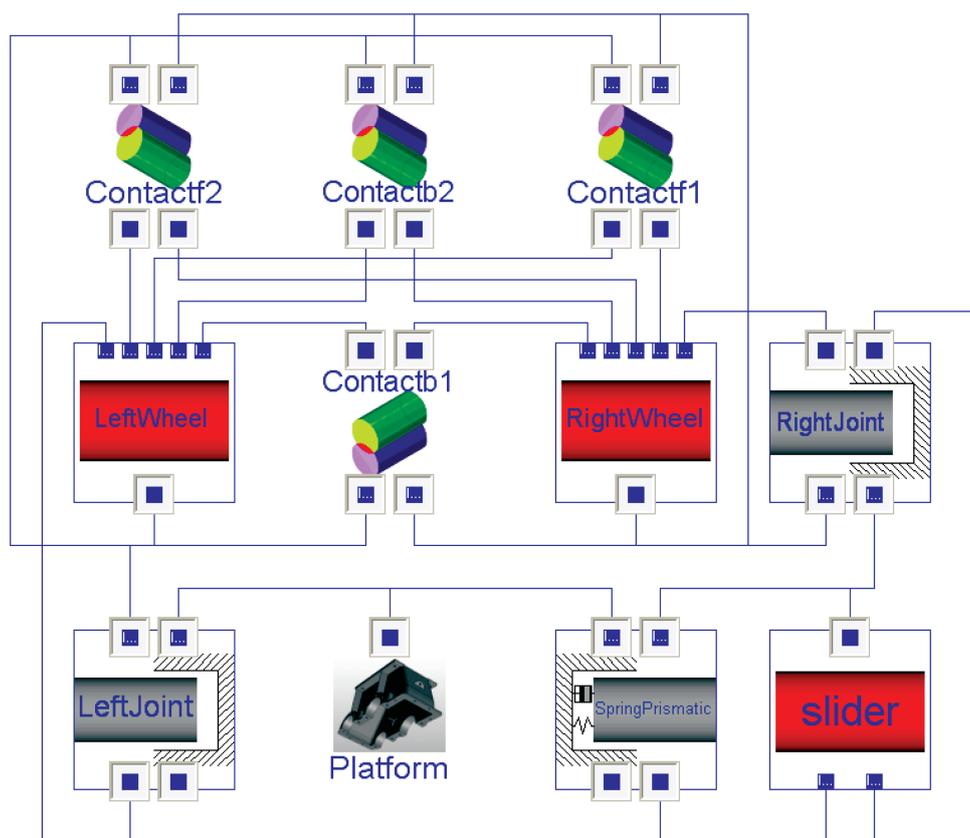


Рис. 4. Визуальная модель зацепления.

контактов, то если одна пара зубьев начинает контактировать в точке a , то другая пара, опережающая первую, будет иметь контакт где-то на отрезке $[a, b]$. Данный контакт будет задаваться в объекте **Contactf2**. Начальные значения рабочих углов φ_A , φ_B , задающих угол поворота эвольвенты прямого или обратного хода в указанных выше пределах $[\varphi_{A \min}, \varphi_{A \max}]$, $[\varphi_{B \min}, \varphi_{B \max}]$, в этом контакте должны отстоять от соответствующих значений в объекте **Contactf1** точно на величину углового шага, соответствующего ширине зуба, а значит, должны быть справедливы формулы

$$\varphi_{A_0}^{f_2} = \varphi_{A_0}^{f_1} - \Delta\varphi_A, \quad \varphi_{B_0}^{f_2} = \varphi_{B_0}^{f_1} + \Delta\varphi_B.$$

Выбор начальных данных для объектов **Contactb1**, **Contactb2**, обслуживающих обратный ход, не столь очевиден. В самом деле, эвольвентные поверхности пары зубьев контакта, отслеживаемого объектом **Contactb1**, будут находиться на тех же зубьях, что и поверхности, отслеживаемые объектом **Contactf2**, только на другой стороне соответствующего зуба (рис. 2). Таким образом, с геометрической точки зрения контакт обратного хода, отслеживаемый объектом **Contactb1** на начальной фазе движения, будет находиться между контактами прямого хода, отслеживаемыми объектами **Contactf1** и **Contactf2**.

Но на одном зубе радиус-векторы корневых точек (эти точки лежат на основной окружности) эвольвент его двух сторон повернуты друг относительно друга в точности на угловую ширину отдельного зуба — без учета угловой ширины впадины. Заметим, что угловые ширины следует отсчитывать дугами на основной окружности. Обозначим эти угловые ширины

зубьев символами $t_{A\text{wid}}, t_{B\text{wid}}$. Тогда начальные данные в объекте **Contactb1** вычисляются по формулам

$$\varphi_{A0}^{b1} = \varphi_{A0}^{f2} + t_{A\text{wid}}, \quad \varphi_{B0}^{b1} = \varphi_{B0}^{f1} + t_{B\text{wid}}.$$

Отметим здесь, что хотя в начальный момент вычислительного эксперимента объекты **Contactb1**, **Contactb2** и отслеживают (вычисляют) точки P_A, P_B в каждом из них, но, в силу физического отсутствия контактов обратного хода, генерируют нулевые контактные усилия (силовые винты — моторы).

Объект **Contactb2** второго контакта обратного хода имеет следующие начальные данные для углов эвольвент (точнее, углов наклона радиус-векторов их корневых точек для случая $m = 2$):

$$\varphi_{A0}^{b2} = \begin{cases} \varphi_{A0}^{f1} - 2\Delta\varphi_A + t_{A\text{wid}} & \text{при } \varphi_{A0}^{f1} - 2\Delta\varphi_A + t_{A\text{wid}} > \varphi_{A\text{min}}, \\ \varphi_{A0}^{f1} + t_{A\text{wid}} & \text{при } \varphi_{A0}^{f1} - 2\Delta\varphi_A + t_{A\text{wid}} \leq \varphi_{A\text{min}}, \end{cases}$$

$$\varphi_{B0}^{b2} = \begin{cases} \varphi_{B0}^{f1} + \Delta\varphi_B + t_{B\text{wid}} & \text{при } \varphi_{A0}^{f1} - 2\Delta\varphi_A + t_{A\text{wid}} > \varphi_{A\text{min}}, \\ \varphi_{B0}^{f1} - \Delta\varphi_B + t_{B\text{wid}} & \text{при } \varphi_{A0}^{f1} - 2\Delta\varphi_A + t_{A\text{wid}} \leq \varphi_{A\text{min}}. \end{cases}$$

В этих последних формулах учитывается тот факт, что при кратном зацеплении для случая обратного хода (при наличии люфта) имеется также несколько возможностей (в нашем примере — две) реализации контакта вдоль линии $K'_A K'_B$ (рис. 3).

Обеспечив указанный выше выбор начальных условий зацепления в объектах потенциальных контактов, мы обеспечим корректное переключение режимов контактирования в самих объектах и корректное отслеживание переключения контакта эвольвент в процессе вращения зубчатых колес. Построенная модель зацепления (с учетом возможности люфта — ослабления контакта между зубьями) позволяет симулировать любые типы движений в редукторе с любыми возможными вариантами контактирования между зубьями. Эта модель позволяет эффективно строить виртуальные прототипы редукторов с прямозубыми эвольвентными зацеплениями любой сложности.

Вернемся к визуальной модели редуктора, показанной на рисунке 4. Она построена с использованием ранее предложенных технологий конструирования физически ориентированных моделей [5]. Каждому физически реализуемому контакту модели соответствует один объект визуальной модели (рис. 4). Между тем, с функциональной точки зрения нет никакой разницы, как именно распределяются контакты конкретного типа (прямого хода №№ 1, 2 или обратного хода №№ 1, 2) на множестве из четырех однотипных объектов, так что код одного и того же класса может исполнять «роль» контакта любого типа в модели прямозубого эвольвентного зацепления. В силу указанных обстоятельств вполне оправданно в визуальной модели все контактные объекты поместить в массив («штабель») из четырех объектов контакта, который должен иметь также массив из четырех коннекторов, предназначенных для передачи данных о силовых винтах, передаваемых из объектов контакта в объекты тел (колеса **LeftWheel**, **RightWheel** — на рис. 4). Тогда в объектах **LeftWheel** и **RightWheel** соответствующие силовые порты будут на самом деле массивами портов.

Фундаментальным свойством контактного класса, используемым в описываемой здесь модели, являются углы φ_A, φ_B относительного поворота колес. Эти углы во все время симуляции остаются ограниченными: $\varphi_\alpha \in [\varphi_{\alpha\text{min}}, \varphi_{\alpha\text{max}}]$ ($\alpha = A, B$). При этом производные $\dot{\varphi}_\alpha(t), \dot{\psi}_\alpha(t)$ совпадают почти всюду по $t \in [t_0, t_1]$, где t_0 — момент начала процесса моделирования, t_1 — момент конца этого процесса. Здесь величины ψ_α ($\alpha = A, B$) предполагаются углами поворота колес редуктора относительно его корпуса. Переменные ψ_α ($\alpha = A, B$)

задаются динамическими уравнениями задачи. В общем случае, при работе редуктора, углы $\psi_\alpha(t)$ могут неограниченно расти или убывать, тогда как углы $\varphi_\alpha(t)$ всегда остаются ограниченными.

Такое свойство обеспечивается при помощи аппарата управления событиями. В обычном режиме, когда $\varphi_\alpha(t) \in [\varphi_{\alpha \min}, \varphi_{\alpha \max}]$, мы полагаем, что величина $\varphi_\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = \frac{d\psi_\alpha}{dt} \quad (\alpha = A, B). \quad (4.2)$$

При этом производная $\dot{\psi}_\alpha(t)$ предполагается выраженной через переменные состояния задачи. При наступлении события $\varphi_\alpha(t) < \varphi_{\alpha \min}$ или события $\varphi_\alpha(t) > \varphi_{\alpha \max}$ в соответствующем дифференциальном уравнении системы (4.2) немедленно корректируется начальное условие для задачи Коши (в момент $t = t_*$ наступления упомянутого события) по формуле

$$\varphi_\alpha(t_*) = \begin{cases} \varphi_{\alpha \max} & \text{при } \varphi_\alpha(t_*-) = \varphi_{\alpha \min} \text{ и } \dot{\varphi}_\alpha(t_*-) < 0, \\ \varphi_{\alpha \min} & \text{при } \varphi_\alpha(t_*-) = \varphi_{\alpha \max} \text{ и } \dot{\varphi}_\alpha(t_*-) > 0. \end{cases}$$

Данный событийный механизм обеспечивает корректное управление моделью симулирования физического переключения зубьев в контактах во время работы модели редуктора.

5. Реализация модели контактной силы

Геометрические свойства модели контактирования эвольвент реализованы в виде класса-параметра базового шаблона, описанного в [7]. Для реализации модели силового контактного взаимодействия между зубьями колес прямозубого зацепления используем тот же класс-шаблон, применявшийся раньше [7] для реализации геометрии зацепления. Здесь основное внимание уделяется технике вычисления нормальной упругой силы, возникающей при взаимном проникании внешних цилиндрических поверхностей (образующих эвольвент).

Согласно [8], одной из наиболее корректных моделей нормальной силы упругого взаимодействия между цилиндрами считается модель Джонсона [4], причем в [8] эта модель играет роль эталонной. Рассмотрим алгоритм вычисления силы в соответствии с этой моделью.

Уравнение, связывающее глубину h взаимного проникания цилиндров (предполагаемых, как и в задаче Герца, геометрически твердыми) с величиной нормальной силы N , приходящейся на единицу длины контактирующих цилиндров, имеет вид

$$h = \frac{N}{\pi E^*} \left[\ln \frac{4\pi E^* (\rho_A + \rho_B)}{N} - 1 \right]. \quad (5.1)$$

Данное уравнение выписано для случая так называемого внешнего контакта, когда в области контакта обе поверхности контактирующих тел выпуклы в направлении друг друга. В данном контексте случай внутреннего контакта не рассматривается. Присутствующая в уравнении (5.1) величина E^* является приведенным модулем упругости контакта и вычисляется из уравнения

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_A^2}{E_A} + \frac{1 - \nu_B^2}{E_B},$$

где E_A , E_B — модули упругости Юнга контактирующих тел, ν_A , ν_B — соответствующие коэффициенты Пуассона. Величины ρ_A , ρ_B являются радиусами кривизны эвольвент тел A и B , вычисленных в текущих точках отслеживания контакта P_A , P_B соответственно.

Заметим, что формула (5.1) строилась для случая плоского контакта двух круговых цилиндров. В рамках предположения модели Герца об относительной малости области контакта по сравнению с размерами контактирующих тел, приближенно, с точностью до членов порядка выше второго в разложениях уравнений поверхностей по координатам отклонений от точек P_A, P_B , эвольвентные цилиндрические поверхности заменяются «мгновенными» круговыми цилиндрами с радиусами ρ_A, ρ_B , равными текущим радиусам кривизны эвольвент.

Уравнение (5.1) задает величину удельной силы нормального давления N в виде неявной функции от h . В динамической модели редуктора формула (5.1) напрямую непригодна для непосредственного применения в секции поведения. Ситуация усложняется еще и тем, что, как станет видно в последующем динамическом анализе, неявная функция $N(h)$ определена уравнением (5.1) неоднозначно. В текущем положении контактирующих тел величины h, E^* (параметр, характеризующий материал тел), ρ_A, ρ_B следует считать заданными и искать величину N .

Удобнее всего уравнение (5.1) преобразовать к безразмерному виду уравнения, задающего неявную функцию $y(x)$:

$$y \cdot \ln y = -x, \quad (5.2)$$

где

$$x = \frac{e}{4(\rho_A + \rho_B)} h, \quad y = \frac{e}{4\pi E^* (\rho_A + \rho_B)} N.$$

Уравнение (5.2) допускает решение $x = 0, y = 0$, соответствующее случаю начала контактирования, когда прямоугольная контактная площадка общего положения вырождается в линейный отрезок вдоль образующей цилиндрических поверхностей. Область монотонности функции левой части (5.2) — отрезок $[0, e^{-1}]$, причем эта функция монотонно убывает от нуля до $-e^{-1}$. Тогда область применимости модели Джонсона можно оценить неравенствами

$$h \leq \frac{4(\rho_A + \rho_B)}{e^2}, \quad N \leq \frac{4\pi E^* (\rho_A + \rho_B)}{e^2}. \quad (5.3)$$

Из рисунка 2 и из свойств эвольвенты (центры кривизны контактирующих эвольвент лежат в точках K_A, K_B) следует, что $\rho_A + \rho_B = |K_A K_B|$ с точностью до малой ошибки h . Поэтому величина h должна быть не более половины от величины $|K_A K_B|$, что всегда гарантировано при достаточно больших жесткостях. На самом деле в этом случае должно быть выполнено условие $h \ll |K_A K_B|$.

В силу вышесказанного, при достаточно большом значении модуля упругости материалов тел модель Джонсона реализуется с гарантией на отрезке $y \in [0, e^{-1}]$ монотонности функции левой части уравнения (5.2). Поскольку в точке $y = e^{-1}$ производная левой части (5.2) равна нулю, то, ограничиваясь множеством строгой монотонности, будем считать, что $0 \leq x < e^{-1}$ или, что эквивалентно, $0 \leq y < e^{-1}$.

Более того, вырождение имеет место в точке нулевого решения $x = y = 0$, поскольку производная от функции $y \ln y$ в этом случае бесконечна. Поэтому для вычисления функции $y(x)$ построим алгоритм с учетом условия $0 < x < e^{-1}$. Для этого преобразуем уравнение (5.2), вводя вместо неизвестной функции $y(x)$ масштабированную функцию $\eta(x)$ по формуле $y(x) = x\eta(x)$. Тогда уравнение (5.2) принимает вид

$$\eta(\ln x + \ln \eta) + 1 = 0. \quad (5.4)$$

Введение вместо величины x величины

$$\nu = -\frac{1}{\ln x}$$

позволяет преобразовать уравнение (5.4) к более удобному виду

$$\eta = \nu(1 + \eta \ln \eta). \quad (5.5)$$

Заметим, что при малом $x > 0$ величина η также будет мала и положительна, причем $\eta \mapsto 0$ при $x \mapsto 0$.

Формула (5.5) в явной форме позволяет построить итерационный процесс

$$\eta_{n+1} = \nu(1 + \eta_n \ln \eta_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.6)$$

В качестве начального приближения здесь можно взять какое-нибудь значение $0 < \eta_0 \leq e^{-1}$.

Числовая последовательность $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$, построенная по итерационной формуле (5.6), будет строго положительной и ограниченной: $0 < \eta_n < \nu$. Следовательно, у этой последовательности будет хотя бы один предел. Поэтому существует подпоследовательность $\{\eta_{m_k}\}_{k=0}^{\infty}$, сходящаяся к этому пределу: $\eta_{m_k} \rightarrow \eta_*$ при $k \rightarrow \infty$.

Этот предел единственен. В самом деле, в силу (5.6) предел удовлетворяет уравнению (5.5). Если другой предел η_{**} , то он также должен удовлетворять уравнению (5.5), что невозможно, поскольку уравнение (5.5) на множестве $[0, 1)$ эквивалентно уравнению (5.2) на множестве $[0, e^{-1})$, которое имеет в точности одно решение.

Вычисления показывают, что итерационный процесс (5.6) сходится достаточно быстро. Достоинство этого процесса состоит в том, что он работает одинаково регулярно при всех допустимых значениях x . Кроме того, при любых сколь угодно малых $\eta > 0$ функция $\eta \ln \eta$ всегда остается равномерно ограниченной. Так что при любых допустимых значениях x итерационный оператор остается регулярным.

В качестве модели вязкой составляющей нормальной силы используется нелинейная модель, примененная в [9]. В модели касательной силы трения для простоты по примеру других работ (см., например, [10]) применялся регуляризованный закон Кулона [11]. Нет никаких трудностей изменить соответствующий класс-параметр и применить какую-нибудь более сложную зависимость силы трения от скорости относительного проскальзывания.

6. Вычислительные эксперименты

6.1. Динамическая ошибка передачи

Для вычислительной верификации была выбрана величина динамической ошибки передачи редуктора. Вначале введем вспомогательную переменную

$$\Delta = -r_{Ab}\varphi_A - r_{Bb}\varphi_B, \quad (6.1)$$

характеризующую рассогласование длин дуг основных окружностей колес. В случае идеальной «твердотельной» связи зубьев и при идеальном их переключении в отсутствие трения эта величина должна быть тождественно равной нулю.

Для проведения более подробного анализа рассмотрим результаты численного эксперимента. Прежде всего заметим, что в рассматриваемой модели эвольвентного зацепления невязка $\Delta(t)$ должна (почти) совпадать с глубиной $h(t)$ взаимного проникания твердотельных зубьев в окрестности контактной точки в применяемой нами модели Джонсона. В самом деле, рассогласование (6.1) есть в точности разность дуговых расстояний основных окружностей, на которые поворачиваются колеса A и B . Эта разность накапливается с начала движения в точности тогда, когда зубчатые колеса начинают контактировать.

С другой стороны, в силу известных свойств эвольвент, невязка $\Delta(t)$ реализуется в точности вдоль линии зацепления $K_A K_B$, «сходящейся» с основной окружности колеса A и «наматываемой» на основную окружность колеса B . При этом, с кинематической точки зрения с основной окружности колеса A «смотана» нить длины $-r_{Ab}\varphi_A$, в то время как на основную окружность колеса B «намотана» нить длины $r_{Bb}\varphi_B$. Если бы контакт был геометрически твердым, то выполнялось бы условие $\Delta(t) \equiv 0$.

Известно, что общий перпендикуляр $P_A P_B$ к эвольвентам контактирующих поверхностей зубьев лежит в точности на линии зацепления $K_A K_B$, поэтому геометрически должно выполняться соотношение

$$|\overrightarrow{P_A P_B}| \equiv h(t) \equiv \Delta(t).$$

Сравнение указанных переменных, полученных в процессе симуляции для «наиболее идеального» случая однократного контакта $m = 1$ в прямом ходе, показано на рисунке 5.

Эффект, имеющий место за счет твердотельного «продавливания» тел в контактной модели Джонсона, в определенном смысле похож на эффект, связанный с крутильными деформациями упругих шестеренок A и B [12, 13]. Более того, конечноэлементное моделирование упругого изгиба контактирующих зубьев [14] не слишком существенно искажает общую картину динамики зацепления.

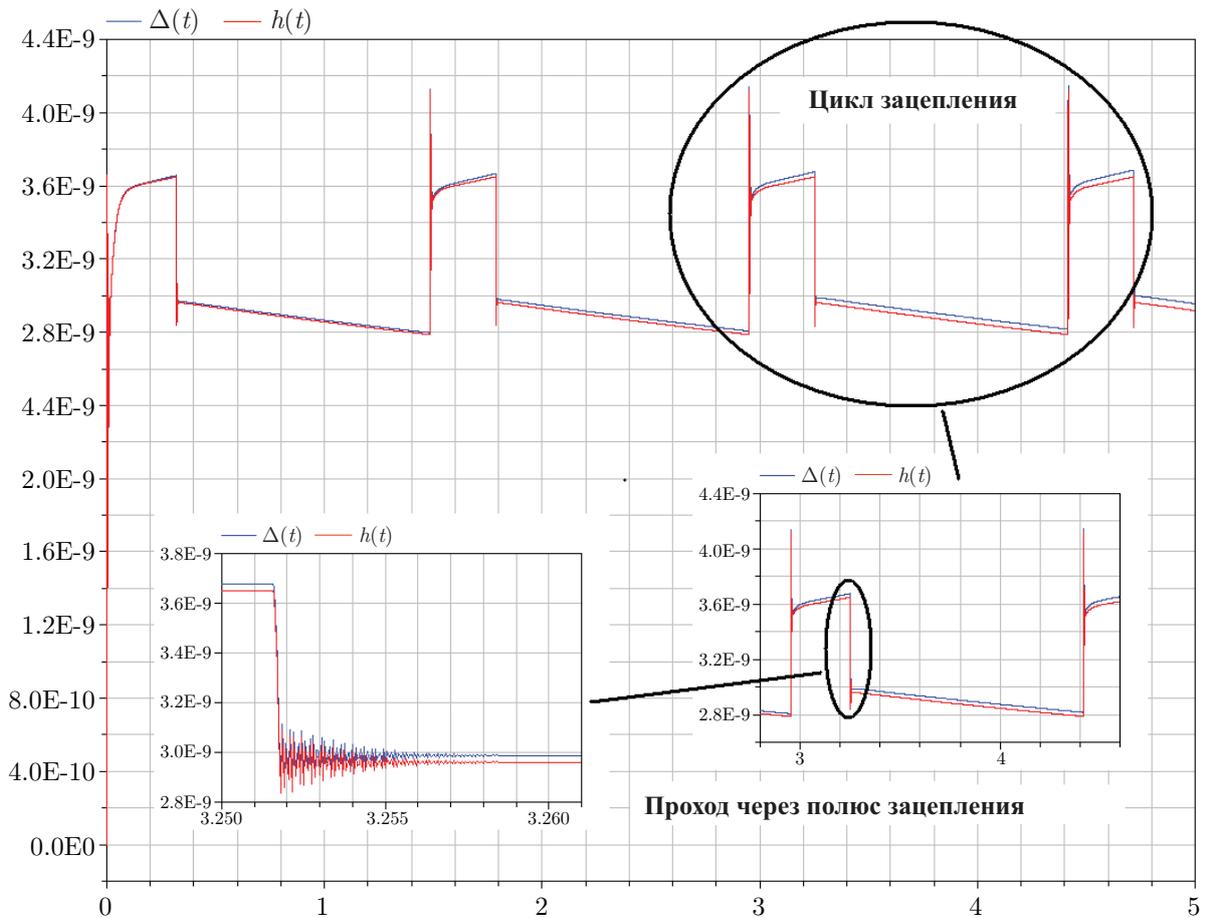


Рис. 5.



В самом деле, динамическая ошибка передачи с точностью до знака вычисляется по формуле

$$\delta = -r_{Ab}\psi_A - r_{Bb}\psi_B, \quad (6.2)$$

аналогичной формуле (6.1). Здесь величины ψ_A, ψ_B являются отклонениями углов поворота тел A и B , деформированных из-за контакта, от некоторых своих номинальных значений $\Phi_A(t), \Phi_B(t)$ так, что выполняются равенства

$$\varphi_\alpha(t) = \Phi_\alpha(t) + \psi_\alpha(t) \quad (\alpha = A, B).$$

По сути дела, нужно через «точку» контакта мысленно провести ось координатной системы и провести также ось через ту же точку, но в недеформированном состоянии. Угол между этими осями и будет равен ψ_A для тела A и ψ_B — для тела B . Под деформациями здесь на самом деле можно понимать крутильные деформации вала с колесом плюс изгибные деформации самих зубьев. Последние также создают «крутильный» эффект на колесах.

Номинальные значения $\Phi_\alpha(t)$ в точности соответствуют твердотельному контакту, при котором, очевидно, выполняется кинематическое тождество

$$-r_{Ab}\Phi_A(t) - r_{Bb}\Phi_B(t) \equiv 0,$$

поэтому в рамках данного рассмотрения оказывается, что $\Delta(t) \equiv \delta(t)$.

Рассмотрим далее источники динамической ошибки редуктора, представленной на рисунке 5. Если в модели полностью убрать трение между поверхностями зубьев, то величина $\delta(t)$ будет асимптотически увеличиваться до предельного значения, дающего систематическую ошибку (рис. 6, синий график). Если же в рассмотрение ввести простейшую модель сухого трения с коэффициентом $f = 0.3$, то на систематическую ошибку наложится периодическая ошибка, терпящая скачки в моменты смены пар контактирующих зубьев и прохождения через полюс зацепления P . Соответствующая кривая показана на рисунке 6 красным цветом.

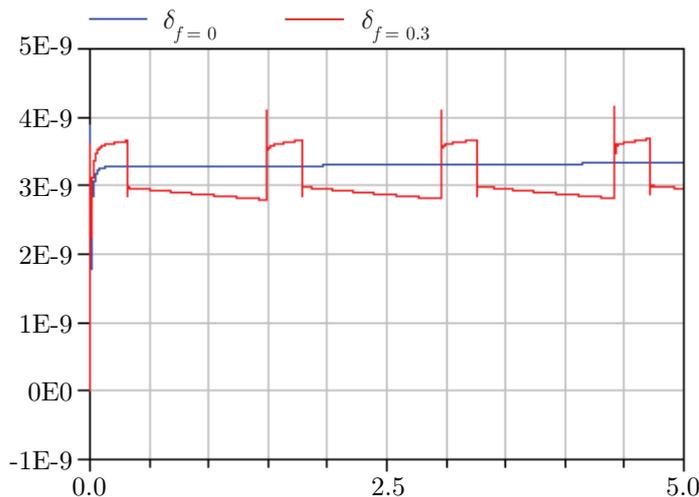


Рис. 6. ^a

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/2068/0>

Последняя кривая на рисунке 6 показывает, что найденная ошибка полностью идентична аналогичной ошибке, выведенной в [12, 13]. В последнем случае мы видим дополнительные малые искажения графика (рис. 6), получающиеся за счет дополнительных вкладов от крутильных колебаний, и всплеск, возникающий с момент потери контакта еще одной, предшествующей, пары зубьев. Напомним, что в нашей модели для простоты рассматривается случай, когда в каждый данный момент времени контактирует только одна пара зубьев. В работах же [12, 13] временные сегменты контактирования пар зубьев перекрываются (одновременно не более двух). Такую ситуацию в нашей модели мы обсудим ниже.

6.2. Сравнение со случаем твердого контакта

Помимо описанной выше верификации проводилось также численное сравнение построенной модели и модели, включающей твердый контакт. Сравнение результатов симуляции показано на рисунке 7. Вдоль оси ординат отсчитывается величина нормальной контактной силы. Случай модели Джонсона соответствует графику синего цвета, а красный цвет используется для случая твердотельной контактной модели.

Из рисунка 7 видно, что обе контактные модели дают почти идентичный динамический результат. Разница лишь в том, что модель Джонсона порождает дополнительные осцилляции значений нормальной силы. Более того, из детализации, показанной на ри-

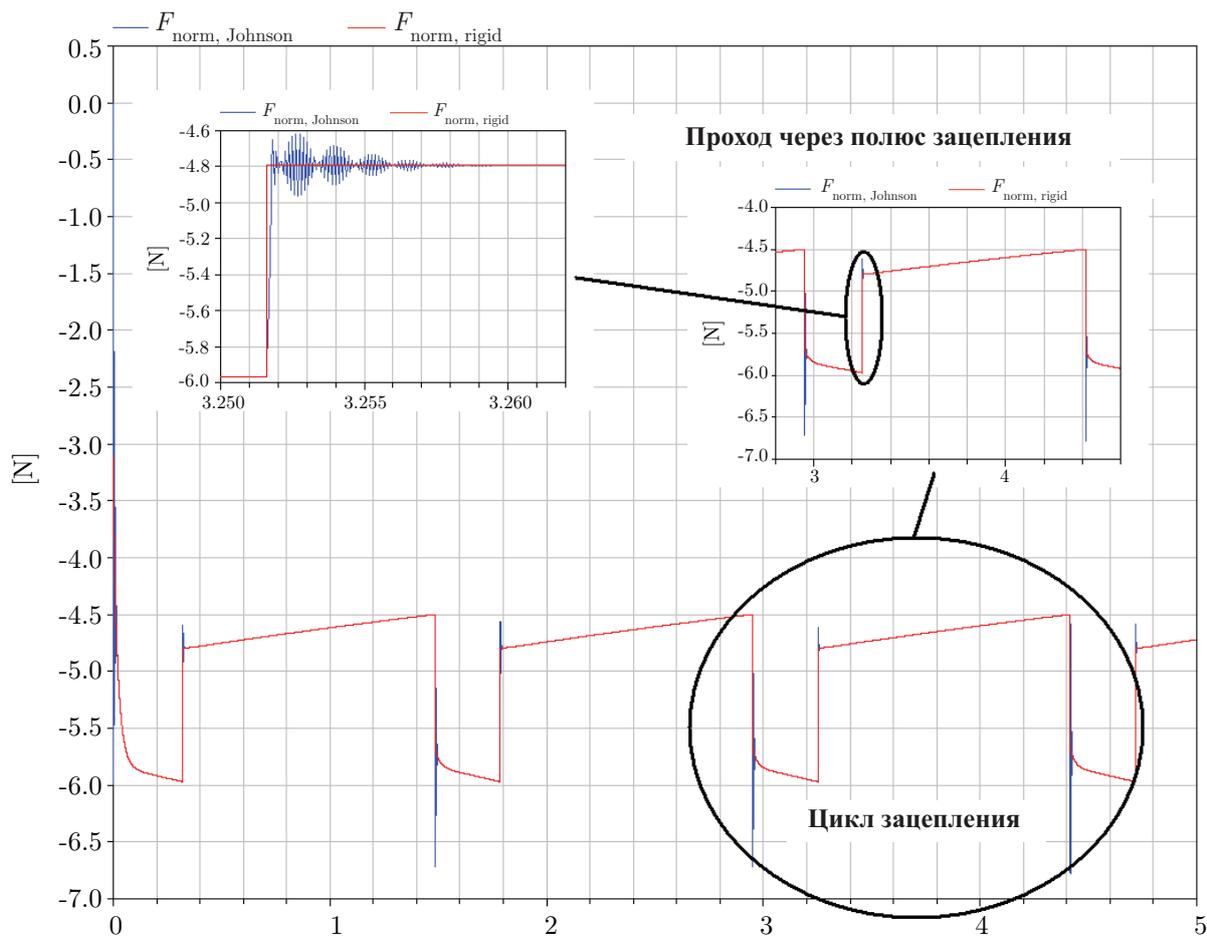


Рис. 7.

сунке 7, видно, что твердотельная модель ведет себя как усреднение модели с податливостью. Преимуществом последней является то, что она позволяет рассматривать задачи с любым количеством контактов взаимодействующих тел, тогда как твердотельная модель этого делать не позволяет. Сравнение времени процессора, требуемого для прогона модели, показывает, что модель Джонсона лишь незначительно удлиняет требуемое время счета (не более, чем в два раза). Таким образом, можно сказать, что в данной работе рассмотрена неограниченная контактная задача для редукторов. В традиционной инженерной постановке контактные задачи обычно рассматриваются в ограниченной постановке, включающей дополнительные гипотезы о распределении нормальной силы по набору, в общем случае, множественных пятен контакта для одного и того же твердого тела.

Можно указать еще один интересный пример [15] упрощенной модели упругой податливости с дополнительными степенями свободы между каждым (предполагаемым твердым) зубом и колесом (также предполагаемым твердым). Дополнительные степени свободы обеспечивают подвижность отдельного зуба относительно корпуса колеса вдоль его окружности впадин. Жесткости податливостей подбираются с учетом упругих свойств изгибной деформации зубьев.

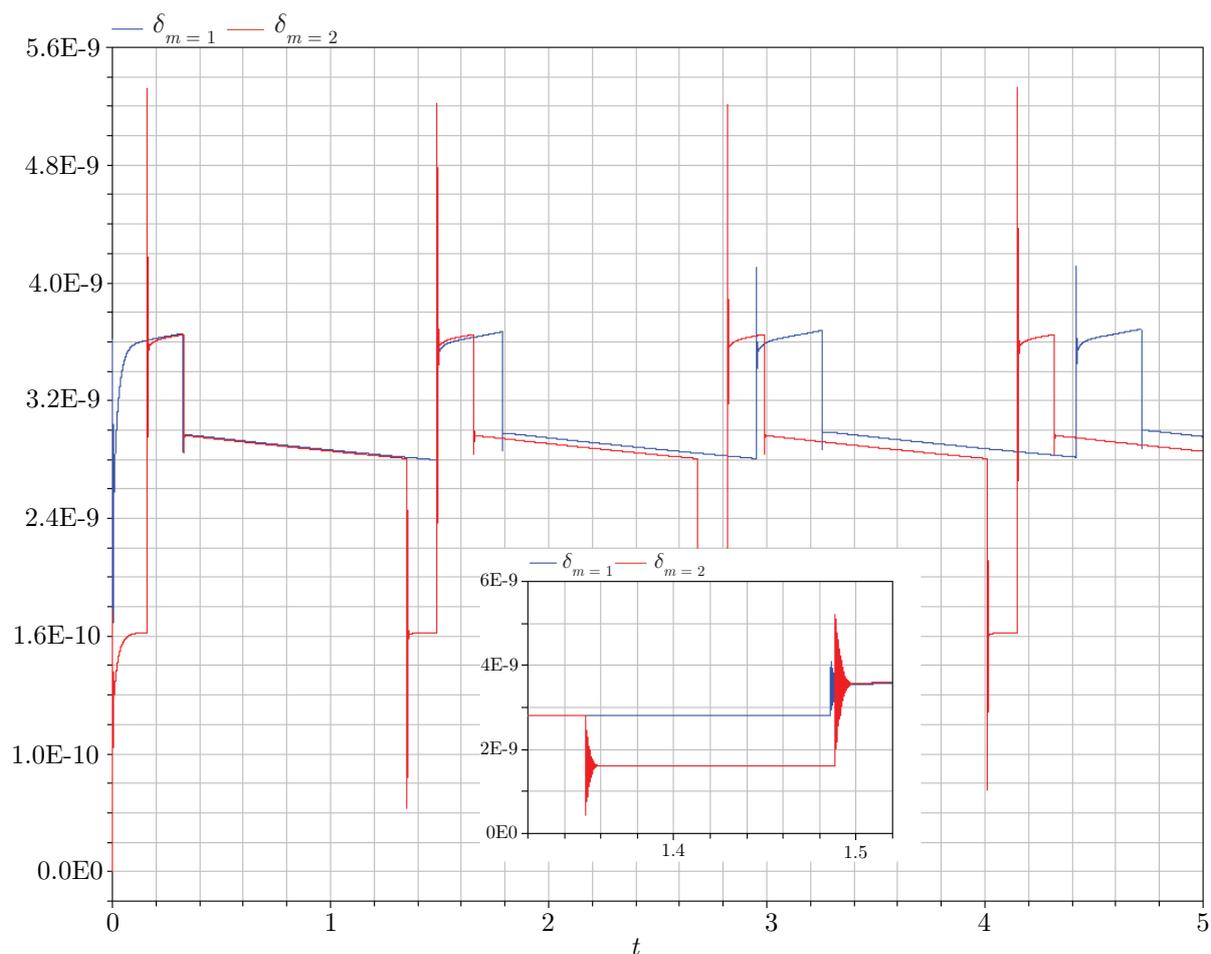
6.3. Случай кратного контакта

Для верификации усовершенствованной модели (при $m = 2$) редуктора проводились дополнительные численные эксперименты. Проверялись на соответствие графики динамической ошибки передачи и величина нормальной силы в контакте. В первом случае нынешняя модель уточняет графики ошибки передачи, отслеживая, как и в работах [12, 13], моменты увеличения/уменьшения кратности контакта. Как и в работах [12, 13], в нашей модели в такие моменты обнаруживаются всплески наблюдаемой величины (в данном случае — динамической ошибки передачи). График динамической ошибки показан на рисунке 8.

Здесь синим цветом окрашен график динамической ошибки передачи при $m = 1$. Красная линия соответствует реализации перекрытия контактов ($m = 2$). Из графика ошибки легко сделать несколько достаточно естественных выводов. Во-первых, интервалы времени, когда контакты пар зубьев перекрываются, характеризуются, что естественно, удвоенной упругой жесткостью, и, как следствие, мы наблюдаем в эти интервалы падение ошибки в два раза. Во-вторых, что также видно из графика, эффект перекрытия интервалов контактирования приводит к систематическому сдвигу («схлопыванию») графика цикла зацепления.

При наблюдении поведения силы нормальной упругой реакции в контакте имеет место иная ситуация. Обычно, следуя инженерной традиции использования ограниченной постановки динамической задачи с кратными контактами, для вычисления нормальной силы в каждом контакте просто делят соответствующую суммарную динамическую силу «поровну» (или с использованием каких-нибудь нединамических соображений) между пятнами контакта зубьев. В случае же нашей модели контактная сила упругости вычисляется динамически в процессе симуляции исходя (в данном случае) из модели Джонсона, реализуя, тем самым, неограниченную задачу контактирования зубчатых колес редуктора. Характер поведения нормальных сил в контакте в течение цикла зацепления показан на рисунке 9.

Здесь показана зависимость от времени нормальных упругих сил, вычисляемых в двух контактных объектах прямого хода. В анализируемом случае предполагается, что на ведущее колесо A действует постоянный ускоряющий крутящий момент, а на ведомое колесо B действует крутящий момент вязкого сопротивления, пропорциональный угловой скорости

Рис. 8. Динамическая ошибка передачи для $m = 1$ и $m = 2$.

вращения этого колеса. Из графика сразу же следует интересное наблюдение: инженерный подход, применяемый при использовании ограниченной формулировки динамической задачи, косвенно подтверждается и при неограниченной формулировке: величины нормальных упругих сил при наличии двух одновременных контактов оказываются все-таки почти одинаковыми. На самом деле это вполне естественно, поскольку в силу твердотельного характера движения колес глубина проникания в обоих одновременно существующих контактах будет одинакова, а значит, одинаковыми будут и нормальные упругие силы, вычисляемые из модели Джонсона.

7. Выводы

Проведенный выше анализ модели зацепления позволяет сделать следующие заключения о свойствах динамического прототипа прямозубого эвольвентного редуктора.

1. Цилиндрические контактные модели в определенном смысле проще общих трехмерных моделей, поскольку они ограничены двумерным геометрическим анализом. Однако динамические модели при этом становятся сложнее, поскольку в модели Джонсона

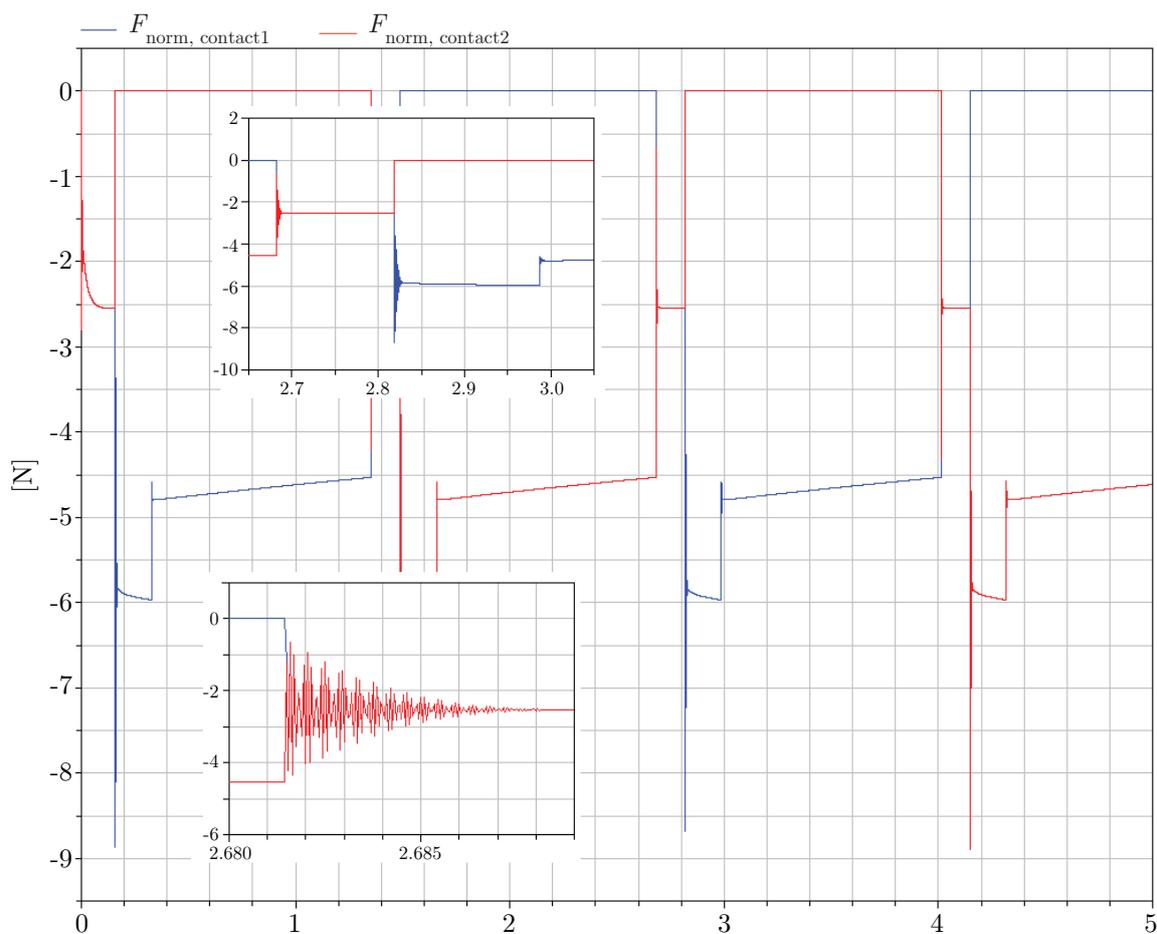


Рис. 9. Нормальные силы в контактах.

используется трансцендентное уравнение, имеющее сингулярность в нуле и поставляющее дополнительную жесткость в численную модель.

2. В силу изгиба зубьев модели с податливостью создают эффект, аналогичный крутильным упругим деформациям зубчатых колес.
3. В моделях с податливостью учет эффекта динамического изгиба зубьев позволяет немного уменьшать нормальную контактную жесткость.
4. Данная контактная модель предоставляет возможность построения так называемой неограниченной контактной задачи с любым числом параллельных контактов для тела в моделируемой системе тел.
5. Модель обеспечивает симуляцию как прямого, так и обратного хода редуктора с учетом возможного зазора между контактирующими зубьями.
6. Модель позволяет симулировать эвольвентное зацепление с кратными контактами.
7. В модели реализован наиболее эффективный алгоритм отслеживания контакта, исключающий в случае эвольвенты использование каких-либо уравнений — дифференциальных или алгебраических. Для вычисления глубины взаимного проникания эвольвентных поверхностей зубьев используются прямые формулы.

8. Построенная модель податливости показала достаточно высокую эффективность даже в сравнении с наиболее быстродействующим случаем геометрически твердой связи.
9. Для обеспечения точности модели контактирования наиболее подходящая реализация — это массив контактных объектов. Согласование поведения этих объектов обеспечивается подходящим подбором начальных данных для переменных объекта.
10. Разработанная компьютерная модель открывает возможность построения редукторов любой сложности для прямозубых эвольвентных зацеплений.

Список литературы

- [1] <https://www.modelica.org/libraries/Modelica/>
- [2] Pelchen C., Schweiger C., Otter M. Modeling and simulating the efficiency of gearboxes and of planetary gearboxes // Proc. of 2nd Internat. Modelica Conf. (Oberpfaffenhofen, Germany, March 18–19, 2002) / Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. (DLR). Session 9a: Mechatronic Applications, pp. 257–266.
- [3] Косенко И. И., Гусев И. К. Компьютерная модель прямозубого эвольвентного зацепления // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения / С. Я. Степанов, А. А. Буров (ред.); Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН. М.: Вычисл. центр им. А. А. Дородницына РАН, 2011. С. 144–183.
- [4] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
- [5] Косенко И. И. Графовые представления моделей динамики систем тел // Матем. моделирование, 2009, т. 21, № 9, с. 80–88.
- [6] Kosenko I., Aleksandrov E. An approach to construct the multibody dynamics library on Modelica language // Proc. of 4th European Conf. on Computational Mechanics (Palais des Congres, Paris, France, May 16–21, 2010). 34 pp.
- [7] Kosenko I., Aleksandrov E. Implementation of the Contensou–Erismann model of friction in frame of the Hertz contact problem on Modelica // Proc. of the 7th Internat. Modelica Conf. (Como, Italy, 20–22 September, 2009). P. 288–298.
- [8] Pereira C. M., Ramalho A. L., Ambrosio J. A. A critical overview of internal and external cylinder contact force models // Nonlinear Dynam., 2011, vol. 63, pp. 681–697.
- [9] Kosenko I. I., Alexandrov E. B. Implementation of the Hertz contact model and its volumetric modification on Modelica // Proc. of the 6th Internat. Modelica Conf. (Bielefeld, Germany, March 3–4, 2008). P. 203–212.
- [10] Förg M., Engelhardt T., Ulbrich H. Comparison of different contact models within valve train simulations // Proc. of the 3rd Asian Conf. on Multibody Dynamics 2006 (ACMD-2006, University of Tokyo, Tokyo, Japan, August 1–4, 2006). 9 pp.
- [11] Kossenko I. I. Implementation of unilateral multibody dynamics on Modelica // Proc. of the 4th Internat. Modelica Conf. (Hamburg–Harburg, Germany, March 7–8, 13–23, 2005). P. 13–23.
- [12] Vaishya M., Singh R. Sliding friction-induced non-linearity and parametric effects in gear dynamics // J. Sound Vibration, 2001, vol. 248, pp. 671–694.
- [13] Vaishya M., Singh R. Strategies for modeling friction in gear dynamics // J. Mech. Des., 2003, vol. 125, pp. 383–393.
- [14] He S. Effect of sliding friction on spur and helical gear dynamics and vibro-acoustics: PhD thesis. The Ohio State University, 2008. 233 pp.
- [15] Ebrahimi S. A contribution to computational contact procedures in flexible multibody systems: PhD thesis. Institute of Engineering and Computational Mechanics, University of Stuttgart, 2007. 144 pp.

Computer model of the spur involute gear mesh dynamics in gearboxes

Ivan I. Kosenko¹, Il'ya K. Gusev²

^{1,2}Dorodnitsyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences

Vavilova st. 40, Moscow, 119991, Russia

¹kosenko@ccas.ru, ²diskus1@land.ru

A dynamical model of the gearbox with spur involute mesh is under construction. The main attention is paid to the design technology of the cylindrical bodies elastic contact models. First of all, an algorithm for tracking of contact for cylindrical surfaces directed by involutes underwent upgrading. This algorithm is reduced “simply” to tracking of two involutes. As a result it turned out that common line normal to both curves, involutes, of contacting coincides always with line of action. This causes immediately a simplified technique for contact tracking without use of differential or algebraic equations. This technique is reduced to simple formulae for direct computations. At the same time dynamical models of the bodies involved, gearwheels and gearbox housing, continue to be three-dimensional.

Contact model provides a full possibility to take into account unilateral nature of teeth interacting while meshing. The backlash may arise dynamically for any side of teeth pairs at contact. In particular, the model simulates dynamics for arbitrary regimes of the pinion rotation acceleration/deceleration.

The mesh construct is such that for any side (for both the forward and backward contacting) of teeth at contact the mesh ratio is greater than one. The mesh multiplicity for real gears prevents potential jamming for gearwheels while the teeth pairs switching process. Thus our implementation assumes mesh cycles overlapping: new contact arises beforehand the old one will vanish.

MSC 2010: 00A71; 68U20; 70E18; 70E55; 74H15; 74M10; 74M15; 74M20

Keywords: spur involute gear mesh, Johnson contact model, gear mesh properties, contact tracking algorithm, backlash model, multiple gear mesh, object-oriented modeling

Received April 16, 2012, accepted June 12, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 713–734 (Russian)

