



УДК: 537.86/.87:530.182
MSC 2010: 34D06

Когерентный резонанс и синхронизация стохастических автоколебаний в генераторе с жестким возбуждением

А. В. Феоктистов, В. С. Анищенко

В радиофизическом эксперименте исследуется явление когерентного резонанса в генераторе с жестким возбуждением, а также синхронизация индуцированных шумом колебаний. Построены области синхронизации на плоскости параметров «амплитуда – частота внешнего воздействия». Проведено исследование синхронизации в системе с двумя предельными циклами в отсутствие шума.

Ключевые слова: когерентный резонанс, синхронизация, индуцированные шумом колебания, генератор с жестким возбуждением

Введение

Некоторые возбудимые системы можно представить как два устойчивые состояния равновесия, разделенные неустойчивым (седловым). Фазовая точка в таких системах пребывает в одном из устойчивых состояний. Внешнее воздействие заставляет седловую точку двигаться [1]. Представим, что фазовая точка находится в первом устойчивом состоянии равновесия, а седловая точка находится примерно посередине между первым и вторым устойчивыми состояниями. Внешнее воздействие таково, что седловая точка движется в направлении к первому устойчивому состоянию равновесия и сливается с ним (медленное движение фазовой точки в фазовом пространстве). Состояние равновесия становится неустойчивым, и фазовая точка перескакивает (быстрое движение) на второе устойчивое состояние равновесия. Поскольку координаты фазовой точки изменились, в работу включается медленная переменная системы, под действием которой, в результате седло-узловой бифуркации, снова появляются первая устойчивая точка и седло, а затем седло начинает

Получено 6 сентября 2012 года
После доработки 23 октября 2012 года

Феоктистов Алексей Владимирович
feoktistov_a_v@mail.ru
Анищенко Вадим Семенович
wadim@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83



двигаться ко второму устойчивому состоянию равновесия и влипают в него. Второе устойчивое состояние равновесия теряет устойчивость. Фазовая точка снова перескакивает на первое устойчивое состояние равновесия и находится там, пока снова не придет импульс внешнего воздействия. Расстояние между первым устойчивым состоянием и седловой точкой определяет порог колебаний. Фазовая точка совершает такой обход по большому циклу только в случае превышения внешним воздействием порогового уровня. В противном случае она лишь немного отходит от устойчивого состояния и снова возвращается на него, не совершая полного цикла.

Теперь рассмотрим структуру фазового пространства генератора с жестким возбуждением. Далее будем его называть системой с двумя предельными циклами. Для некоторых значений параметров его фазовое пространство содержит устойчивый фокус в начале координат, устойчивый предельный цикл и неустойчивый (седловой) предельный цикл, разделяющий два устойчивых режима. Такая структура схожа со структурой возбудимой системы, но в отличие от последней не обладает медленной (возвращающей) переменной. Пусть фазовая точка находится на устойчивом фокусе. Подадим на систему внешний импульс; если он окажется больше расстояния до неустойчивого цикла (пороговое значение), то фазовая точка «перепрыгнет» на устойчивый предельный цикл и будет там находиться. Поскольку система не обладает возвращающей переменной, то фазовая точка будет пребывать на устойчивом цикле, пока новое внешнее воздействие, по величине большее расстояния между устойчивым и неустойчивым циклами, не перекинет ее обратно.

Известно, что в возбудимых системах наблюдается такой стохастический эффект, как когерентный резонанс [2–7]. Он проявляется в существовании оптимального уровня шума, при котором индуцированные шумом колебания в системе наиболее когерентны, то есть спектральная линия, отвечающая этим колебаниям, наиболее узка. Другими словами, кривая зависимости степени когерентности колебаний от интенсивности шума имеет резонансный вид. Если характеристики шума таковы, что любые значения его интенсивности имеют ненулевую вероятность, то в системе с двумя предельными циклами должен наблюдаться эффект когерентного резонанса. И действительно, в системах с жестким возбуждением наблюдается когерентный резонанс. В работе [8] проводилось сравнение между когерентными резонансами в системах с суперкритической и субкритической бифуркациями Андронова–Хопфа и было установлено, что в случае субкритической бифуркации (жесткое возбуждение) когерентный резонанс является истинным. Вопросы, связанные с когерентным резонансом в подобных системах, возникают в полупроводниковых лазерах [8]. В [9] исследуется индуцированный шумом флуктуационный пик в спектре нелинейного осциллятора с малым трением. Индуцированное когерентное движение наблюдалось также в модели автогенератора вблизи седло-узловой бифуркации [10–13].

Характерной чертой индуцированных шумом колебаний в возбудимых системах является возможность их синхронизации [4, 7, 14–17]. Если продолжить аналогию с возбудимыми системами, встает вопрос о синхронизации стохастических колебаний в системе с двумя предельными циклами. Данная работа посвящена экспериментальному исследованию синхронизации стохастических колебаний и когерентного резонанса в генераторе с жестким возбуждением, а также выявлению особенностей этих явлений. Вопрос о синхронизации колебаний в системе с двумя предельными циклами в режиме когерентного резонанса рассматривается впервые.

Анализ колебаний генератора с жестким возбуждением в режиме когерентного резонанса приводит нас к вопросу о его синхронизации внешним периодическим сигналом в отсутствие шума. Как оказалось, до работы [18] эта тема практически не изучалась. Автора-

ми [18] был проведен анализ укороченного уравнения Ван дер Поля–Дуффинга, который показал, что синхронизация в системе может происходить как на устойчивых, так и на неустойчивых циклах. Соответственно, на плоскости параметров «нормированная амплитуда – частота воздействия» имеются две области синхронизации, а также области, в которых сосуществуют устойчивый и неустойчивый циклы.

В настоящей работе также проведено экспериментальное исследование синхронизации в системе с двумя предельными циклами в отсутствие внешнего шумового воздействия.

1. Исследуемая система

Рассмотрим уравнение (1.1), которое описывает генератор с жестким возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0. \tag{1.1}$$

Параметр λ определяет подкачку энергии в систему, коэффициенты перед вторым и третьим слагаемыми в скобках определяют диссипацию энергии в системе. Ради упрощения параметрического анализа, коэффициент перед третьим слагаемым в скобках был выбран равным единице, поэтому диссипацию энергии теперь определяет только коэффициент μ перед вторым слагаемым, выступающий в роли второго параметра.

Зафиксируем параметр $\mu = 0.5$ и, варьируя параметр λ , построим бифуркационную диаграмму (рис. 1).

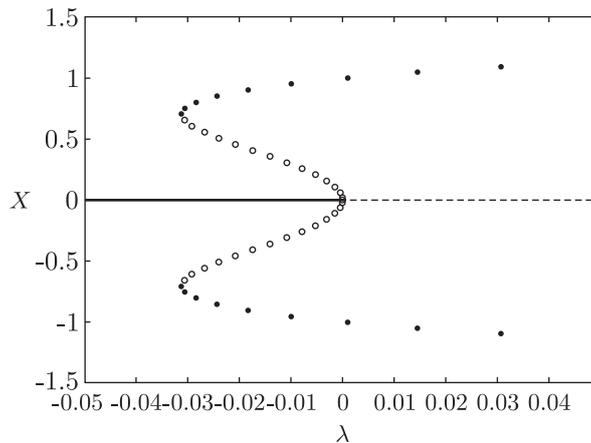


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1.1) для значения параметра $\mu = 0.5$. Черными кружками обозначена координата устойчивого предельного цикла, белыми кружками — координата неустойчивого предельного цикла, толстой сплошной линией — устойчивое состояние равновесия, а тонкой прерывистой линией — неустойчивое состояние равновесия.

При значении параметра λ меньше -0.03125 в фазовом пространстве существует единственное состояние равновесия — устойчивый фокус. Области его существования отвечает толстая сплошная линия на рис. 1. В точке $\lambda = -0.03125$ происходит рождение устойчивого и неустойчивого предельных циклов. При дальнейшем увеличении значения λ амплитуда устойчивого цикла растет, а неустойчивого уменьшается. На диаграмме (рис. 1) сплошными кружками обозначена координата устойчивого предельного цикла, а пустыми кружками отмечена координата неустойчивого предельного цикла. В точке $\lambda = 0$ неустойчивый предельный цикл исчезает, вливаясь в устойчивый фокус в начале координат. Последний, в свою



очередь, теряет устойчивость и превращается в неустойчивый фокус. Таким образом, правее точки $\lambda = 0$ существует единственное устойчивое состояние равновесия, а именно — устойчивый предельный цикл.

2. Экспериментальная установка

Будем исследовать явления когерентного резонанса и синхронизации индуцированных шумом колебаний с помощью специально созданной экспериментальной установки. Ее электрическая схема, которая представляет собой генератор с жестким возбуждением с возможностью подключения внешнего периодического и шумового воздействия, показана на рисунке 2. Основными активными элементами являются операционные усилители *TL072* и *LF412*, а также умножители *AD633*. Умножители используются, чтобы сформировать нелинейности второй и четвертой степени. Остальные детали — это резисторы и конденсаторы. Управляющий параметр λ задается с помощью соответствующего напряжения, снимаемого с делителя напряжения, построенного на многооборотном резисторе, а параметр μ задается другим переменным резистором. Номиналы элементов указаны на схеме и соответствуют тем, что использовались в эксперименте.

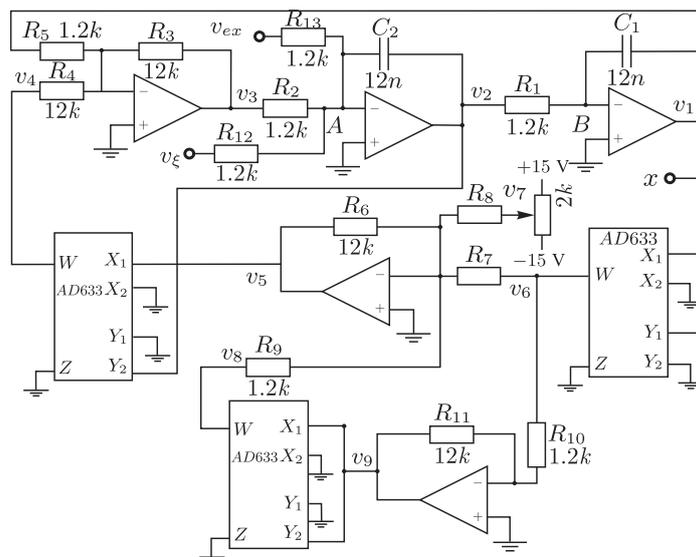


Рис. 2. Принципиальная электрическая схема экспериментальной установки.

С помощью уравнений Кирхгофа выведем уравнения для схемы на рисунке 2. Для этого на схеме нанесены дополнительные обозначения: два узла *A* и *B*, напряжения v_1 – v_9 , v_ξ , v_{ex} . Для узла *A* имеем:

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_3}{R_2} + \frac{v_\xi}{R_{12}} + \frac{v_{ex}}{R_{13}} = 0. \quad (2.1)$$

Для узла *B* имеем:

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_2}{R_1} = 0. \quad (2.2)$$

Выразим v_2 из уравнения (2.2) и подставим в (2.1). Получаем:

$$-R_1 C_1 C_2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{v_3}{R_2} + \frac{v_\xi}{R_{12}} + \frac{v_{ex}}{R_{13}} = 0. \quad (2.3)$$

Теперь остается только получить выражение для v_3 через v_1 :

$$\frac{v_3}{R_3} + \frac{v_4}{R_4} + \frac{v_1}{R_5} = 0, \quad (2.4)$$

$$v_4 = \frac{1}{10} v_5 (-v_2), \quad (2.5)$$

$$\frac{v_5}{R_6} + \frac{v_6}{R_7} + \frac{v_7}{R_8} + \frac{v_8}{R_9} = 0. \quad (2.6)$$

Сразу обозначим R_7 как R_μ , поскольку именно этим сопротивлением будет определяться параметр μ , а v_7 — как v_λ , которое будет задавать параметр λ :

$$v_6 = \frac{1}{10} v_1^2, \quad (2.7)$$

$$v_8 = -\frac{1}{10} v_9^2, \quad (2.8)$$

$$\frac{v_9}{R_{11}} + \frac{v_6}{R_{10}} = 0. \quad (2.9)$$

Выразив v_9 из (2.9), подставляем его в (2.6). Далее, воспользовавшись (2.9), (2.8), (2.7) и (2.6), получаем выражение для v_5 . Подставив полученное выражение для v_5 в (2.5), получаем выражение для v_4 , которое, в свою очередь, подставляем в (2.4). В результате выражение для v_3 имеет вид

$$v_3 = \left(\frac{R_3 R_6}{10 R_4} \right) \left[\frac{1}{10 R_\mu} v_1^2 + \frac{1}{R_8} v_\lambda - \frac{1}{1000 R_9} \left(\frac{R_{11}}{R_{10}} \right)^2 v_1^4 \right] R_1 C_1 \frac{dv_1}{dt} - \frac{R_3}{R_5} v_1. \quad (2.10)$$

Теперь (2.10) подставляем в (2.3) и получаем уравнение схемы (рис. 2):

$$-R_1 C_1 C_2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left(\frac{R_3 R_6}{10 R_4} R_2 \right) \left[\frac{1}{10 R_\mu} v_1^2 + \frac{1}{R_8} v_\lambda - \frac{1}{1000 R_9} \left(\frac{R_{11}}{R_{10}} \right)^2 v_1^4 \right] R_1 C_1 \frac{dv_1}{dt} - \frac{R_3}{R_5 R_2} v_1 + \frac{v_\xi}{R_{12}} + \frac{v_{ex}}{R_{13}} = 0. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) является уравнением схемы (рис. 2) для произвольно выбранных номиналов радиодеталей. Выберем значения сопротивлений такими, что $R_1 = R_2 = R_4 = R_9 = R_{10} = R_{12} = R_{13} = R$, а $C_1 = C_2 = C$ и $R_3 = R_6 = R_8 = R_{11} = R_5 = 10R$. Тогда уравнение (2.11) перепишется в виде

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{1}{RC} \left[v_\lambda + \frac{1}{k} v_1^2 - v_1^4 \right] \frac{v_1}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} v_1 - \frac{1}{(RC)^2} v_\xi - \frac{1}{(RC)^2} v_{ex} = 0, \quad (2.12)$$

где k — коэффициент, определяемый из соотношения $R_7 = kR$, $v_\xi = \sqrt{2D}\xi(t)$ — шумовое воздействие, $v_{ex} = A_{ex} \sin(f_{ex}t)$ — внешнее периодическое воздействие. Перейдем к безраз-

мерным переменным с помощью следующей замены:

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{1}{(RC)^2}, \\ \tau &= \omega_0 t, \\ v_1 &= x, \\ v_\lambda &= \lambda, \\ \frac{1}{k} &= \mu.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Тогда уравнение схемы принимает вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \left[\lambda + \mu x^2 - x^4 \right] \frac{x}{d\tau} + x = A_{ex} \sin(\tau/2\pi) + \sqrt{2D}\xi(\tau),\tag{2.14}$$

где параметр λ задается напряжением с делителя, один конец которого соединен с источником напряжения -15 вольт, а другой вывод соединен с $+15$ вольт. Напряжение выбрано двухполярным, чтобы параметр λ изменялся от отрицательных до положительных значений. Общий размах напряжения составляет 30 вольт, резистор 10 -оборотный, лимб на резисторе имеет шкалу в 10 оборотов и плюс каждый оборот разбит на 100 делений; таким образом, получаем шаг изменения параметра λ , равный 0.03 В на деление. Такой шаг является слишком большим, поскольку, судя по результатам, полученным численно (рис. 1), практически полностью перекрывает диапазон одновременного существования устойчивого и неустойчивого циклов. Уменьшить шаг возможно, увеличив значение резистора R_8 ; тогда λ будет определяться как $\frac{10}{R_8} v_\lambda$. При величине R_8 порядка 1 МОм шаг составляет 0.0003 . Хотя полученное уравнение (2.14) точно совпадает с уравнением (1.1), расчеты уравнений схемы строятся на некоторых предположениях о работе операционных усилителей, которые, строго говоря, являются приближенными, а все радиоэлементы, из которых построена схема, имеют свои допуски по точности номиналов; поэтому построим экспериментальную бифуркационную диаграмму и сравним ее с полученной численными методами. Такая диаграмма представлена на рисунке 3. Построение линий, соответствующих устойчивым состояниям равновесия, не вызывает сложностей. Построение линии, соответствующей неустойчивому предельному циклу, производилось следующим образом: первоначально параметр λ выбирался так, что в системе существовало только единственное состояние равновесия — устойчивый фокус. Затем параметр λ изменялся так, чтобы в системе существовало помимо устойчивого фокуса еще два предельных цикла. Поскольку мы первоначально находились на устойчивом фокусе, то в области бистабильности $-0.069 < \lambda < -0.0479$ мы по-прежнему находились на этом же устойчивом фокусе. Затем на систему подавалось внешнее синусоидальное воздействие с низкой частотой. Начиная с некоторой величины амплитуды внешнего воздействия, фазовая точка перескакивает с устойчивого фокуса на устойчивый предельный цикл. Эту величину амплитуды внешнего воздействия мы и считаем примерно равной амплитуде неустойчивого предельного цикла в системе. Видно, что диаграммы на рисунке 3 и на рисунке 1 качественно эквивалентны. Теперь проведем количественные соответствия. В численных экспериментах рождение устойчивого и неустойчивого предельных циклов происходит при $\lambda = -0.03125$, а слияние неустойчивого предельного цикла с устойчивым фокусом — при значении $\lambda = 0$. В радиофизическом эксперименте тем же событиям

отвечают значения параметра $\lambda = -0.069$ и $\lambda = -0.0479$ соответственно. Таким образом, формула, связывающая численные и экспериментальные значения λ , имеет вид

$$\lambda_{num} = 1.48(\lambda_{exp} + 0.0479), \tag{2.15}$$

где λ_{num} — значение параметра, полученное в численном эксперименте, λ_{exp} — значение параметра, полученное в радиофизическом эксперименте.

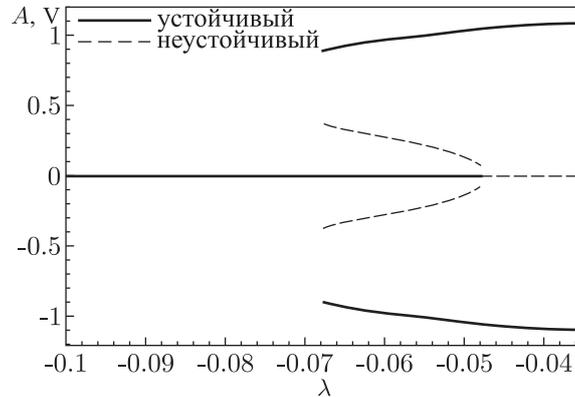


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма, полученная в эксперименте.

3. Когерентный резонанс в генераторе с жестким возбуждением

Подадим на схему (рис. 2) белый гауссов шум. Уравнения такой системы:

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = \sqrt{2D}\xi(t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим индуцированные шумом стохастические колебания в системе (3.1). С этой целью будем регистрировать спектр мощности колебаний $S(f)$ напряжения x при вариации среднеквадратичного напряжения шумовой накачки D . На рисунке 4 представлены экспериментальные результаты эволюции спектра $S(f)$ с ростом интенсивности шума D . В отсутствие шума в спектре существует широкий пик, который отвечает осцилляциям около устойчивого фокуса, за счет внутренних шумов схемы. Как видно из рисунка 4, с ростом интенсивности шума вначале возбуждаются стохастические колебания с достаточно широким спектром (рис. 4а), причем на значительном интервале значений интенсивности шума, изменения в спектре незначительны и мало чем отличаются от первоначального спектра колебаний около устойчивого фокуса. Далее формируется достаточно резкий пик в спектре колебаний (рис. 4б). Это связано с тем, что фазовая точка перешла из бассейна притяжения устойчивого фокуса в бассейн притяжения устойчивого предельного цикла и подолгу пребывает на цикле, поскольку интенсивность шума сравнима с размерами бассейна притяжения. В отличие от когерентного резонанса в возбудимых системах, где выраженный пик в спектре колебаний имеет единственный оптимальный уровень шума, при котором спектральная линия имеет минимальную ширину, в данной системе таких значений несколько. Последующее увеличение интенсивности шумовой накачки приводит к расширению спектральной линии и уменьшению ее амплитуды (рис. 4с, д). Это связано с тем, что при большой интенсивности шума фазовая точка примерно одинаковое время пребывает как в окрестности



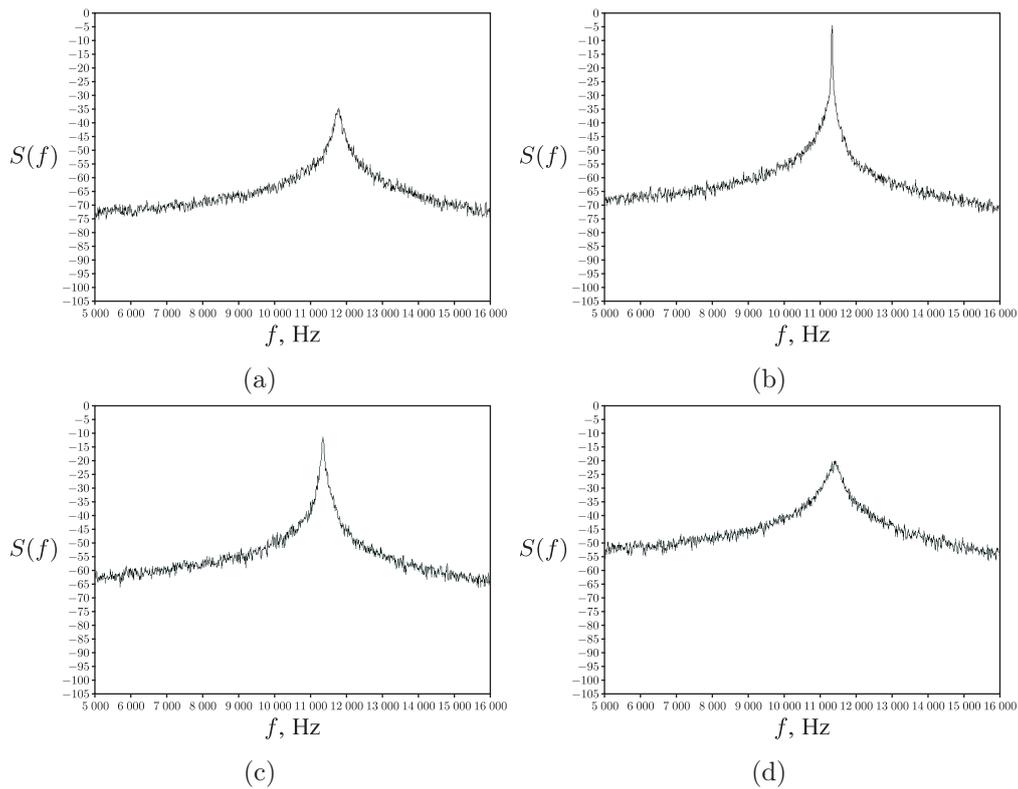


Рис. 4. Спектры мощности индуцированных шумом колебаний: (a) $D = 1\,000\text{ mV}$, (b) $D = 1\,481\text{ mV}$, (c) $D = 3\,000\text{ mV}$, (d) $D = 10\,000\text{ mV}$.

устойчивого предельного цикла, так и в окрестности устойчивого фокуса. Эффект когерентного резонанса иллюстрирует главным образом рисунок 5, который свидетельствует о наличии оптимального уровня шума, точнее целого набора оптимальных значений, при котором ширина спектра минимальна, и, следовательно, достигается наивысшая степень когерентности колебаний. На рисунке 6 для сравнения с данными эксперимента (рис. 4) представлены результаты численного исследования.

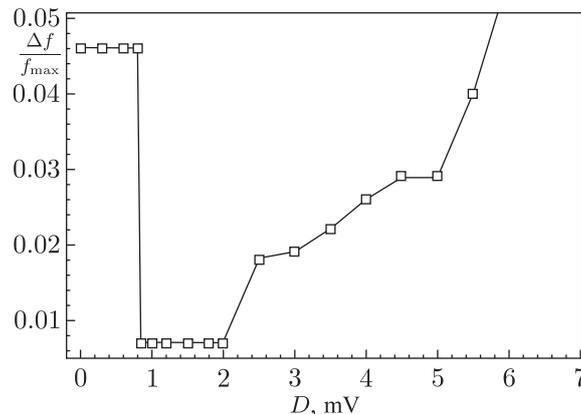


Рис. 5. Экспериментальная зависимость Δf к f от интенсивности шума D при $\lambda = -0.05775, \mu = 0.5$.

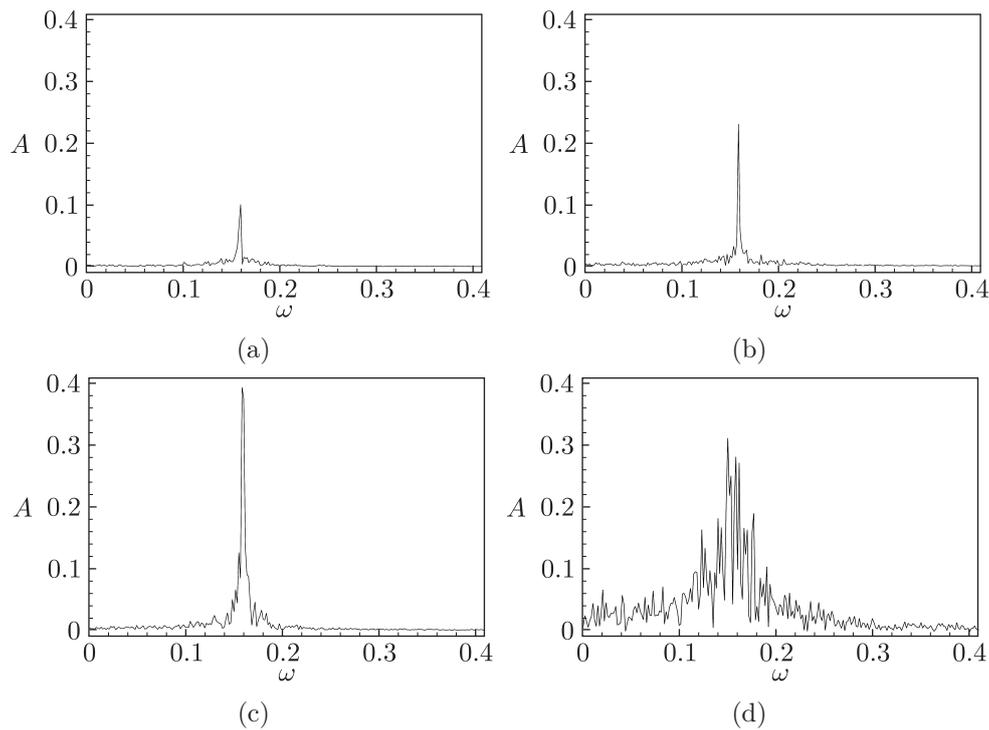


Рис. 6. Спектры мощности индуцированных шумом колебаний: (a) $D = 0.02$, (b) $D = 0.03$, (c) $D = 0.04$, (d) $D = 0.4$.

4. Синхронизация индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением в режиме когерентного резонанса

С целью синхронизации колебаний на схему (рис. 2) дополнительно к шумовой накачке подается внешний гармонический сигнал. Уровень шума соответствует режиму когерентного резонанса. Наблюдения производились по спектру мощности $S(f)$ и фазовому портрету при вариации амплитуды внешнего воздействия для постоянной величины расстройки по частоте $f_{ex} = f_0 \pm \Delta$ ($\Delta = 450$ Hz). Результаты представлены на рисунке 7, где отчетливо видно, как при $f_{ex} < f_0$ по мере роста амплитуды внешнего воздействия происходит смещение частоты собственных колебаний системы f_0 к частоте внешнего воздействия f_{ex} и последующий ее захват при амплитуде внешнего сигнала $A_{ex} = 0.69$ V. Выберем частоту внешнего воздействия $f_{ex} = 11\,800$ Hz. Расстройка остается такой же, как и в предыдущем случае, $\Delta = 450$ Hz, но спектральный пик внешнего воздействия находится уже правее пика собственных колебаний системы. Начнем увеличивать амплитуду внешнего воздействия и проследим за эволюцией спектра. Результаты представлены на рисунке 8. Вопреки ожиданиям, синхронизация происходит через подавление. И как бы ни была мала расстройка по частоте, в эксперименте не удалось обнаружить область захвата при $f_{ex} > f_0$. На рисунке 9 представлена область синхронизации на плоскости параметров «амплитуда–частота внешнего воздействия». Хотя внешне эта область и похожа на классический «язык» синхронизации, однако заход слева в эту область происходит через захват, а заход справа осуществляется через подавление, что принципиально отличается от классического случая,



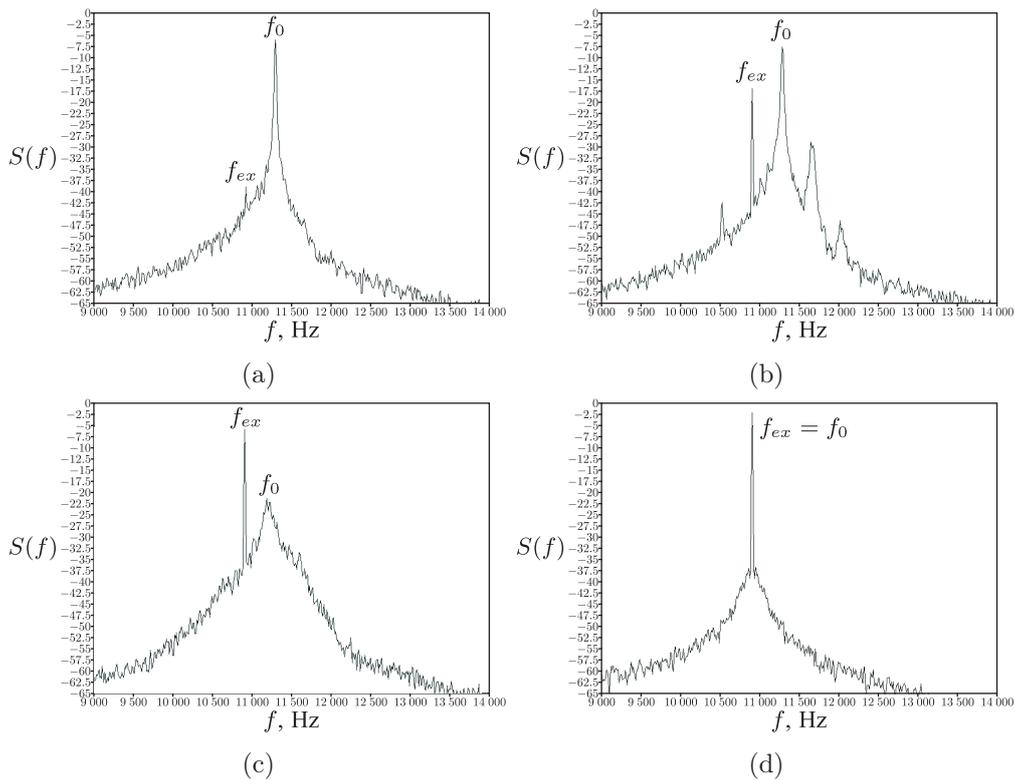


Рис. 7. Спектры мощности при синхронизации колебаний системы с частотой f_0 в режиме когерентного резонанса ($D = 1450$ mV) внешним сигналом $f_{ex} = 10900$ Hz при вариации амплитуды внешнего воздействия A_{ex} : (a) $A_{ex} = 0.01$ V, (b) $A_{ex} = 0.15$ V, (c) $A_{ex} = 0.60$ V, (d) $A_{ex} = 0.69$ V.

когда при малых амплитудах внешнего воздействия наблюдается симметричная область захвата частоты, а при больших амплитудах — подавление. Радиофизический эксперимент не позволяет нам исследовать, где конкретно внутри языка синхронизации заканчивается область синхронизации через захват и начинается область подавления. Можно только предположить, что граница вряд ли проходит точно через середину этой области. Поскольку такие особенности впервые наблюдаются в системе с жестким возбуждением, исследуем синхронизацию в такой системе в отсутствие шума, для таких же значений параметров, когда в фазовом пространстве системы наблюдаются устойчивый и неустойчивый предельные циклы.

5. Синхронизация в системе с двумя предельными циклами

Снова воспользуемся схемой (рис. 2). Только теперь шумовая накачка отсутствует, а на систему действует внешняя синусоидальная сила $A_{ex} \sin(f_{ex}t)$. Поскольку нас интересует режим, когда система (2.14) имеет три решения, а в фазовом пространстве наблюдаются устойчивый и неустойчивый предельные циклы, а также устойчивый фокус, зафиксируем параметр $\mu = 0.5$, а параметр λ будем брать из интервала $[-0.069, -0.0479]$.

Выберем $\lambda = -0.0627$. Если посмотреть на бифуркационную диаграмму (рис. 3), становится видно, что такому значению параметра соответствует режим, когда родившиеся устойчивый и неустойчивый предельные циклы имеют не сильно отличающиеся амплитуды и расположены рядом в фазовом пространстве. Исследуем синхронизацию устойчивого пре-

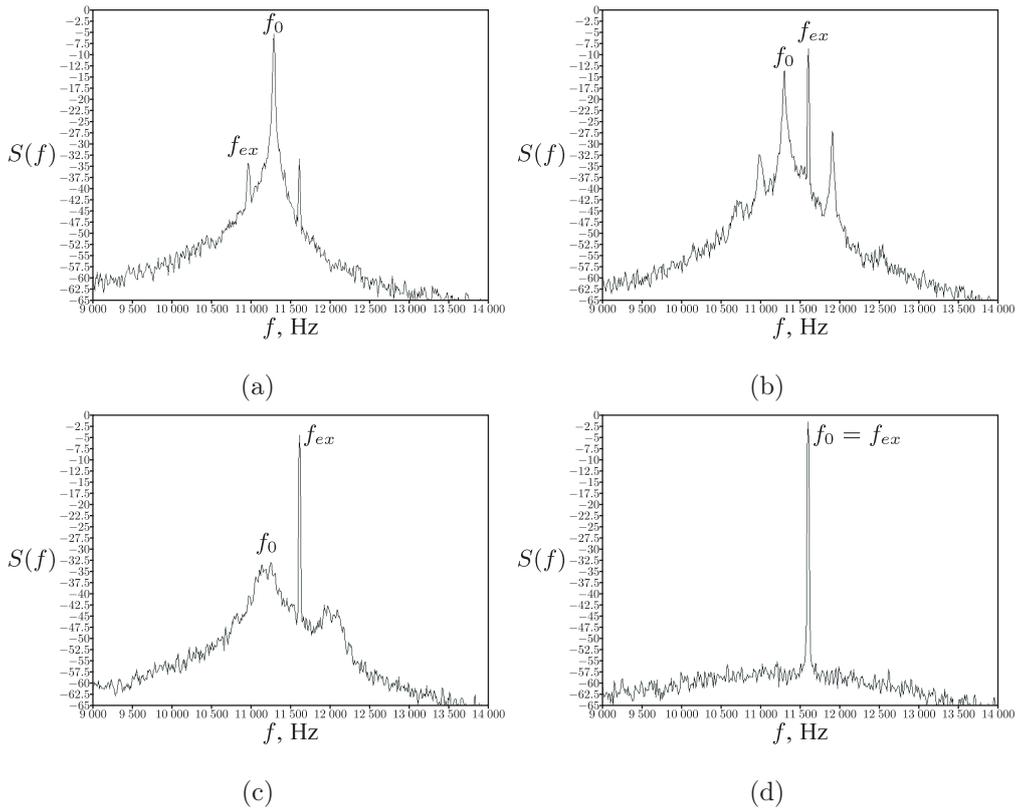


Рис. 8. Спектры мощности при синхронизации колебаний системы с частотой f_0 в режиме когерентного резонанса ($D = 1450$ mV) внешним сигналом $f_{ex} = 11800$ Hz при вариации амплитуды внешнего воздействия A_{ex} : (a) $A_{ex} = 0.05$ V, (b) $A_{ex} = 0.31$ V, (c) $A_{ex} = 0.51$ V, (d) $A_{ex} = 2.38$ V.

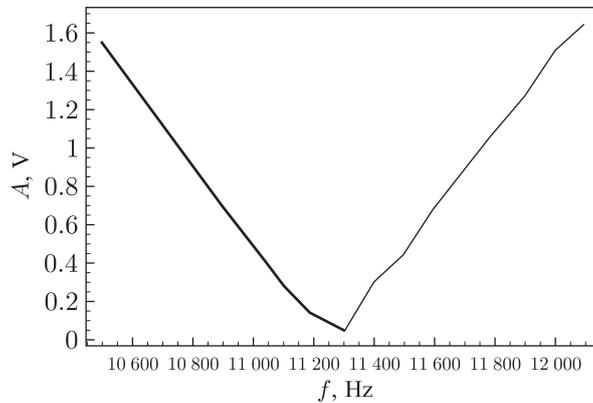


Рис. 9. Область синхронизации полученная в эксперименте для системы с жестким возбуждением в режиме когерентного резонанса. Жирная линия — заход в область синхронизации происходит через захват, узкая — через подавление.

дельного цикла в такой системе. Результаты представлены на рисунке 10а. Жирной линией выделена область синхронизации через захват, тонкой линией — через подавление. Отчетливо видно, что в отличие от классического случая, когда в фазовом пространстве нет неустойчивого предельного цикла, а фокус в начале координат неустойчив, область захвата искаже-

на и не симметрична. Пусть теперь параметр λ имеет значение, равное -0.0528 . Предельные

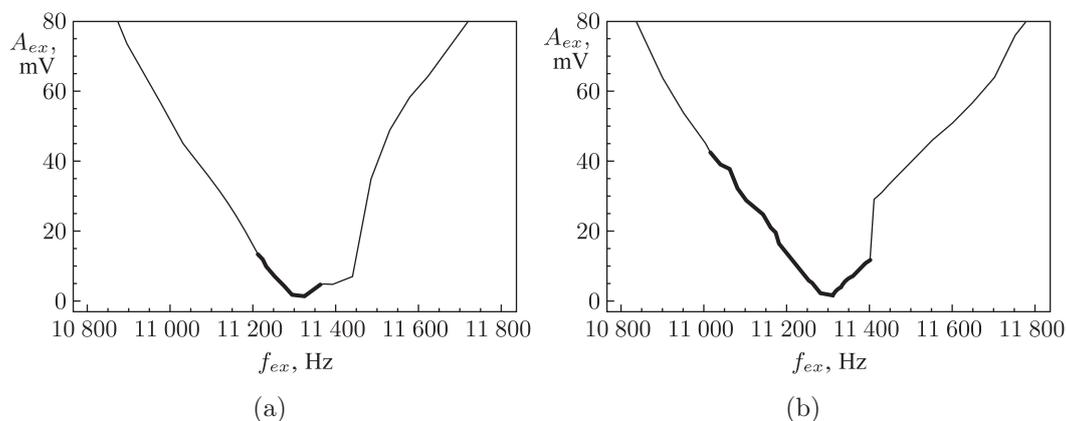


Рис. 10. Область синхронизации, полученная в эксперименте для системы (2.14): (а) $\mu = 0.5$ и $\lambda = -0.0627$, (б) $\mu = 0.5$ и $\lambda = -0.0528$.

циклы разошлись друг от друга в фазовом пространстве. Неустойчивый цикл приблизился к устойчивому фокусу. Амплитуда устойчивого цикла стала больше, а неустойчивого — меньше, чем для предыдущего значения λ . Получившаяся область синхронизации представлена на рисунке 10b. Как и прежде, жирная линия обозначает область синхронизации через захват, тонкая — через подавление. Сравнивая графики (рис. 10а и рис. 10b), легко заметить, что на последнем область синхронизации через захват значительно увеличилась, в то время как ее несимметричность осталась и еще более выражена. Такое поведение системы хорошо согласуется с теорией, разработанной в [18] для укороченных уравнений. Полученные результаты наводят на мысль, что между устойчивым и неустойчивым предельными циклами происходит взаимодействие, которое, при синхронизации, происходящей для обоих циклов одновременно, меняет структуру областей синхронизации, делая их ассиметричными. Отметим, что если выбрать параметр λ совсем близко к значению рождения (слияния, если двигаться в обратном направлении по параметру) циклов, то динамика системы сильно усложняется. На плоскости «частота – амплитуда внешнего воздействия» появляются области, в которых при увеличении амплитуды внешнего воздействия A_{ex} происходит слияние устойчивого и неустойчивого предельных циклов и исчезновение колебаний.

Известно, что неустойчивый (седловой) предельный цикл, сосуществующий с устойчивым циклом в системе (2.14), также можно синхронизовать [18]. Определим частоту неустойчивого предельного цикла, что позволит нам определить местоположение области синхронизации этого цикла. Как уже отмечалось выше, несмотря на то, что уравнения схемы в точности соответствуют уравнениям системы (1.1), получены они из определенных идеализированных представлений о работе операционных усилителей. Поэтому в работе схемы могут проявляться эффекты, которые мы не можем учесть в таком рассмотрении. Один из таких эффектов — неизохронность. Проявляется она в том, что при изменении амплитуды устойчивого предельного цикла происходит изменение его частоты. На рисунке 11 представлена зависимость частоты устойчивого предельного цикла от его амплитуды. Поскольку его амплитуда связана с параметром λ , то мы имеем также зависимость между частотой устойчивого цикла и параметром λ . Аппроксимация графика на рисунке 11 дает следующую функциональную зависимость:

$$f_0 = -1575.85A^2 + 2018.63A + 10798, \quad (5.1)$$

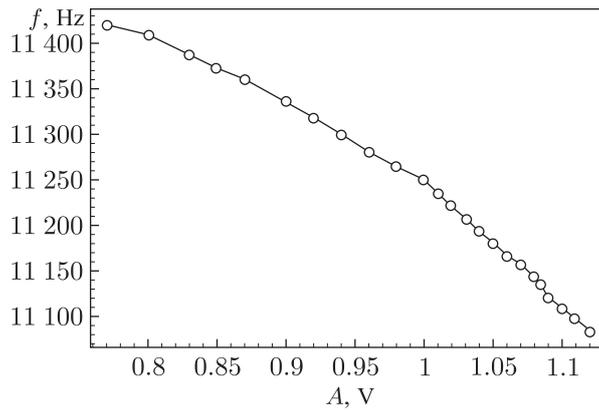


Рис. 11. Зависимость частоты колебаний на устойчивом предельном цикле от его амплитуды.

где f_0 — частота колебаний в герцах, соответствующая предельному циклу, A — амплитуда этого предельного цикла в вольтах. Предположив, что неизохронность для неустойчивого предельного цикла такая же, как и для устойчивого, воспользовавшись (5.1), можем определить частоту первого. Тогда для параметров $\mu = 0.5$, $\lambda = -0.0564$ имеем амплитуду, равную 0.995 В и частоту 11246.4 Гц для устойчивого предельного цикла и амплитуду 0.233 В, а частоту 11353.4 Гц для неустойчивого предельного цикла. Очевидно, что не обязательно делать точные подсчеты частот, поскольку видно (рис. 11), что с ростом амплитуды цикла его частота уменьшается. Нам также известно, что амплитуда неустойчивого предельного цикла максимальна в момент рождения и при дальнейшем движении по параметру λ только уменьшается, в отличие от устойчивого цикла. А это значит, что частота неустойчивого цикла будет всегда выше частоты устойчивого. Получаем, что область синхронизации неустойчивого цикла находится правее области синхронизации устойчивого цикла. Именно правая сторона области синхронизации устойчивого предельного цикла отличается от классического случая. Таким образом, взаимодействие между устойчивым и неустойчивым предельными циклами изменяет форму языков синхронизации. Результаты экспериментов показали, что в режиме когерентного резонанса в такой системе язык синхронизации еще более изменен, правая его часть не имеет области захвата, а только область подавления. Это позволяет сделать вывод, что шум в системе с двумя предельными циклами увеличивает взаимодействие между этими циклами.

6. Выводы

Результаты экспериментального исследования генератора с жестким возбуждением под действием внешнего шумового воздействия подтвердили результаты исследований численными методами — в такой системе наблюдается когерентный резонанс. Выявлены новые особенности этого явления — существование целого набора оптимальных значений интенсивности шума, которые образуют «полку» на графике зависимости степени когерентности от интенсивности шума.

Исследование синхронизации индуцированных шумом колебаний в системе с двумя предельными циклами не только показало существование возможности синхронизовать такие колебания, но и продемонстрировало отличие областей синхронизации на плоскости параметров «амплитуда–частота внешнего воздействия» от классического случая с одним



предельным циклом в системе. Области синхронизации ассимметричны. Для небольших значений расстройки по частоте при $f_{ex} < f_0$ наблюдается захват частоты, как и предсказывает классическая теория, а для значений $f_{ex} > f_0$ области синхронизации через захват либо не существует, либо она настолько мала, что в эксперименте мы ее не можем наблюдать, а синхронизация происходит через подавление, что отличается от классической теории. Эксперименты по синхронизации в системе с двумя предельными циклами в отсутствие шума также показали, что области синхронизации ассимметричны и отличаются как от классических, так и от тех, что построены для системы в режиме когерентного резонанса, то есть при наличии шума. Но, в отличие от последних, при $f_{ex} > f_0$ область синхронизации через захват существует, но в разы меньше, чем та же область для $f_{ex} < f_0$. Особенности областей синхронизации на плоскости параметров «амплитуда–частота внешнего воздействия», а также изменение этих областей при изменении расстояния между циклами для системы с двумя предельными циклами в отсутствие шума хорошо объясняются теорией, разработанной в [18] для укороченных уравнений системы Ван дер Поля – Дуффинга.

Список литературы

- [1] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.*, 1961, vol. 1, pp. 445–466.
- [2] Pikovsky A. S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, pp. 775–778.
- [3] DeVille R. E. L., Vanden-Eijnden E., Muratov C. B. Two distinct mechanisms of coherence in randomly perturbed dynamical systems // *Phys. Rev. E* (3), 2005, vol. 72, no. 3, 031105, 10 pp.
- [4] Hu B., Zhou Ch. Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance // *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, no. 2, R1001–R1004.
- [5] Linder B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E*, 1999, vol. 60, no. 6, pp. 7270–7276.
- [6] Сецинский Д. В., Постнов Д. Э. Индуцированная шумом когерентность в возбудимой системе с частотно-зависимой обратной связью // *Письма в ЖТФ*, 2005, т. 31, № 7, с. 71–78.
- [7] Han S. K., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V., Yim T. G. Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 83, no. 9, pp. 1771–1774.
- [8] Ushakov O. V., Henneberger F., Khovanov I. A., Schimansky-Geier L., Zaks M. A., Wünsche H.-J. Coherence resonance near a Hopf bifurcation // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, no. 12, 123903, 4 pp.
- [9] Soskin S. M. Fluctuation spectrum peaks for systems where the oscillation frequency dependence on energy has an extremum // *Phys. A*, 1989, vol. 155, no. 2, pp. 401–429.
- [10] Hu G., Ditzinger T., Ning C. Z., Haken H. Stochastic resonance without external periodic force // *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, no. 6, pp. 807–810.
- [11] Hu G., Ditzinger T., Ning C. Z. Resonance-like responses of autonomous nonlinear systems to white noise // *Phys. Rev. E*, 1994, vol. 50, no. 5, pp. 3508–3516.
- [12] Linder B., Schimansky-Geier L. Coherence and stochastic resonance in a two-state system // *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, no. 6, pp. 6103–6110.
- [13] Neiman A., Stone L., Saporin P. Coherence resonance at noisy precursors of bifurcations in nonlinear dynamical systems // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, pp. 270–273.
- [14] Анищенко В. С., Астахов С. В., Вадивасова Т. Е., Феоктистов А. В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, с. 237–252.
- [15] Cizak M., Toral R., Mirasso C. R. Coupling and feedback effects in excitable systems: Anticipated synchrony // *Modern Phys. Lett. B*, 2004, vol. 18, no. 23, pp. 1135–1155.

- [16] Cizak M., Toral R., Balle S., Marino F. Dynamical mechanism of anticipating synchronization in excitable systems // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 11, 114102, 4 pp.
- [17] Neiman A., Cornell-Bell A., Moss F., Schimansky-Geier L. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 83, no. 23, pp. 4896–4899.
- [18] Кузнецов А. П., Милованов С. В. Синхронизация в системе с бифуркацией слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов // *ПНД*, 2003, т. 11, № 4–5, с. 16–30.

Coherence resonance and synchronization of stochastic self-sustained oscillations in hard excitation oscillator

Alexey V. Feoktistov¹, Vadim S. Anishchenko²

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky

Astrakhanskaya str. 83, Saratov, 410012, Russia

¹feoktistov_a_v@mail.ru, ²wadim@info.sgu.ru

Phenomenon of coherence resonance and external synchronization of noise-induced stochastic oscillations in hard excitation oscillator are studied by means of natural experiments. Regions of synchronization on parameter plane are constructed. Experiments on synchronization in hard excitation oscillator without noise are carried out.

MSC 2010: 34D06

Keywords: coherence resonance, synchronization, noise-induced oscillators, hard excitation oscillator

Received September 6, 2012, accepted October 23, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 897–911 (Russian)