



УДК: 517.925

MSC 2010: 37J60, 37J35

## Качение твердого тела без проскальзывания и верчения: кинематика и динамика

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Д. В. Трещев

В данной работе исследуются различные кинематические свойства качения одного твердого тела по другому как для классической модели качения без проскальзывания (скорости тел в точке контакта совпадают), так и для модели rubber-качения (дополнительно исключается прокручивание тел относительно друг друга). Кроме того, в случае когда оба тела ограничены сферическими поверхностями и одно из них неподвижно, уравнения движения подвижного шара представлены в форме системы Чаплыгина. Если при этом центр

Получено 6 сентября 2012 года

После доработки 28 ноября 2012 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (11.G34.31.0039), ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (1.1248.2011), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-2519.2012.1). Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.1935. Работа Д. В. Трещева поддержана грантом поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

Борисов Алексей Владимирович

[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич

[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований;

Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН

117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Институт математики и механики УрО РАН

620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Трещев Дмитрий Валерьевич

[treshev@mi.ras.ru](mailto:treshev@mi.ras.ru)

Математический институт им. В. А. Стеклова

119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

масс подвижного шара совпадает с его геометрическим центром, уравнения движения представлены в конформно-гамильтоновой форме, а в случае когда радиусы подвижной и неподвижной сфер совпадают — в гамильтоновой.

Ключевые слова: качение без проскальзывания, неголономная связь, система Чаплыгина, конформно-гамильтонова система

## Содержание

Введение . . . . .	784
1. Две связи . . . . .	785
1.1. Качение без проскальзывания . . . . .	785
1.2. Качение без проскальзывания и верчения . . . . .	786
2. Кинематические свойства качения . . . . .	787
3. Доказательство предложения 3 . . . . .	789
4. Качение без верчения в случае сферического контакта . . . . .	790
4.1. Уравнения движения и первые интегралы . . . . .	790
4.2. Уравнения движения в форме Чаплыгина . . . . .	792
5. Приложение. Доказательство вспомогательных утверждений . . . . .	794

## Введение

В работе рассмотрены некоторые вопросы кинематики и динамики твердого тела, катящегося по неподвижной поверхности. Предполагается, что между твердым телом и поверхностью реализуется неголономная связь, которая задается условиями равенства нулю скорости точки контакта и проекции угловой скорости твердого тела на нормаль к неподвижной поверхности. Для описания систем с качением, как правило, используется только первое условие, задающее «классическую» модель абсолютно шероховатой поверхности. Ряд интересных задач здесь был разрешен Аппелем, Раусом, Чаплыгиным, Воронцом (обзор этих исследований представлен в работах [6, 10, 11]). Второе условие получается в предположении, что сопротивление верчению при движении тела настолько велико, что прокручивание невозможно. Эта модель качения также рассматривалась классиками. Так, в работах [13, 14] Ж. Адамар и А. Беген изучали кинематику и динамику систем без верчения, а также указали условия, при которых связь становится интегрируемой (голономной). Результаты работ [13, 14] были переоткрыты современными исследователями [17–19]. Отметим, что рассматриваемая ниже модель качения без верчения в некоторых аспектах является более простой, чем «классическая», что и обусловило ее исследование при анализе задач робототехники, управления и пр. (в применении к движущемуся шару обсуждение соответствующей литературы имеется в [2]). В работах [3, 5, 12, 14] рассмотрен ряд задач динамики, связанных с качением твердого тела по поверхности, и предложен [12, 14] термин *rubber rolling*, подчеркивающий физическую природу возникновения условия отсутствия верчения.

В этой работе мы систематически обсуждаем вопросы кинематики движения твердого тела в условиях *rubber*-качения, приводя достаточно подробные доказательства. Мы также

приводим уравнения динамики в квазикоординатах (в наиболее удобной для исследований форме) для случая, когда подвижное и неподвижное тело ограничены сферическими поверхностями, используя далее представление уравнений движения в форме Чаплыгина, указываем случаи, когда динамика системы сводится к гамильтоновой, возможно, после соответствующей замены времени.

## 1. Две связи

### 1.1. Качение без проскальзывания

Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — два абсолютно твердых тела в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Считаем, что границы  $S_1 = \partial B_1$  и  $S_2 = \partial B_2$  — гладкие поверхности, причем для некоторой постоянной  $c$  нормальные кривизны поверхности  $S_1$  строго больше, чем  $c$ , а нормальные кривизны поверхности  $S_2$  строго больше, чем  $-c$ . Это условие выполняется, например, если оба тела — строго выпуклые (тогда можно взять  $c = 0$ ) или одно из тел — плоскость, а другое — строго выпукло.

В этой ситуации корректно определена задача о качении без проскальзывания тела  $B_2$  по  $B_1$  (которое для определенности будем считать неподвижным). В данном случае качение без проскальзывания означает, что скорость точки контакта  $Q_2 = Q_2(t) \in B_2$  в любой момент времени  $t$  равна нулю.

Условие качения без проскальзывания в механике принято трактовать как линейную по скоростям связь. В этом разделе мы укажем несколько геометрических соображений по поводу интегрируемости этой и еще одной подобной связи, для которой к условию отсутствия проскальзывания добавляется условие отсутствия верчения.

Предположим, что тело  $B_2$  выпукло и компактно. Тогда  $S_2$  диффеоморфно двумерной сфере и конфигурационным пространством рассматриваемой системы является  $\mathcal{P} = S_1 \times SO(3)$ . Действительно, любое положение системы однозначно задается ориентацией  $B_2$  (элемент  $SO(3)$ ) и точкой  $Q_1 \in S_1$  касания тел.

Напомним, что связь называется *вполне интегрируемой*, если она эквивалентна ограничениям на конфигурационном пространстве, другими словами, уравнениям вида  $f = \text{const}$ , где  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^k$  — гладкая функция,  $k \geq 1$ . Связь называется *вполне неинтегрируемой*, если она не порождает никаких ограничений на конфигурационном пространстве. Во всех промежуточных ситуациях будем говорить о *частично интегрируемой* связи.

Общую касательную плоскость к  $S_1$  и  $S_2$  в точке контакта будем обозначать  $\Pi$ . Начнем с хорошо известного утверждения.

**Предложение 1.** *Условие качения без проскальзывания задает вполне неинтегрируемую связь.*

*Доказательство.* Достаточно проверить, что, не нарушая связи, тело  $B_2$  можно прокатить из одного произвольного положения ( $p_- \in \mathcal{P}$ ) в другое, также произвольное ( $p_+ \in \mathcal{P}$ ). Пусть

$$S_1 \ni Q_1^\pm = Q_2^\pm \in S_2$$

— точки касания тел в положениях  $p_\pm$ . Нарисуем на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  гладкие кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  так, что

- $\gamma_1$  начинается в точке  $Q_1^-$  и заканчивается в  $Q_1^+$ ,
- $\gamma_2$  начинается в точке  $Q_2^-$  и заканчивается в  $Q_2^+$ ,
- длины кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  совпадают.



Прокатим без проскальзывания тело  $B_2$  по  $B_1$  так, чтобы кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  все время имели общую касательную в точке  $S_1 \ni Q_1(t) = Q_2(t) \in S_2$  касания тел. Для этого в любой момент времени  $t$  следует двигать тело  $B_2$  с угловой скоростью  $\omega(t)$ , перпендикулярной общей касательной к кривым  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Проекцию  $\omega(t)$  на нормаль к плоскости  $\Pi = \Pi(t)$  можно вычислить с помощью предложения 4 (см. ниже).

Условие отсутствия проскальзывания означает, что движение, начавшись с точки касания  $Q_1^-$  на  $B_1$  и  $Q_2^-$  на  $B_2$ , окончится в некоторый момент времени  $t_+$  в положении, когда тела касаются в точках  $Q_1^+$  и  $Q_2^+$ . Для приведения системы в требуемое положение  $p_+$  остается лишь повернуть  $B_2$  на нужный угол вокруг нормали к  $\Pi(t_+)$ . ■

## 1.2. Качение без проскальзывания и верчения

Теперь рассмотрим другую связь, когда кроме условия отсутствия проскальзывания налагается условие отсутствия верчения в точке контакта, то есть в любой момент времени  $t$  угловая скорость  $\omega(t)$  параллельна плоскости  $\Pi(t)$ . Эту связь будем называть *качением без верчения*.

Предположим, что тела  $B_1$  и  $B_2$  равны как геометрические фигуры. Это значит, что существует сохраняющая расстояния биекция  $b: B_1 \rightarrow B_2$ . Таких биекций может быть несколько. Зафиксируем одну из них.

Следующее простое наблюдение также хорошо известно (см., например, [9, 18]).

**Предложение 2.** *Предположим, что в начальный момент времени  $b$  совпадает с симметрией относительно плоскости  $\Pi$ . Тогда это свойство останется верным в любой момент времени в процессе движения (качения без верчения).*

Доказательство будет следовать из приводимого ниже предложения 4.

В случае, когда  $B_1$  и  $B_2$  — равные выпуклые фигуры общего вида, согласно предложению 2 в фазовом пространстве  $\mathcal{P}$  имеется поверхность  $\mathcal{S}$  коразмерности 3, такая, что любое допустимое связью движение, начинающееся на  $\mathcal{S}$ , с  $\mathcal{S}$  не сойдет.

Если  $B_1$  и  $B_2$  — шары одинакового радиуса, то связь вполне интегрируема. Действительно, здесь фазовым пространством можно считать  $\mathcal{P} = S^2 \times SO(3)$ , где первый сомножитель можно трактовать как нормаль  $\mathbf{n}$  к сфере  $S_1$  в точке касания, а второй — как ортогональную матрицу  $\mathbf{A}$ , задающую ориентацию подвижного тела  $B_2$ . Предложение 2 означает, что  $\mathcal{P}$  слюится на инвариантные интегральные поверхности вида

$$I_B = \{(\mathbf{n}, \mathbf{S}_n \mathbf{B}) \in \mathcal{P} : \mathbf{n} \in S^2\}, \quad \mathbf{B} \in SO(3),$$

где  $\mathbf{S}_n \in SO(3)$  — симметрия относительно плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{n}$ . Каждая из поверхностей  $I_B$  диффеоморфна двумерной сфере и является графиком над первым сомножителем в прямом произведении  $S^2 \times SO(3)$ .

Помимо случая двух одинаковых шаров и указанной в предложении 2 частичной интегрируемости имеются и другие случаи отсутствия полной неинтегрируемости. Например, качение без верчения является вполне интегрируемой связью, если  $B_1$  и  $B_2$  — цилиндры. Традиционным инструментом для исследования подобных эффектов являются критерий Фробениуса и теорема Рашевского — Чжоу. Неинтегрируемость рассматриваемой связи (также трактуемая как управляемость системы) установлена в [17] (качение сферы по плоскости или по сфере другого радиуса), [19] (качение осесимметричного тела по плоскости), [18] (случай строго выпуклых тел). Наиболее полные утверждения содержатся в [9]. Методы,

используемые в этих работах, сводятся к анализу векторных полей, допустимых связью в конфигурационном пространстве  $\mathcal{P}$ , и их коммутаторов.

Далее при небольших дополнительных ограничениях мы прокомментируем факт неинтегрируемости связи, путем явного построения управления, перемещающего систему из одного произвольного положения в другое.

**Предложение 3.** *Предположим, что для любой пары точек  $Q_1 \in S_1$  и  $Q_2 \in S_2$  гауссова кривизна  $K_1(Q_1)$  поверхности  $S_1$  строго меньше гауссовой кривизны  $K_2(Q_2)$  поверхности  $S_2$ . Тогда с помощью качения без верчения  $B_2$  можно переместить из любого положения  $p_- \in \mathcal{P}$  в любое другое положение  $p_+ \in \mathcal{P}$ .*

## 2. Кинематические свойства качения

Для доказательства предложений 2 и 3 нам понадобятся некоторые факты из кинематики, при этом для анализа движения удобно перейти в подвижную систему отсчета, связанную с касательной плоскостью  $\Pi(t)$ . В этой системе тела  $B_1$  и  $B_2$  катятся по (теперь уже неподвижной) плоскости  $\Pi$ , касаясь  $\Pi$  в совпадающих точках. Если  $B_1$  и  $B_2$  выпуклые, то в процессе движения они будут находиться по разные стороны от  $\Pi$ . Зафиксируем ориентацию на  $\Pi$ , например, путем выбора единичной нормали  $e_z \perp \Pi$ , направленной внутрь тела  $B_1$  и наружу по отношению к  $B_2$ . Такой выбор «положительной» нормали задает ориентацию на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ .

Точка касания  $Q_i(t) \in S_i$  поверхности  $S_i$  с  $\Pi$  оставляет на  $S_i$  след — ориентированную кривую  $\gamma_i$ , аналогичная кривая  $\gamma$  появляется и на плоскости  $\Pi$ . Пусть  $s$  — натуральный параметр на  $\gamma_1$ . Условие отсутствия проскальзывания означает, что  $s$  — также натуральный параметр на  $\gamma_2$  и  $\gamma$ . Пусть  $k_i = k_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ , — геодезическая кривизна  $\gamma_i$  как кривой на ориентированной поверхности  $S_i$  и  $k = k(s)$  — кривизна  $\gamma$ .

**Предложение 4.** *Пусть  $\dot{s}$  — скорость точки контакта при качении без проскальзывания. Тогда*

$$k(s) = k_i(s) + \omega_z / \dot{s}, \quad \omega_z = (\omega, e_z), \quad i = 1, 2.$$

**Следствие 1.** *Пусть начальные точки  $\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma(0)$  фиксированы, тогда при качении без проскальзывания и верчения, то есть при  $\omega_z = 0$ , любая из кривых  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$  однозначно определяет две другие и однозначно определяет движение системы в натуральной параметризации.*

**Следствие 2.** *Предположим, что при качении без верчения одна из кривых  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$  — геодезическая. Тогда и две другие — также геодезические.*

В качестве еще одного следствия получаем доказательство предложения 2, поскольку при условиях предложения 2 имеем:  $\gamma_2 = b(\gamma_1)$ .

Предположим, что в процессе движения точка контакта  $Q_2(t)$ ,  $t \in [t_-, t_+]$ , переместилась на  $S_2$  вдоль замкнутой кривой  $\gamma_2 = \gamma_2(s)$ ,  $s \in [s_-, s_+]$ . Тогда в системе отсчета, связанной с  $\Pi$ , перемещение  $B_2$  сводится к параллельному переносу на вектор  $Q(s_-)Q(s_+)$  и повороту на угол  $\alpha$  вокруг вектора  $e_z$ .

**Предложение 5.** *При качении без проскальзывания*

$$\alpha = -\Omega + \int_{t_-}^{t_+} \omega_z(t) dt, \quad \Omega = \int_{s_-}^{s_+} k_2(s) ds. \tag{2.1}$$



Величина  $\Omega$  является телесным углом при гауссовом отображении  $\mathcal{D}_2 \rightarrow S^2$ , где  $\mathcal{D}_2 \subset S_2$  — область, ограниченная кривой  $\gamma_2$ , а  $S^2$  — единичная сфера. Согласно теореме Гаусса – Бонне, имеем  $\Omega = \int_{\mathcal{D}_2} K_2 d\sigma$ , где  $K_2$  — гауссова кривизна поверхности  $S_2$ .

Доказательство предложений 4–5 можно найти, например, в [16].

Пусть  $c_2 \subset S_2$  — окружность малого радиуса  $r$ . Имеется в виду, что точки замкнутой кривой  $c_2$  равноудалены от некоторой точки  $O_2 \in S_2$  в метрике, индуцированной на  $S_2$  из  $\mathbb{R}^3$ .

Идея доказательства предложения 3 состоит в следующем. Поскольку след  $\gamma_2$  однозначно задает траекторию движения системы в пространстве  $\mathcal{P}$ , достаточно указать ориентированную кривую  $\gamma_2$ , задающую необходимое движение. Мы составим кривую  $\gamma_2$  из нескольких гладких кривых. Все они, кроме, возможно, первой, являются окружностями. Основные этапы движения —

- (1) перевод точки  $Q_2^-$  в  $Q_2^+$ , в результате  $S_2$  начинает касаться поверхности  $S$  в нужной точке  $Q_2 = Q_2^+ \in S_2$ ;
- (2) перевод точки  $Q_1^-$  в  $Q_1^+$  (так, чтобы точка  $Q_2$  по-прежнему оказалась в  $Q_2^+$ ), в результате обе точки касания  $Q_1 \in S_1$  и  $Q_2 \in S_2$  оказываются на требуемых местах,
- (3) движение, результат которого эквивалентен повороту вокруг нормали к  $\Pi$  в точке  $Q_1^+ = Q_2^+ \in \Pi$ ,

— в случае, когда  $S_1$  и  $S_2$  — сферы, легко могут быть вычислены явно с использованием формул сферической тригонометрии.

Далее мы будем рассматривать ориентированные окружности  $c_2 \subset S_2$  с отмеченной точкой. Любая такая окружность однозначно задается отмеченной точкой  $Q_2$ , радиусом  $r$ , единичным вектором  $e_2 \in T_{Q_2}S_2$ , указывающим направление кратчайшей геодезической из  $Q_2$  в  $O_2$ , и знаком ориентации  $\sigma \in \{+, -\}$ , который будем считать положительным ( $c_2$  задает вращение против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора внешней нормали к  $S_2$ ):

$$c_2 = c_2^\sigma(Q_2, r, e_2).$$

Зафиксируем положение системы  $p \in \mathcal{P}$ . Тогда фиксированными являются точки касания  $Q_i = Q_i(p) \in S_i$  и линейный изометрический изоморфизм  $\mathbf{R}_p: T_{Q_2}S_2 \rightarrow T_{Q_1}S_1$ . Рассмотрим также два поворота  $\mathbf{J}^\pm: T_{Q_1}S_1 \rightarrow T_{Q_1}S_1$  двумерной плоскости  $T_{Q_1}S_1$  вокруг точки  $Q_1$  на угол  $\pm\pi/2$ :

$$\mathbf{J}^\pm v = \pm e_z \times v, \quad v \in T_{Q_1}S_1.$$

Рассмотрим движение системы, при котором  $S_2$  катится без верчения по  $S_1$  так, что след  $\gamma_2$  оказывается окружностью  $c_2^\sigma(Q_2(p), r_2, e_2)$ . Соответствующая кривая  $\gamma_1$ , вообще говоря, не будет замкнутой, так что возникает отображение

$$(p, \sigma, r_2, e_2) \mapsto \hat{Q}_1 = F_p^\sigma(r_2, e_2) \in S_1,$$

где  $\hat{Q}_1$  — конечная точка кривой  $\gamma_1$ .



**Лемма 1.** Пусть  $K_i$  — гауссова кривизна поверхности  $S_i$  в точке  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда

$$\frac{d}{dr} \Big|_{r=0} F_p^\sigma = \frac{d^2}{dr^2} \Big|_{r=0} F_p^\sigma = 0, \quad \frac{d^3}{dr^3} \Big|_{r=0} F_p^\sigma(r, \mathbf{e}_2) = 6\pi(K_2 - K_1)\mathbf{J}^\sigma \mathbf{R}_p \mathbf{e}_2. \quad (2.2)$$

**Следствие 3.** В случае  $K_1 \neq K_2$  отображение  $(r, \mathbf{e}) \mapsto F_p^\sigma(r^{1/3}, \mathbf{e})$  — локальный  $C^1$ -диффеоморфизм окрестности нуля (точки  $r = 0$ ) плоскости  $\Pi$  с полярными координатами  $(r, \mathbf{e})$  на окрестность точки  $Q_1$  в  $S_1$ .

**Лемма 2.** Геодезическая кривизна  $k$  кривой  $c_2 = c_2^\sigma(Q_2, r, \mathbf{e})$  в любой точке равна

$$k = r^{-1}(1 - K_2 r^2/3 + \mathcal{O}(r^3)), \quad (2.3)$$

где  $K_2 = K_2(Q_2)$  — гауссова кривизна в точке<sup>1</sup>  $Q_2$ .

Длина окружности  $c_2$  равна

$$|c_2| = 2\pi r(1 - K_2 r^2/6 + \mathcal{O}(r^3)). \quad (2.4)$$

Доказательство лемм 1 и 2 содержится в разделе 5.

### 3. Доказательство предложения 3

1. Можно считать, что точки касания  $Q_2^-$  и  $Q_2^+$  в положениях  $p_-$  и  $p_+$  совпадают. Действительно, для этого достаточно перекатить  $B_2$  произвольным образом, не нарушая связи, в положение с точкой касания  $Q_2^+$  и считать это положение  $\hat{p}_-$  начальным вместо  $p_-$ .

2. Можно считать, что точки касания  $Q_1^-$  и  $Q_1^+$  также совпадают. В самом деле, чтобы перекатить шар  $B_2$  из положения  $\hat{p}_-$  в положение  $\hat{p}_+$ , когда точками касания являются  $Q_1^+ \in B_1$  и  $Q_2^+ \in B_2$ , действуем следующим образом. Рассмотрим качение без верчения, однозначно определяемое (следствие 1) следом

$$\gamma_2 = c_2^+(Q_2, r, \mathbf{e}), \quad Q_2 = Q_2^- = Q_2^+.$$

Согласно следствию 3, конечной точкой следа  $\gamma_1$  можно сделать любую точку  $\hat{Q}_1$ , достаточно близкую к  $Q_1^-$ . Следовательно, за конечное число таких шагов точку касания  $Q_1$  можно переместить в любое положение на  $S_1$ .

3. Итак,  $Q_1^- = Q_1^+$  и  $Q_2^- = Q_2^+$ , так что нам остается повернуть тело  $B_2$  вокруг нормали  $\mathbf{e}_z$  к касательной плоскости  $\Pi$  на некоторый угол  $\alpha$ . Это можно сделать следующим образом. Сначала прокатим  $S_2$  по  $S_1$  так, чтобы след  $\gamma_2 \subset S_2$  совпадал с маленькой окружностью  $c_2 = c_2^+(Q_2, r, \mathbf{e})$ . Тогда, согласно лемме 1, точка касания  $Q_1$  переместится в положение

$$\hat{Q}_1 = F_p^+(r, \mathbf{e}) = \pi(K_2 - K_1)r^3 \mathbf{J}^+ \mathbf{R}_p \mathbf{e} + \mathcal{O}(r^4) \in S_1.$$

Затем прокатим  $S_2$  по  $S_1$  так, чтобы след  $\gamma_2$  опять был маленькой окружностью  $\hat{c}_2 = c_2^+(Q_2, \hat{r}, \hat{\mathbf{e}})$ , при этом точка касания  $\hat{Q}_1$  должна вернуться в положение  $Q_1$ . Поскольку с точностью до  $\mathcal{O}(r^4)$  этому условию удовлетворяет  $c_2^+(Q_2, r, -\mathbf{e})$ , имеем:

$$\hat{r} = r + \mathcal{O}(r^2), \quad \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} + \mathcal{O}(r).$$

<sup>1</sup>Полезно иметь в виду, что  $K_2(Q_2) = K_2(O_2) + \mathcal{O}(r)$ .



Пусть  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , — угол, на который в результате повернется тело  $B_i$  в системе, связанной с  $\Pi$ . Из (2.1) находим:

$$\alpha_2 = \int_c k_2 ds, \quad c = c_2 \cup \widehat{c}_2.$$

Согласно лемме 2,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= r^{-1} \left( 1 - \frac{K_2 r^2}{3} + \mathcal{O}(r^3) \right) |c_2| + \frac{1}{\widehat{r}} \left( 1 - \frac{K_2 \widehat{r}^2}{3} + \mathcal{O}(\widehat{r}^3) \right) |\widehat{c}_2| = \\ &= 2\pi \left( 1 - \frac{K_2 r^2}{3} \right) \left( 1 - \frac{K_2 r^2}{6} \right) + \mathcal{O}(r^3) + 2\pi \left( 1 - \frac{K_2 \widehat{r}^2}{3} \right) \left( 1 - \frac{K_2 \widehat{r}^2}{6} \right) + \mathcal{O}(\widehat{r}^3) = \\ &= 4\pi - 2\pi K_2 r^2 + \mathcal{O}(r^3). \end{aligned}$$

Аналогично,  $\alpha_1 = 4\pi - 2\pi K_1 r^2 + \mathcal{O}(r^3)$ . Поскольку  $K_1 \neq K_2$ , таким способом  $B_2$  можно повернуть относительно  $B_1$  вокруг  $e_z$  на любой малый угол  $\alpha$ . Что и требовалось. ■

## 4. Качение без верчения в случае сферического контакта

### 4.1. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим теперь некоторые вопросы динамики при качении без проскальзывания и верчения. Мы рассмотрим один из самых простых случаев, когда опорная поверхность  $S$  — сфера, по которой катится тело  $B$ , также ограниченное сферической поверхностью [5, 15]. При этом возможны три варианта обката, изображенные на рисунке 1. Геометрическим центром тела  $O_B$  назовем центр сферической оболочки тела в случаях на рисунках 1a, b и геометрический центр полости в случае на рисунке 1c. Конфигурационное пространство системы  $\mathcal{M} = S^2 \times SO(3)$ , где первый сомножитель отвечает возможному положению центра  $O_B$ , а второй — ориентации тела.

Выберем жестко связанную с подвижным телом систему координат  $Sxyz$  с началом в центре масс тела; в дальнейшем все векторы предполагаются заданными в этих осях. Определим единичный вектор нормали в точке контакта  $\mathbf{n}$ , направленный в сторону катящегося тела, и задающую ориентацию тела ортогональную матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

в которой по столбцам стоят координаты неподвижных ортов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  в подвижных осях. Пара  $(\mathbf{n}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{M}$  полностью определяет положение системы.

Радиусы кривизны с учетом знака для неподвижной поверхности  $S$  и границы тела  $\partial B$  обозначим, соответственно,  $a$  и  $b$  (см. рис. 1). Вектор из геометрического центра  $O_B$  в центр масс  $C$  тела обозначим  $\mathbf{c}$  (он постоянный в выбранной системе координат), а  $\mathbf{r}$  — вектор из центра масс в точку контакта. Пусть  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{v}$  — угловая скорость и скорость центра масс  $C$  тела, тогда условия отсутствия проскальзывания и верчения представляются в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{r} = -b\mathbf{n} - \mathbf{c}, \quad (4.1)$$

где нужно учитывать, что  $b > 0$  для обката на рисунке 1a, b и  $b < 0$  для рисунка 1c.

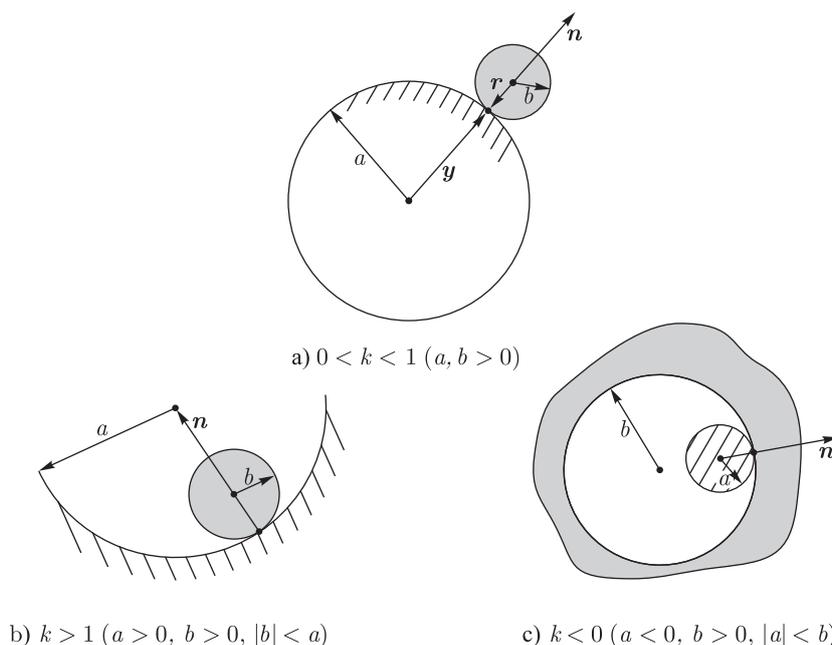


Рис. 1.

Уравнения движения этой системы могут быть получены при помощи метода неопределенных множителей (см., например, работу [5]), они имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \lambda\mathbf{n} + \mathbf{M}_Q, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{Q}, \\ \tilde{\mathbf{I}} &= \mathbf{I} + m\mathbf{r}^2\mathbf{E} - m\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}, \quad k = \frac{a}{a+b}, \quad \lambda = -\frac{(\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{M}_Q, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{n})}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{I}$ ,  $m$  — тензор инерции и масса тела,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица,  $\mathbf{M}_Q$  — момент внешних сил относительно точки контакта,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  — кососимметричная матрица угловой скорости, компоненты которой задаются соотношением  $\tilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijl}\omega_l$ , величина и знак  $k$  зависят от варианта обката и указаны на рисунке 1.

Как было показано выше, в случае когда шар катится по шару того же радиуса, то есть при  $k = 1/2$ , система связей (4.1) становится голономной. Это приводит к тому, что система (4.2) допускает геометрические интегралы, которые удобно представить в матричной форме

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_n\mathbf{Q} = \text{const}, \quad \mathbf{S}_n = \mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{B}$  — ортогональная матрица,  $\mathbf{S}_n$  — симметрия относительно плоскости, ортогональной  $\mathbf{n}$ . Данные интегралы позволяют представить систему в лагранжевой и гамильтоновой форме на  $S^2$  без замены времени (см. ниже).

Будем полагать, что внешние силы потенциальны с потенциалом  $U(\mathbf{n})$ , зависящим только от вектора  $\mathbf{n}$ , тогда уравнения для векторов  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{n}$  отделяются. Перепишем их в более удобной для дальнейшего анализа форме; для этого, используя равенства  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}) = 0$ , получим соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} &= (\mathbf{J} + \Lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\omega} - mb(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{c})\mathbf{n}, \quad \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{J} + \Lambda\mathbf{E})\dot{\boldsymbol{\omega}} - mb(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{c})\mathbf{n}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{I} + m(b^2 + c^2)\mathbf{E} - m\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad \Lambda = 2mb(\mathbf{c}, \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Пользуясь ими, представим уравнения движения для векторов  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{n}$  в форме

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - \frac{mb}{k}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{c})\dot{\mathbf{n}} - mbc \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) + \tilde{\lambda}\mathbf{n} + k\mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \tilde{\lambda} &= -\frac{(\tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{mb}{k}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{c})\dot{\mathbf{n}} - mbc \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) + k\mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}})}{(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{n})}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + \Lambda\mathbf{E}$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что оси системы координат *Sxyz* направлены вдоль собственных векторов матрицы  $\mathbf{J}$ , то есть  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ .

Эти уравнения аналогичны уравнениям Эйлера–Пуассона в динамике твердого тела с неподвижной точкой. В дальнейшем (если не оговорено иное) мы будем обсуждать свойства только этой шестимерной приведенной системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если в случаях на рисунке 1а, б устремить радиус неподвижной сферы  $S$  к бесконечности ( $a \rightarrow \infty$ ), то в пределе получим качение шара по плоскости ( $k = 1$ ).

Система (4.3) допускает два общих первых интеграла

$$F_0 = \mathbf{n}^2, \quad F_1 = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}), \quad (4.4)$$

физические значения которых равны  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 0$ . На уровне  $F_1 = 0$  существует также интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{n}). \quad (4.5)$$

Ограничим уравнения (4.3) на многообразии

$$\mathcal{M}^4 = \{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \mid \mathbf{n}^2 = 1, (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0\}, \quad (4.6)$$

которое диффеоморфно  $TS^2$ , и получим четырехмерную систему, обладающую интегралом энергии (4.5). Ее свойства существенно зависят допускаются ли какие-либо дополнительные (тензорные) инварианты [6, 10, 11]. В данном случае это могут быть дополнительный первый интеграл и инвариантная мера; система, обладающая ими, является конформно-гамильтоновой и интегрируемой по теореме Эйлера–Якоби, а следовательно, ее поведение регулярно (см. подробнее [4]). Но если отсутствует мера, то при наличии интеграла поведение также является регулярным [1]. Если мера существует, то динамика системы сводится к двумерным сохраняющим площадь отображениям. Если пропадают одновременно и мера, и интеграл, то в фазовом пространстве системы могут возникать аттракторы (в том числе и странные), характерные для диссипативных систем.

## 4.2. Уравнения движения в форме Чаплыгина

Запишем уравнения (4.3) в локальных переменных на сфере  $\mathbf{n}^2 = 1$ . Для этого выберем сферические координаты

$$n_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad n_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad n_3 = \cos \theta$$

и выразим угловую скорость на уровне  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$ :

$$k\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n} = (\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \sin \varphi, -\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi, \dot{\varphi} \sin^2 \theta).$$

Определим соответствующую функцию Лагранжа:

$$L = T(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) - U(\theta, \varphi),$$

$$T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2k^2} \left( J_1(\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \sin \varphi)^2 + J_2(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi)^2 + \right. \\ \left. + J_3 \sin^4 \theta \dot{\varphi}^2 + \Lambda(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \right),$$

$$\Lambda = 2mb(\mathbf{n}, \mathbf{c}) = 2mb(c_1 \sin \theta \sin \varphi + c_2 \sin \theta \cos \varphi + c_3 \cos \theta).$$

Дифференцируя в силу системы (4.3), можно показать, что уравнения движения представляются в форме системы Чаплыгина

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\theta} S, \quad \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\dot{\varphi} S,$$

$$S = \frac{1-2k}{2k^3} \sin \theta \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \sin \theta \dot{\varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \dot{\theta} \right),$$

$$G = (\mathbf{n}, \mathbf{J}, \mathbf{n}) - \Lambda = (J_1 \sin^2 \varphi + J_2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + J_3 \cos^2 \theta - \\ - 2mb((c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi) \sin \theta + c_3 \cos \theta).$$

Таким образом, как было сказано выше, при  $k = 1/2$  и произвольном  $\mathbf{c}$  система представляется в лагранжевой (а следовательно, и в гамильтоновой) форме.

**Гамильтоновость при  $k = 1/2$ .** Воспользовавшись формулами для углового момента материальной точки на поверхности сферы

$$M_1 = -p_\varphi \frac{\sin \varphi \cos \theta}{\sin \theta} + p_\theta \cos \varphi, \quad M_2 = -p_\varphi \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\sin \theta} - p_\theta \sin \varphi, \quad M_3 = -p_\varphi, \quad (4.7)$$

где  $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ ,  $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ , получим

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}).$$

Это позволяет представить уравнения движения в гамильтоновой форме на (ко)алгебре (4.4)

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{n} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}},$$

где скобки Пуассона задаются соотношениями

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, n_j\} = \varepsilon_{ijk} n_k, \quad \{n_i, n_j\} = 0,$$

а гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{8\rho} ((\text{Tr } \mathbf{J} - (\mathbf{n}, \mathbf{J}\mathbf{n}) + \Lambda) \mathbf{M}^2 - (\mathbf{M}, \mathbf{J}\mathbf{M})), \quad \rho = \det \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{n}).$$

**Конформная гамильтоновость при  $c = 0$ .** В этом случае  $\Lambda = 0$  и вследствие существования инвариантной меры согласно теореме Чаплыгина [8] (см. подробнее [6]), система представляется в конформно-гамильтоновой форме (то есть является гамильтоновой после замены времени). Пользуясь (4.7), находим

$$M = \frac{\rho_0^{-1+\frac{1}{2k}}}{k} \mathbf{n} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}), \quad \rho_0 = \det \mathbf{J}(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}).$$

При этом

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \rho_0^{-1+\frac{1}{2k}} \left( M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \mathbf{n} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} \right), \quad \dot{\mathbf{n}} = \rho_0^{-1+\frac{1}{2k}} \mathbf{n} \times \frac{\partial H}{\partial M}, \\ H &= \frac{k^2}{2\rho_0^{-1+\frac{1}{k}}} \left( (\text{Tr } \mathbf{J} - (\mathbf{n}, \mathbf{J}\mathbf{n})) M^2 - (M, \mathbf{J}M) \right). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [6] система (4.3) при  $c = 0$  также была представлена в конформно-гамильтоновой форме, которая отличается от указанной здесь.

## 5. Приложение. Доказательство вспомогательных утверждений

*Доказательство леммы 1.* Согласно предложению 4, геодезические кривизны кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в соответствующих точках совпадают и, ввиду леммы 2, равны

$$r_2^{-1}(1 - K_2 r_2^2/3 + \mathcal{O}(r_2^3)).$$

Это означает, что  $\gamma_1$  с точностью до  $\mathcal{O}(r_2^4)$  является дугой окружности  $c_1 = c_1(Q_1, r_1, \mathbf{e}_1) \subset S_1$ , где  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{R}_p \mathbf{e}_2$  и  $r_1$  удовлетворяет уравнению

$$r_1^{-1}(1 - K_1 r_1^2/3 + \mathcal{O}(r_1^3)) = r_2^{-1}(1 - K_2 r_2^2/3 + \mathcal{O}(r_2^3)). \quad (5.1)$$

Здесь  $K_1$  — гауссова кривизна в точке  $Q_1$ . Из уравнения (5.1) находим:

$$r_1 = r_2 + r_2^3(K_2 - K_1)/3 + \mathcal{O}(r_2^4).$$

Длина дуги совпадает с длиной окружности  $c_2$ , где, согласно (2.4),  $|c_2| = 2\pi r_2(1 - K_2 r_2^2/6 + \mathcal{O}(r_2^3))$ . Аналогично, длина окружности  $c_1$  равна

$$|c_1| = 2\pi r_1(1 - K_1 r_1^2/6 + \mathcal{O}(r_1^3)) = |c_2| + \pi r_2^3(K_2 - K_1) + \mathcal{O}(r_2^4).$$

Отсюда вытекает (2.2). ■

*Доказательство леммы 2.* Существуют локальные координаты  $(x, y)$  на  $S_2$ , такие, что центр  $O_2$  окружности  $c_2$  имеет координаты  $(0, 0)$  и метрика  $S_2$  имеет вид

$$ds^2 = (1 - K_2(x^2 + y^2)/2 + \mathcal{O}_3(x, y))(dx^2 + dy^2),$$

где  $\mathcal{O}_3(x, y)$  — члены по крайней мере третьего порядка малости по  $x, y$ . Такие координаты  $x, y$  несложно получить из изотермических координат путем небольшой дополнительной нормализации.

Удобно перейти к полярным координатам  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ . Тогда

$$ds^2 = g_{11}d\rho^2 + 2g_{12}d\rho d\varphi + g_{22}d\varphi^2 = (1 - K_2\rho^2/2 + \mathcal{O}(\rho^3))(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2).$$

Символы Кристоффеля имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -K_2\rho + \mathcal{O}(\rho^2), & \Gamma_{12}^1 &= \mathcal{O}(\rho^3), & \Gamma_{22}^1 &= -\rho(1 - K_2\rho^2/2 + \mathcal{O}(\rho^3)), \\ \Gamma_{11}^2 &= \mathcal{O}(\rho), & \Gamma_{12}^2 &= \rho^{-1}(1 - K_2\rho^2/2 + \mathcal{O}(\rho^3)), & \Gamma_{22}^2 &= \mathcal{O}(\rho^3). \end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что геодезические, проходящие через точку  $(0, 0)$ , задаются уравнением  $\varphi = \varphi_0 + \mathcal{O}(\rho^3)$ . Поэтому

$$c_2 = \{(\rho, \varphi) : \rho - K_2\rho^3/12 + \mathcal{O}(\rho^4) = r\}.$$

Равенство (2.4) следует из соотношения

$$\rho = r + K_2r^3/12 + \mathcal{O}(r^4).$$

Чтобы вычислить геодезическую кривизну кривой  $\rho(s), \varphi(s)$ , воспользуемся формулой Бельтрами

$$\begin{aligned} k &= \Lambda \left[ \Gamma_{11}^2 \rho'^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \rho'^2 \varphi' + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \rho' \varphi'^2 - \Gamma_{22}^1 \varphi'^3 + \rho' \varphi'' - \rho'' \varphi' \right], \\ \Lambda &= (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{1/2} (g_{11}\rho'^2 + 2g_{12}\rho'\varphi' + g_{22}\varphi'^2)^{-3/2}, \end{aligned}$$

где штрих — производная по  $s$ . Параметризуя  $\gamma_2$  углом  $\varphi$ , получаем (2.3). ■

## Список литературы

- [1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение без верчения шара по плоскости: отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 3, с. 605–616.
- [2] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307. *См. также:* Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем // *Сиб. матем. журн.*, 2007, т. 48, № 1, с. 33–45.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854. *См. также:* Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение неоднородного шара по сфере без верчения и кручения // *Нелинейная динамика*, 2006, т. 2, № 4, с. 445–452. *См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.



- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280. *См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [7] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // *Геометрия, дифференциальные уравнения и механика: Сб. ст. / В. В. Козлов, А. Т. Фоменко (ред.). М.: МГУ, 1986. С. 64–68.*
- [8] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // *Матем. сб.*, 1912, т. 28, № 2, с. 303–314.
- [9] Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. An intrinsic approach to the control of rolling bodies // *Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control (Phoenix, AZ, Dec 1999): Vol. 1*, pp. 431–435.
- [10] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling of rigid body on a plane and sphere: Hierarchy of dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2003, vol. 7, no. 1, pp. 177–200.
- [11] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Rolling of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2003, vol. 7, no. 1, pp. 201–220.
- [12] Ehlers K., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of 2-3-5 distributions // *Proc. IUTAM Symp. on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, 25–30 August, 2006)*, pp. 469–480.
- [13] Hadamard J. Sur les mouvements de roulement // *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4 sér., 1895, pp. 397–417.
- [14] Beghin H. Sur les conditions d'application des équations de Lagrange à un système non holonome // *Bulletin de la S. M. F.*, 1929, vol. 57, pp. 118–124.
- [15] Koiler J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.
- [16] Levi M. Geometric phases in the motion of rigid bodies // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1993, vol. 122, pp. 213–229.
- [17] Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint // *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 1990, vol. 6, no. 1, pp. 62–72.
- [18] Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: The holonomic case // *Differential geometry and control (Boulder, CO, 1997) / G. Ferreyra, R. Gardner, H. Hermes, H. Sussmann (Eds.). (Proc. Sympos. Pure Math., vol. 64.) Providence, RI: AMS, 1999. P. 241–256.*
- [19] Bicchi A., Prattichizzo D., Sastry Sh. S. Planning motions of rolling surfaces // *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control (New Orleans, LA, 13–15 Dec, 1995): Vol. 3*, pp. 2812–2817.
- [20] Walsh J. A. The dynamics of circle homeomorphisms: A hands-on introduction // *Math. Mag.*, 1999, vol. 72, no. 1, pp. 3–13.

## Rolling of a rigid body without slipping and spinning: kinematics and dynamics

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>2</sup>, Dmitrii V. Treshev<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Computer Science;

Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS

Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

<sup>3</sup> Steklov Mathematical Institute

Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia



Lomonosov Moscow State University  
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia  
<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>mamaev@rcd.ru, <sup>3</sup>treschev@mi.ras.ru

In this paper we investigate various kinematic properties of rolling of one rigid body on another both for the classical model of rolling without slipping (the velocities of bodies at the point of contact coincide) and for the model of rubber-rolling (with the additional condition that the spinning of the bodies relative to each other be excluded). Furthermore, in the case where both bodies are bounded by spherical surfaces and one of them is fixed, the equations of motion for a moving ball are represented in the form of the Chaplygin system. When the center of mass of the moving ball coincides with its geometric center, the equations of motion are represented in conformally Hamiltonian form, and in the case where the radii of the moving and fixed spheres coincides, they are written in Hamiltonian form.

MSC 2010: 37J60, 37J35

Keywords: rolling without slipping, nonholonomic constraint, Chaplygin system, conformally Hamiltonian system

Received September 6, 2012, accepted November 28, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 783–797 (Russian)