



УДК: 537.86/530.182

MSC 2010: 34C15, 34D06

## К теории вынужденной синхронизации автомодуляционных колебаний

Е. Н. Перегородова, С. А. Усачева, Н. М. Рыскин

Рассматривается вынужденная синхронизация простой модели трехмодовой автоколебательной системы, демонстрирующей возникновение автомодуляции. Обсуждаются случаи, когда внешний сигнал действует на частоте центральной моды или на частоте одного из автомодуляционных сателлитов. Исследована структура областей синхронизации на плоскости параметров «частота–амплитуда внешнего воздействия» и механизмы установления синхронного режима в случаях, когда осуществляется воздействие на систему в одномодовом режиме и в режиме генерации автомодуляционных колебаний.

Ключевые слова: нелинейные колебания, автомодуляция, синхронизация, конкуренция мод

### Введение

Синхронизация относится к числу наиболее фундаментальных нелинейных явлений (см., например, [1–3]) и имеет разнообразные применения в технике. В последние годы в нелинейной динамике обострился интерес к проблеме синхронизации многочастотных квазипериодических автоколебаний [4–10]. В основном рассматривались системы с фазовым взаимодействием мод [4–9]; в работе [10] была рассмотрена синхронизация двухмодовой модели, в которой взаимодействие носит чисто амплитудный характер (конкуренция мод).

В электронике для большинства многомодовых автогенераторов типичной является ситуация, когда при достаточно большом превышении порога самовозбуждения возникает

---

Получено 7 августа 2012 года

После доработки 10 сентября 2012 года

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 11-02-01411а и 12-02-01298а.

---

Перегородова Екатерина Николаевна

[peregorodovakaterina@yandex.ru](mailto:peregorodovakaterina@yandex.ru)

Усачева Светлана Александровна

[usasva@mail.ru](mailto:usasva@mail.ru)

Рыскин Никита Михайлович

[RyskinNM@info.sgu.ru](mailto:RyskinNM@info.sgu.ru)

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83



автомодуляция, то есть режим одночастотной стационарной генерации сменяется многочастотными колебаниями. Это явление, в частности, характерно для многих практически важных микроволновых генераторов, таких как лампа обратной волны [11, 12], генераторы с запаздывающей обратной связью на основе пролетного клистрона [13, 14] и лампы бегущей волны [15–17] и ряд других. Как правило, возникновение автомодуляции сопровождается мягким появлением в спектре генерируемого сигнала пары паразитных симметрично отстоящих от основной частоты компонент — сателлитов.

Поскольку в нелинейной динамике традиционно важную роль играют задачи о вынужденной синхронизации различных автоколебательных систем внешним сигналом, представляет интерес изучение синхронизации генератора, работающего в режиме автомодуляции или вблизи порога ее возникновения. В работах [18, 19] была изучена синхронизация обобщенной модели генератора, состоящего из замкнутых в кольцо нелинейного усилителя, резонансного фильтра и линии задержки. Модель описывается уравнением

$$\dot{A} + \gamma A - \alpha e^{i\psi} (1 - |A(t-1)|^2) A(t-1) = F e^{i\omega t}, \quad (1)$$

где  $A$  — медленно меняющаяся амплитуда колебаний, несущая частота которой равна резонансной частоте фильтра,  $\alpha$  — параметр, характеризующий коэффициент усиления,  $\gamma$  — параметр диссипации, обратно пропорциональный добротности фильтра,  $\psi$  — набег фазы в цепи обратной связи,  $F$  — амплитуда внешней силы, а  $\omega$  — отстройка от несущей частоты. Время задержки в (1) принято равным единице, чего всегда можно добиться перенормировкой переменных.

В работах [18, 19] было обнаружено, что для системы (1) вблизи порога автомодуляции характерно весьма сложное устройство языков синхронизации на плоскости параметров  $(\omega, F)$ . В частности, если после перехода в режим синхронизации продолжать увеличивать амплитуду внешнего воздействия, то, начиная с определенных значений, режим синхронизации становится неустойчивым и в спектре возникают компоненты на частотах автомодуляционных сателлитов, то есть имеет место инициирование автомодуляции внешним сигналом. Если же порог автомодуляции в автономной системе превышен, язык синхронизации разбивается на несколько независимых частей, которые отрываются от горизонтальной оси  $F = 0$ , то есть возникает порог синхронизации. Ввиду того, что система с запаздыванием (1) является распределенной и имеет бесконечномерное фазовое пространство, ее аналитическое исследование затруднено. Поэтому целесообразно рассмотреть более простую модельную систему, которую можно было бы исследовать не только численными, но и аналитическими методами. В работе [20] была предложена упрощенная модель системы (1), полученная в приближении, когда учитываются только три моды: основная и два модуляционных сателлита, что оправданно при не слишком большом превышении порога автомодуляции. При этом решение уравнения (1) представляется в виде

$$A = A_0 e^{i\omega_0 t} + A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t}, \quad (2)$$

где  $A_0$  и  $\omega_0$  — амплитуда и частота основной моды,  $A_{\pm}$ ,  $\omega_{\pm}$  — амплитуды и частоты сателлитов. При этом считается, что частоты удовлетворяют уравнению

$$\frac{\omega}{\gamma} = -\operatorname{tg}(\omega - \psi), \quad (3)$$

определяющему собственные частоты генератора с запаздыванием (1) [18–20]. Тогда, подставляя выражение (2) в (1) и отбрасывая все нерезонансные слагаемые, получаем уравне-

ния, описывающие трехмодовую модель, которые (в автономном случае), имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 + (\gamma + i\omega_0) A_0 &= \alpha e^{i(\psi - \omega_0)} [(1 - |A_0|^2 - 2|A_+^2| - 2|A_-^2|) A_0 - 2A_0^* A_+ A_-], \\ \dot{A}_\pm + (\gamma + i\omega_\pm) A_\pm &= \alpha e^{i(\psi - \omega_\pm)} [(1 - |A_\pm|^2 - 2|A_0|^2 - 2|A_\mp|^2) A_\pm - A_0^2 A_\mp^*]. \end{aligned} \tag{4}$$

Слагаемые вида  $|A_i|^2 A_i$  в правых частях (4) отвечают за нелинейное насыщение, слагаемые вида  $|A_i|^2 A_j$ ,  $i \neq j$ , — за конкуренцию, то есть подавление различными модами друг друга. Слагаемые вида  $A_0^* A_+ A_-$ ,  $A_0^2 A_\mp^*$  отвечают за четырехквантовое распадное взаимодействие, которое реализуется благодаря выполнению резонансного условия  $2\omega_0 \approx \omega_+ + \omega_-$ . Если умножить это условие на постоянную Планка, нетрудно увидеть, что оно представляет собой закон сохранения энергии в процессе распада двух квантов основной моды на кванты высоко- и низкочастотного сателлитов. Именно этот процесс и приводит к возникновению автомодуляции.

Важно отметить, что аналогичные системы широко используются для анализа процессов конкуренции в резонансных электронных лазерах различных типов (см., например, [21–23]).

Очевидный интерес представляет задача о вынужденной синхронизации системы (4) внешним гармоническим сигналом, которой посвящена настоящая работа. В разделе 1 обсуждаются стационарные состояния автономной системы. В разделах 2 и 3 анализируются режимы синхронизации при воздействии на частоте основной моды и сателлита соответственно. Выясняются основные отличия от картины синхронизации системы с одной степенью свободы, проводится сопоставление с результатами, полученными для системы с запаздыванием [18, 19].

## 1. Стационарные состояния автономной системы

1.1. *Режим генерации на основной моде.* Прежде всего приведем основные сведения о режимах колебаний автономной системы (4). Она имеет неподвижную точку

$$A_0 = \text{const}, \quad A_\pm = 0,$$

которая соответствует режиму одночастотных колебаний на основной моде. Амплитуду  $A_0$  можно без ограничения общности считать вещественной. Нетрудно показать, что

$$A_0^2 = 1 - \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}}{\alpha}. \tag{1.1}$$

Очевидно, что это решение существует, лишь когда  $\alpha$  превышает порог самовозбуждения

$$\alpha_{st} = \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}. \tag{1.2}$$

В точности те же самые соотношения получаются для исходной системы с запаздыванием [18–20].

Как уже отмечалось, частота  $\omega_0$  удовлетворяет характеристическому уравнению (3), а следовательно, зависит от фазы параметра обратной связи  $\psi$ . Граница самовозбуждения на плоскости параметров  $(\alpha, \psi)$  имеет вид периодически расположенных зон генерации. При  $\psi = 2\pi t$  имеем  $\omega_0 = 0$ , то есть собственная частота совпадает с центральной частотой



полосы пропускания системы. Как видно из (1.2), параметр  $\alpha$  в этом случае принимает минимальное значение. При  $\psi = 2\pi t + \pi$ , наоборот, две собственные частоты равноудалены от центра полосы пропускания и порог самовозбуждения максимален. Такая картина типична для автоколебательных систем с запаздыванием [13, 14, 18–20]. Далее ограничимся случаем  $\psi = 0$ , что оптимально для самовозбуждения генератора. Тогда  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_{\pm} = \pm\Omega$ , то есть частоты сателлитов расположены симметрично относительно центра полосы пропускания.

Можно провести анализ решения (1.1) на устойчивость. Задавая малые возмущения сателлитов  $A_{\pm} = \xi_{\pm}$ , линеаризуем уравнения (4):

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_+ + (\gamma + i\Omega)\xi_+ &= \alpha e^{-i\Omega} \left[ (1 - 2|A_0|^2)\xi_+ - A_0^2 \xi_-^* \right], \\ \dot{\xi}_- + (\gamma - i\Omega)\xi_- &= \alpha e^{i\Omega} \left[ (1 - 2|A_0|^2)\xi_- - A_0^2 \xi_+^* \right].\end{aligned}$$

Отыскивая решение в виде  $\xi_{\pm}, \xi_{\pm}^* \sim \exp(pt)$ , приходим к характеристическому уравнению

$$\left[ p + \gamma + i\Omega - \alpha e^{i\Omega} (1 - 2|A_0|^2) \right]^2 = \alpha^2 |A_0|^4 e^{-2i\Omega}.$$

Аналогичное уравнение возникает при анализе устойчивости стационарных решений системы с запаздыванием [20]. Анализ показывает, что сателлиты начинают нарастать, когда  $\alpha$  превышает порог автомодуляции

$$\alpha_{sm} = \frac{3\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}}{2}. \quad (1.3)$$

1.2. *Режимы генерации на боковых модах.* Система (4) имеет еще один класс одно-модовых решений, когда отлична от нуля амплитуда одной из боковых мод. Рассмотрим для определенности случай, когда  $A_+ \neq 0$ ,  $A_0 = 0$ ,  $A_- = 0$ . Тогда из системы (4) имеем

$$\gamma + i\Omega = \alpha e^{-i\Omega} (1 - |A_+|^2). \quad (1.4)$$

В полученном уравнении разделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned}\Omega &= -\alpha (1 - |A_+|^2) \sin \Omega, \\ \gamma &= \alpha (1 - |A_+|^2) \cos \Omega.\end{aligned} \quad (1.5)$$

Следуя [20], считаем, что частоты боковых мод суть корни уравнения (3), ближайšie к частоте основной моды. Поскольку для этих корней  $\cos \Omega < 0$ , из уравнений (1.5) находим

$$|A_+|^2 = 1 + \frac{\sqrt{\Omega^2 + \gamma^2}}{\alpha}. \quad (1.6)$$

В отличие от (1.1), это решение существует при любых значениях параметров, однако оно неустойчиво. Действительно, задавая малые возмущения амплитуд мод и линеаризуя (4), находим, что уравнение для возмущения сателлита  $\xi_+$  отщепляется от двух других и принимает вид

$$\dot{\xi}_+ + (\gamma + i\Omega)\xi_+ = \alpha e^{-i\Omega} \left[ (1 - 2|A_+|^2)\xi_+ - A_+^2 \xi_+^* \right],$$

или, с учетом (1.4),

$$\dot{\xi}_+ = -\alpha e^{-i\Omega} \left( |A_+|^2 \xi_+ + A_+^2 \xi_+^* \right).$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение имеет решение вида  $\xi_+ \sim \exp(pt + i \arg(A_+))$ , где  $p = -2\alpha |A_+|^2 \cos \Omega$ . Поскольку, как было указано выше, мы считаем, что  $\cos \Omega < 0$ , видно, что  $p$  — вещественная положительная величина, то есть решение в виде колебаний на боковой моде неустойчиво. Аналогично доказывается неустойчивость состояния, в котором не равна нулю амплитуда  $A_-$ .

1.3. *Трехмодовые колебания.* Система (4) также имеет решение, для которого не равны нулю амплитуды всех трех мод, что соответствует режиму автомодуляции. Напомним, что мы рассматриваем центр зоны генерации, где  $\omega_0 = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\omega_{\pm} = \pm\Omega$ . При этом также можно положить  $A_+ = A_-^*$ . Тогда из системы (4) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \gamma A_0 &= \alpha \left[ \left( 1 - |A_0|^2 - 4|A_+|^2 \right) A_0 - 2A_0^* |A_+|^2 \right], \\ (\gamma + i\Omega) A_+ &= \alpha e^{-i\Omega} \left[ \left( 1 - 2|A_0|^2 - 3|A_+|^2 \right) A_+ - A_0^2 A_+ \right]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Нам необходимо найти решение этих уравнений, для которого на пороге автомодуляции (1.3)  $A_+ = 0$ , а  $A_0$  определяется формулой (1.1). Анализируя уравнения (1.7) с учетом этого требования, после ряда преобразований приходим к уравнениям

$$\gamma = \alpha \left( 1 - |A_0|^2 - 6|A_+|^2 \right), \tag{1.8}$$

$$(\gamma + i\Omega) = \alpha e^{-i\Omega} \left( 1 - 3|A_0|^2 - 3|A_+|^2 \right). \tag{1.9}$$

Приравнивая модули левой и правой частей (1.9), получаем

$$\gamma^2 + \Omega^2 = \alpha^2 \left( 1 - 3|A_0|^2 - 3|A_+|^2 \right)^2. \tag{1.10}$$

Также из (1.9) следует уравнение

$$\frac{\Omega}{\gamma} = -\operatorname{tg} \Omega, \tag{1.11}$$

которое совпадает с уравнением для собственных частот (3) в центре зоны генерации ( $\psi = 0$ ).

Разрешая уравнения (1.8), (1.10), находим

$$\begin{aligned} |A_0|^2 &= \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}}{\alpha} \right) = \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{5\gamma}{\alpha} + \frac{4\alpha_{sm}}{\alpha} \right), \\ |A_+|^2 &= \frac{2}{15} \left( 1 - \frac{3\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}}{2\alpha} \right) = \frac{2}{15} \left( 1 - \frac{\alpha_{sm}}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Полученные выражения, очевидно, справедливы только при  $\alpha > \alpha_{sm}$ .

На рисунке 1 приведены зависимости амплитуд основной и автомодуляционных компонент от параметра  $\alpha$  при  $\gamma = 1.0$  (в этом случае частота автомодуляции равна  $\Omega = 0.645\pi$ ). Штриховой линией показана зависимость амплитуды одномодовых колебаний, которая неустойчива при  $\alpha > \alpha_{sm}$ . При превышении порога автомодуляции начинается нарастание сателлитов. Они черпают энергию из основной моды, амплитуда которой, соответственно, уменьшается. Результаты численного моделирования системы (4) полностью согласуются с приведенными выше аналитическими формулами.



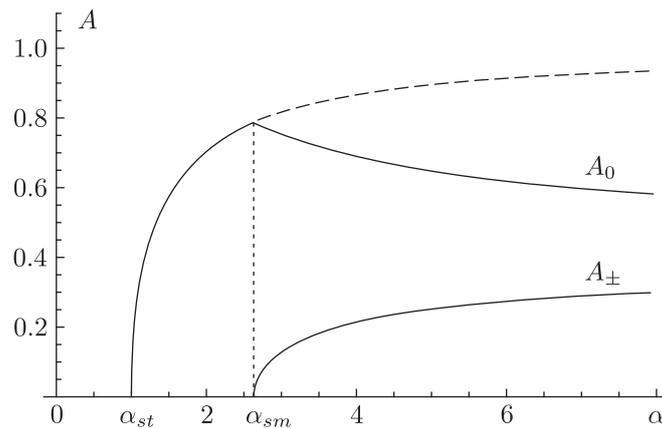


Рис. 1. Зависимости амплитуд основной ( $A_0$ ) и автомодуляционных ( $A_{\pm}$ ) компонент от параметра  $\alpha$  при  $\gamma = 1.0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\Omega = 0.645\pi$ .

## 2. Режимы синхронизации при воздействии на частоте основной моды

Перейдем к изучению синхронизации при воздействии внешним гармоническим сигналом. Вначале рассмотрим случай, когда частота воздействия близка к частоте основной моды. При этом уравнения (4) модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 + (\gamma + i\Omega) A_0 &= \alpha [(1 - |A_0^2| - 2|A_+^2| - 2|A_-^2|) A_0 - 2A_0^* A_+ A_-] + F e^{i\omega t}, \\ \dot{A}_{\pm} + (\gamma \pm i\Omega) A_{\pm} &= \alpha e^{\mp i\Omega} \left[ (1 - |A_{\pm}|^2 - 2|A_0|^2 - 2|A_{\mp}|^2) A_{\pm} - A_0^2 A_{\mp}^* \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Режиму вынужденной синхронизации, то есть одночастотным колебаниям на частоте внешнего воздействия, соответствует решение вида  $A_{\pm} = 0$ ,  $A_0 = a_0 e^{i\omega t}$ . Тогда из (2.1) получаем уравнение резонансных кривых, определяющее зависимость амплитуды колебаний от частоты внешнего воздействия

$$\rho \left( (\gamma - \alpha(1 - \rho))^2 + \omega^2 \right) = F^2. \quad (2.2)$$

Здесь введено обозначение  $\rho = |a_0|^2$ . Это уравнение имеет фактически тот же самый вид, что и в задаче о синхронизации генератора типа Ван дер Поля [1–3].

Исследуем режимы синхронизации на устойчивость. Зададим малые возмущения

$$A_0 = (a_0 + \xi_0(t)) e^{i\omega t}, \quad A_{\pm} = \xi_{\pm}(t),$$

подставим в уравнения (2.1) и линеаризуем их. Получим

$$\dot{\xi}_0 + (\gamma + i\omega) \xi_0 = \alpha [(1 - 2\rho) \xi_0 - \rho \xi_0^*], \quad (2.3)$$

$$\dot{\xi}_{\pm} + (\gamma \pm i\Omega) \xi_{\pm} = \alpha e^{\mp i\Omega} [(1 - 2\rho) \xi_{\pm} - \rho \xi_{\mp}^*]. \quad (2.4)$$

Обратим внимание, что уравнения для возмущений основной моды и сателлитов «отцепляются» друг от друга. Из уравнения (2.3) можно получить условия неустойчивости относительно возмущений основной моды. Отыскивая решение в виде  $\xi_0 \sim \exp(pt)$ , приходим

к квадратному характеристическому уравнению вида

$$p^2 + 2ap + b = 0, \tag{2.5}$$

где

$$a = \gamma - \alpha(1 - 2\rho),$$

$$b = (\gamma - \alpha(1 - 2\rho))^2 + \omega^2 - \alpha^2\rho^2.$$

Согласно критерию устойчивости Рауса–Гурвица (см., например, [1, 24]), границы устойчивости соответствуют обращению в нуль коэффициентов  $a$  и  $b$ . Условие  $a = 0$  определяет границу синхронизации посредством подавления собственной частоты основной моды, которая на плоскости  $(\omega, \rho)$ , очевидно, представляет собой горизонтальную прямую линию

$$\rho = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right). \tag{2.6}$$

Условие  $b = 0$  приводит к уравнению

$$(\gamma - \alpha(1 - 2\rho))^2 + \omega^2 = \alpha^2\rho^2, \tag{2.7}$$

которое задает границу синхронизации посредством захвата частоты. На плоскости  $(\omega, \rho)$  эта кривая представляет собой эллипс. Условия устойчивости (2.6), (2.7) аналогичны тем, что получаются для задачи о синхронизации системы с одной степенью свободы [1–3].

Однако в данном случае присутствует еще один механизм потери устойчивости, связанный с возбуждением боковых мод. Отыскивая решения уравнений (2.4) в виде  $\xi_+, \xi_- \sim \exp(pt)$ , приходим к характеристическому уравнению

$$(p + \gamma + i\Omega - \alpha(1 - 2\rho)e^{-i\Omega})^2 = \alpha^2\rho^2e^{-2i\Omega}. \tag{2.8}$$

Это квадратное уравнение относительно  $\rho$ , разрешив которое, можно найти границу возбуждения второй моды на плоскости  $(\omega, \rho)$ . Поскольку на границе устойчивости характеристический показатель  $p$  является чисто мнимым, положим  $p = iw$  и получим

$$iw = -\gamma - i\Omega + \alpha(1 - 2\rho \pm \rho)e^{-i\Omega}. \tag{2.9}$$

Выбрав в правой части уравнения (1.5) знак «минус», разделим в нем действительную и мнимую части

$$w = -\Omega - \alpha(1 - 3\rho)\sin\Omega, \tag{2.10}$$

$$\gamma = \alpha(1 - 3\rho)\cos\Omega. \tag{2.11}$$

Но с учетом того, что  $\Omega$  удовлетворяет уравнению (1.11), получаем, что  $w = 0$ , то есть при неустойчивости в спектре появляются составляющие точно на частотах автомодуляционных сателлитов.

Из уравнения (2.11) находим выражение для границы устойчивости

$$\rho = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\gamma}{\alpha \cos\Omega} \right), \tag{2.12}$$

которое задает прямую на плоскости  $(\omega, \rho)$ . Выше этой прямой происходит возбуждение колебаний боковых мод.

Выбор знака «плюс» в правой части уравнения (2.9) приводит к выражению

$$\rho = 1 - \frac{\gamma}{\alpha \cos \Omega}.$$

Однако эта прямая не является границей устойчивости, так как лежит на плоскости выше прямой, определяемой формулой (2.12), то есть в области неустойчивости.

В итоге имеем картину резонансных кривых на плоскости  $(\omega, \rho)$ , представленную на рисунке 2. Белый цвет соответствует области, в которой синхронный режим устойчив, различными оттенками серого окрашены области неустойчивости. Линия  $l$  соответствует границе захвата частоты основной моды (2.7), линия  $s$  — границе ее подавления (2.6). Линией  $a$  показана граница подавления частот боковых мод (2.12). Очевидно, что возможны две характерные ситуации, в зависимости от того, превышен или нет порог автомодуляции в автономной системе. Если  $\alpha < \alpha_{sm}$ , то есть в автономной системе генерируются одночастотные колебания (рис. 2а), нижняя часть картины резонансных кривых имеет тот же вид, что и для системы с одной степенью свободы. Единственное отличие состоит в том, что в верхней части появляется область возбуждения боковых мод, которую, следуя [18, 19], будем называть областью автомодуляции, инициированной внешним сигналом.

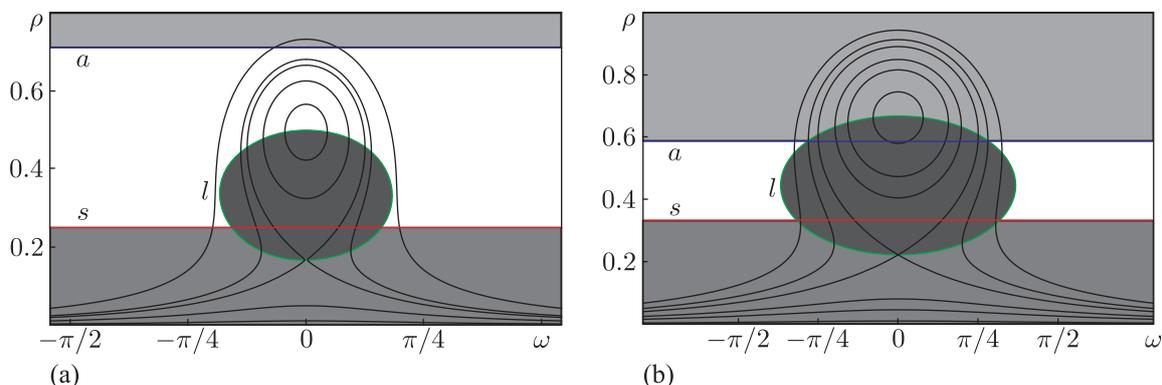


Рис. 2. Резонансные кривые для случая воздействия на частоте основной моды при  $\gamma = 1.0$ ,  $\psi = \omega_0 = 0$ ,  $\Omega = 0.645\pi$ : (а)  $\alpha = 2.0$  (до порога автомодуляции) и (б)  $\alpha = 3.0$  (выше порога автомодуляции).

Если же воздействие осуществляется на систему, находящуюся в автомодуляционном режиме (рис. 2б), область захвата частоты смыкается с областью автомодуляции. Соответственно, область устойчивости синхронного режима разбивается на две части. Важно отметить, что в этом случае, воздействуя на систему внешним сигналом в области малых расстройек, вообще не удастся осуществить синхронизацию. Внешняя сила захватывает частоту основной моды, однако не может подавить колебания автомодуляционных мод.

Комбинируя соотношения (2.6), (2.7), (2.12) с уравнением резонансных кривых (2.2), можно проанализировать устройство областей синхронизации на плоскости параметров  $(\omega, F)$ . На рисунке 3 представлены разбиения плоскости параметров на области различных режимов, построенные при тех же значениях параметров, что и на рисунке 2. Аналитические результаты также сопоставлялись с результатами численного моделирования. Сплошными линиями  $l$ ,  $s$ ,  $a$  показаны теоретические границы. Видно, что они полностью совпадают с численными результатами.

Однако численное моделирование позволяет продвинуться дальше и выявить механизмы перехода в режим синхронизации. В данном случае возможны четыре типа поведения, которые реализуются в областях, отмеченных на рисунке 3 цифрами. На рисунке 4 также

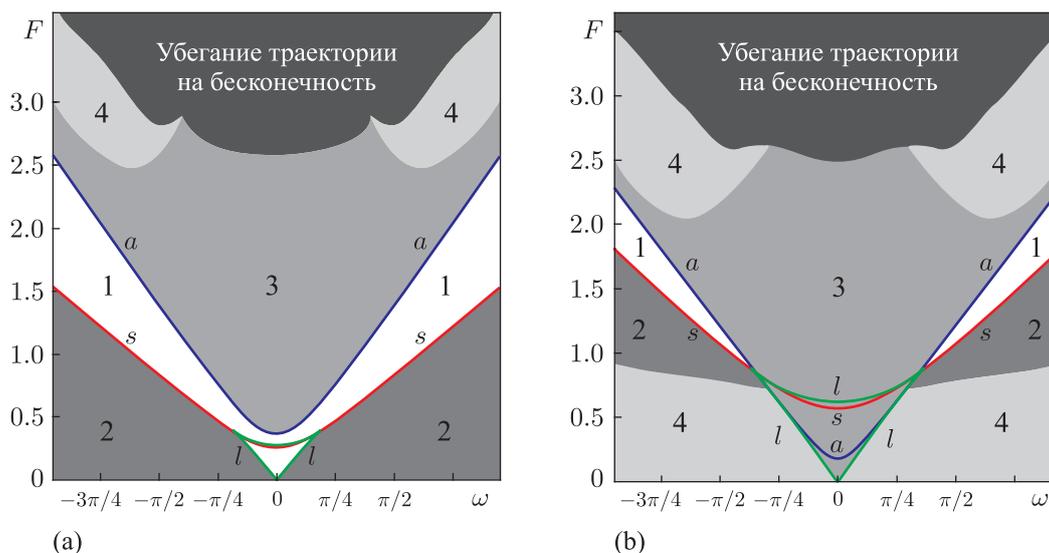


Рис. 3. Разбиение плоскости параметров  $(\omega, F)$  на области различных режимов для случая воздействия на частоте основной моды при  $\gamma = 1.0, \psi = \omega_0 = 0, \Omega = 0.645\pi$ : (a)  $\alpha = 2.0$  и (b)  $\alpha = 3.0$ . Показаны области различных режимов колебаний: 1 — синхронизация, 2 — модуляция основной моды без возбуждения спутников, 3 — возбуждение спутников, 4 — модуляция всех трех мод.

представлены типичные зависимости амплитуд мод от времени, соответствующие различным режимам. В режиме синхронизации реализуются периодические колебания на частоте внешнего воздействия. По окончании переходного процесса амплитуда основной моды не зависит от времени, а колебания спутников затухают (рис. 4а). В области 2 реализуется классический режим биений, то есть режим двухчастотных квазипериодических колебаний, в спектре которых присутствует собственная частота основной моды и частота воздействия. Амплитуда колебаний основной моды при этом осциллирует, а спутники по-прежнему затухают (рис. 4б). В области 3 по окончании переходного процесса происходит установление колебаний трех мод с постоянными амплитудами (рис. 4с). В спектре присутствует частота внешнего сигнала и частоты спутников. Однако лишь две частоты являются независимыми, поскольку частоты спутников равноудалены от основной. Наконец, в области 4 устанавливается режим с модуляцией всех трех мод (рис. 4д). В спектре присутствуют частота внешнего воздействия, собственная частота основной моды и частоты спутников, то есть это трехчастотный квазипериодический режим.

Рассмотрим поведение системы, когда воздействие осуществляется на генератор до порога автомодуляции (рис. 3а). В этом случае автономная система находится в режиме периодических колебаний, а при воздействии слабым внешним сигналом переходит в режим биений типа 2. С ростом амплитуды внешнего воздействия наблюдаются обычные сценарии синхронизации посредством захвата частоты или подавления основной моды (в зависимости от частоты воздействия), которые подробно описаны в литературе [1–3].

Однако синхронный режим устойчив лишь в ограниченной области изменения амплитуды воздействия, что согласуется с картиной резонансных кривых (рис. 2). При увеличении  $F$  происходит переход в режим типа 3, сопровождающийся возбуждением спутников, то есть возникает автомодуляция, индуцированная внешним сигналом. Отметим, что аналогичное поведение наблюдалось для системы с запаздыванием (1) [18, 19]. Дальнейшее увеличение  $F$  приводит к возбуждению модуляции амплитуд всех трех мод (рис. 4д), а при

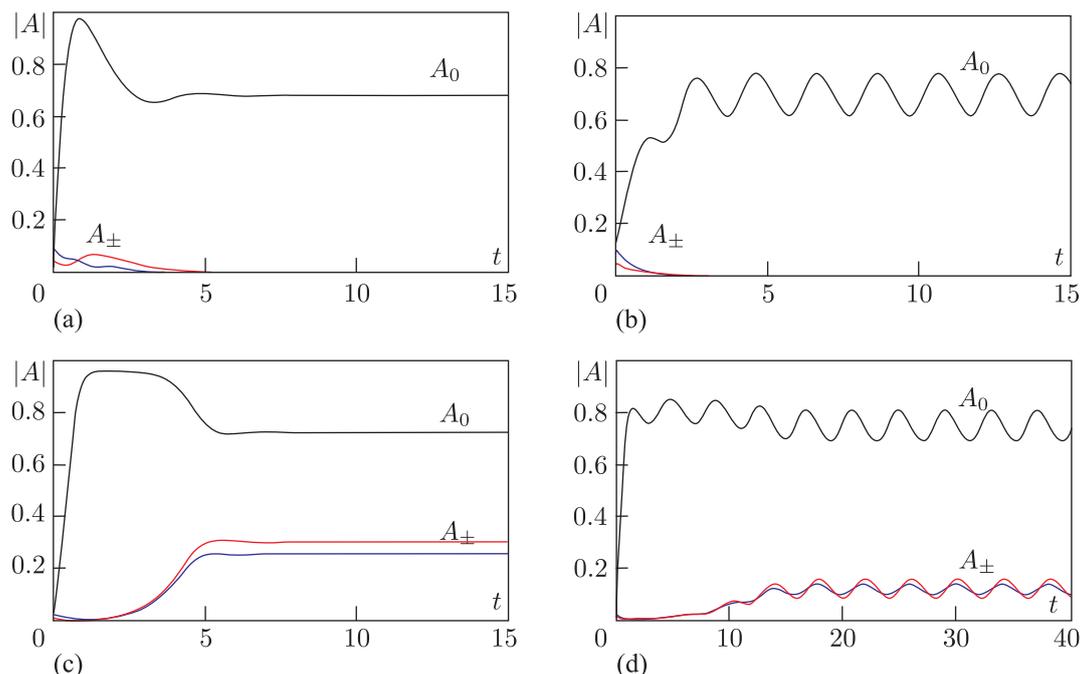


Рис. 4. Типичные зависимости амплитуд колебаний от времени в режимах синхронизации (а), модуляции основной моды без возбуждения спутников (б), возбуждения спутников (с), модуляции всех трех мод (д).

еще больших амплитудах воздействия наблюдается убегание траекторий на бесконечность, то есть кубическая аппроксимация нелинейности уже не является адекватной.

Теперь рассмотрим воздействие на систему выше порога автомодуляции. В этом случае в отсутствие воздействия уже генерируются двухчастотные квазипериодические колебания, а динамика амплитуд носит характер, аналогичный представленному на рисунке 4с. При добавлении малого воздействия мы переходим в трехчастотный режим типа 4, в котором амплитуды всех трех мод осциллируют. Далее характер поведения системы оказывается принципиально различным в зависимости от расстройки. При малых расстройках вначале происходит захват основной частоты и переход в двухчастотный режим типа 3. Однако подавление спутников не происходит ни при каких значениях  $F$ .

При больших расстройках происходит подавление спутников внешним воздействием и установление режима типа 2 с модуляцией основной моды. Затем происходит подавление собственных колебаний основной моды, в результате чего устанавливается режим синхронизации. При дальнейшем увеличении  $F$  аналогично предыдущим случаям последовательно происходит возбуждение автомодуляционных спутников, возникновение модуляции всех трех мод и уход решения на бесконечность. Таким образом, при превышении порога автомодуляции в автономной системе область синхронизации разбивается на две части, что также согласуется с поведением, отмеченным в [18, 19].

### 3. Синхронизация при воздействии на частоте спутника

Теперь рассмотрим случай, когда воздействие осуществляется на частоте одного из спутников (для определенности — на частоте  $\omega_+$ ). При этом уравнения (2.1) модифициру-

ются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 + \gamma A_0 &= \alpha [(1 - |A_0^2| - 2|A_+^2| - 2|A_-^2|) A_0 - 2A_0^* A_+ A_-], \\ \dot{A}_+ + (\gamma + i\Omega) A_+ &= \alpha e^{-i\Omega} [(1 - |A_+|^2 - 2|A_0|^2 - 2|A_-|^2) A_+ - A_0^2 A_-^*] + F e^{i\omega t}, \\ \dot{A}_- + (\gamma - i\Omega) A_- &= \alpha e^{i\Omega} [(1 - |A_-|^2 - 2|A_0|^2 - 2|A_+|^2) A_- - A_0^2 A_+^*]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Режиму синхронизации соответствует решение вида  $A_0 = 0$ ,  $A_- = 0$ ,  $A_+ = a_0 \exp(i\omega t)$ . Тогда из уравнений (3.1) получаем уравнение резонансных кривых

$$\rho [(\gamma - \alpha(1 - \rho) \cos \Omega)^2 + (\omega + \Omega - \alpha(1 - \rho) \sin \Omega)^2] = F^2. \quad (3.2)$$

Здесь по-прежнему  $\rho = |a_0|^2$ .

Анализируя полученные решения на устойчивость, зададим малые возмущения  $A_+ = (a_0 + \xi_+) e^{i\omega t}$ ,  $A_0 = \xi_0$ ,  $A_- = \xi_-$  и линеаризуем уравнения (3.1). Вновь получим, что уравнения для возмущений различных мод разделяются:

$$\dot{\xi}_+ + (\gamma + i(\omega + \Omega)) \xi_+ = \alpha e^{-i\Omega} [(1 - 2\rho) \xi_+ - \rho \xi_+^*], \quad (3.3)$$

$$\dot{\xi}_0 + (\gamma - \alpha(1 - 2\rho)) \xi_0 = 0, \quad (3.4)$$

$$\dot{\xi}_- + (\gamma - i\Omega) \xi_- = \alpha e^{i\Omega} (1 - 2\rho) \xi_-. \quad (3.5)$$

Отыскивая решение уравнения (3.3) в виде  $\xi_+ \sim \exp(pt)$ , получим характеристическое уравнение вида  $p^2 + 2ap + b = 0$ , где

$$\begin{aligned} a &= \gamma - \alpha(1 - 2\rho) \cos \Omega, \\ b &= (\gamma - \alpha(1 - 2\rho) \cos \Omega)^2 + (\omega + \Omega + \alpha(1 - 2\rho) \sin \Omega)^2 - \alpha^2 \rho^2. \end{aligned}$$

Условия равенства нулю коэффициентов  $a$  и  $b$  определяют границы подавления и захвата частоты соответственно. Границей подавления служит прямая линия

$$\rho = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{\alpha \cos \Omega} \right). \quad (3.6)$$

Выражение для границы захвата частоты  $b = 0$  разрешим относительно  $\omega$ :

$$\omega = -\Omega - \alpha(1 - 2\rho) \sin \Omega \pm \sqrt{\alpha^2 \rho^2 - (\gamma - \alpha(1 - 2\rho) \cos \Omega)^2}. \quad (3.7)$$

Кроме того, в данном случае присутствует еще один механизм потери устойчивости, связанный с возбуждением основной моды. Для него из уравнения (3.4) находим

$$\gamma = \alpha(1 - 2\rho).$$

Отсюда можно получить выражение для границы устойчивости синхронного режима, совпадающее с (2.6). Что же касается уравнения для возмущения низкочастотного сателлита (3.5), то оно приводит к условию (3.6), то есть когда возбуждаются собственные колебания высокочастотного сателлита, за счет нелинейности генерируются и колебания низкочастотного.



На рисунке 5а приведена картина резонансных кривых при  $\alpha = 2.0$ , то есть ниже порога автомодуляции автономной системы. Линия  $l$  отвечает захвату частоты спутника (3.7), линия  $s$  — его подавлению (3.6), линия  $a$  — границе возбуждения основной моды (2.6). В отличие от рисунка 2а, резонансные кривые асимметричны, поскольку мы рассматриваем колебания не на основной, а на боковой моде. Также обратим внимание, что область захвата не является замкнутой, хотя выражение для коэффициента  $b$  в характеристическом уравнении имеет тот же вид, что и для синхронизации основной моды. Действительно, при больших  $\rho$  подкоренное выражение в (3.7) приблизительно равно  $\alpha^2 \rho^2 (1 - 4 \cos^2 \Omega)$ . Так как при выбранных значениях параметров  $\cos \Omega \approx -0.44$ , подкоренное выражение в области больших амплитуд положительно; следовательно, граница захвата состоит из двух ветвей, которые неограниченно продолжаются в область больших  $\rho$ .

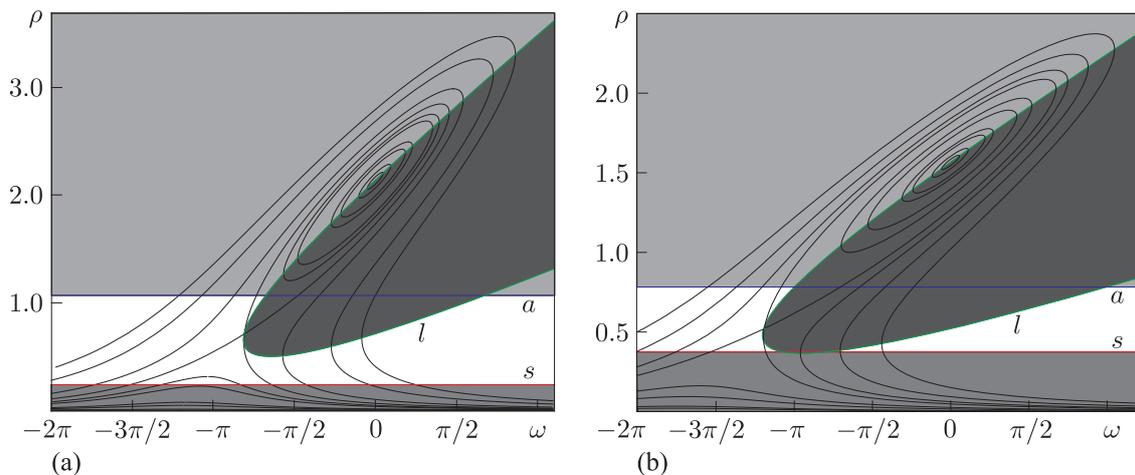


Рис. 5. Резонансные кривые для случая воздействия на частоте автомодуляционного спутника при  $\gamma = 1.0$ ,  $\psi = \omega_0 = 0$ ,  $\Omega = 0.645\pi$ : (а)  $\alpha = 2.0$  (до порога автомодуляции) и (б)  $\alpha = 4.0$  (выше порога автомодуляции).

С ростом  $\alpha$  картина резонансных кривых трансформируется. Граница захвата частоты (3.7) опускается ниже границы подавления основной моды. Минимальное значение  $\rho$  на границе захвата, очевидно, достигается, когда подкоренное выражение в (3.7) обращается в нуль. Это дает

$$\rho = \frac{\gamma - \alpha \cos \Omega}{\alpha (1 - 2 \cos \Omega)}.$$

Приравнявая полученное выражение к (2.6), находим

$$\alpha = \gamma (3 - 2 \cos \Omega). \quad (3.8)$$

При выбранных значениях параметров получаем  $\alpha \approx 3.88$ . Соответствующая картина резонансных кривых приведена на рисунке 7b. Видно, что область синхронизации разбилась на две изолированные части.

На рисунке 6 показано разбиение плоскости параметров  $(\omega, F)$  на области различных режимов при тех же значениях параметров, что и на рисунке 5. Рисунок 6а соответствует случаю воздействия на генератор до порога автомодуляции, а рисунок 6б — выше порога. Сплошными линиями показаны кривые, построенные по аналитическим соотношениям (2.6), (3.6), (3.7) совместно с уравнением резонансных кривых (3.2), которые полностью

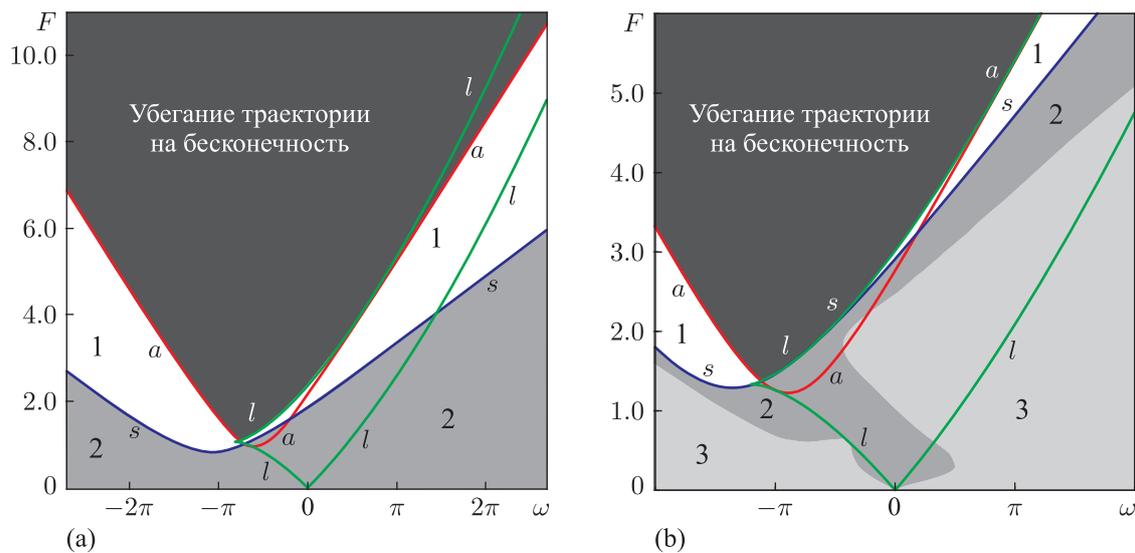


Рис. 6. Разбиение плоскости параметров  $(\omega, F)$  на области различных режимов в случае воздействия на частоте автомодуляционного спутника при  $\gamma = 1.0, \psi = \omega_0 = 0, \Omega = 0.645\pi$ : (а)  $\alpha = 2.0$  и (б)  $\alpha = 4.0$ . Цифрами показаны различные режимы колебаний: 1 — синхронизация, 2 — двухчастотный режим, 3 — модуляция всех трех мод.

согласуются с численными результатами. На рисунке 7 приведены характерные зависимости амплитуд мод от времени в соответствующих режимах.

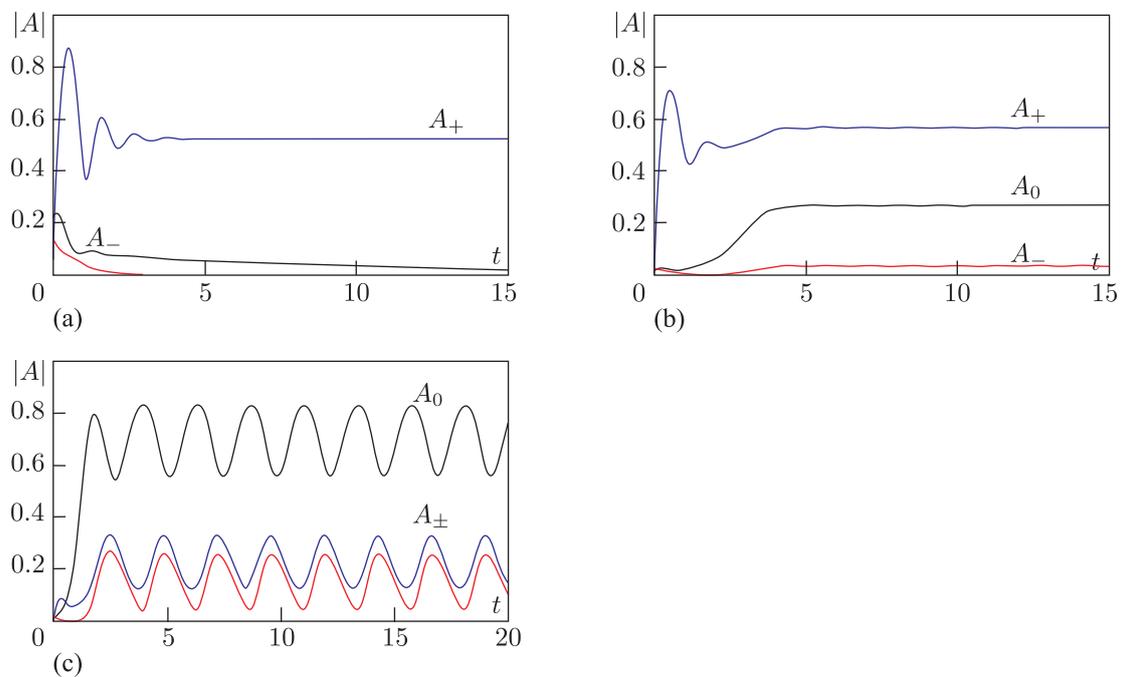


Рис. 7. Типичные зависимости амплитуд колебаний от времени в режиме синхронизации (а), двухчастотном квазипериодическом режиме (б) и трехчастотном режиме с модуляцией всех трех мод (с).

В данном случае можно выделить три типа режимов. Во-первых, это режим синхронизации (область 1), в котором в данном случае отлична от нуля только амплитуда сателлита (рис. 7а). Во-вторых, это двухчастотный квазипериодический режим (область 2), когда амплитуды всех трех мод по окончании переходного процесса остаются постоянными (рис. 7б). Наконец, возможен трехчастотный квазипериодический режим с модуляцией всех трех мод (область 3).

Обсудим, как происходит переход к режиму синхронизации. Рассмотрим вначале случай, когда  $\alpha$  находится ниже порога автомодуляции (рис. 6а). При небольших значениях  $F$  внешнее воздействие приводит к возбуждению сателлитов, то есть устанавливается двухчастотный квазипериодический режим (рис. 7б). При этом амплитуда основной моды вначале превышает амплитуды сателлитов. При увеличении амплитуды внешнего воздействия амплитуды основной моды и низкочастотного сателлита  $A_-$  монотонно уменьшаются, а амплитуда сателлита  $A_+$  увеличивается и постепенно начинает превышать амплитуду основной моды. Выше линии  $s$  амплитуда основной моды обращается в нуль и устанавливается режим синхронизации. Однако он устойчив лишь в конечном диапазоне изменения  $F$ . Таким образом, область синхронизации имеет вид полосы, ограниченной снизу линией  $s$ , а сверху — линиями  $a$  и  $l$ . Выше этой границы происходит убегание траекторий на бесконечность.

При выборе параметра  $\alpha$  выше порога автомодуляции наблюдается более сложная картина (рис. 6б). При малой амплитуде воздействия возникает трехчастотный квазипериодический режим с модуляцией амплитуд всех трех мод (рис. 7с). С увеличением  $F$  происходит либо подавление (при больших расстройках), либо захват (при малых расстройках) собственной частоты сателлита. Затем происходит подавление основной моды, приводящее к установлению синхронного режима. Дальнейшее увеличение  $F$  вызывает уход решения на бесконечность. Более того, если  $\alpha$  превышает значение, определяющееся формулой (3.8), область синхронизации разделяется на две части и в центральной части, где линия  $l$  лежит ниже линии  $s$ , синхронизация вообще оказывается невозможной.

Обратим внимание на сложное устройство области захвата частоты сателлита внешним сигналом (граница между областями 2 и 3 в области малых расстроек на рис. 6б). Здесь можно усмотреть аналогию с задачей о синхронизации двух диссипативно связанных осцилляторов с неидентичными параметрами, ответственными за возбуждение и нелинейную диссипацию [25], где язык синхронизации также имеет характерную «перетяжку». В [25] такое поведение объясняется эффектом смены доминирующего осциллятора. В данном случае мы имеем схожую причину: при малых значениях  $F$  наибольшую амплитуду имеет основная мода, однако с ростом амплитуды воздействия ее амплитуда уменьшается, а амплитуда сателлита увеличивается.

#### 4. Заключение

В работе исследована синхронизация внешним сигналом простой модели трехмодовой автоколебательной системы, которая демонстрирует возникновение автомодуляции при увеличении параметра возбуждения  $\alpha$ . Рассматривались случаи, когда внешний сигнал действует на частоте центральной моды или на частоте одного из сателлитов. В работе получены аналитические выражения для резонансных кривых и определены условия устойчивости синхронных режимов. С помощью численного моделирования построено разбиение плоскости параметров  $(\omega, F)$  на области различных режимов.

При воздействии на основной частоте ниже порога автомодуляции наблюдаются классические механизмы подавления и захвата частоты. Однако режим синхронизации устойчив лишь при амплитудах воздействия, не превышающих некоторого порогового значения. Выше этого порога наблюдается возбуждение сателлитов, то есть автомодуляция, инициированная внешним сигналом.

Если же воздействие осуществляется на систему в режиме автомодуляции, область синхронизации разбивается на две изолированные части. При достаточно больших расстройках по мере увеличения внешнего воздействия вначале происходит подавление автомодуляционных сателлитов, затем — подавление основной моды. При больших амплитудах вновь наблюдается автомодуляция, инициированная внешним сигналом. В области малых расстроек увеличение амплитуды внешней силы приводит к захвату собственной частоты основной моды, однако дальнейшее увеличение воздействия не приводит к установлению синхронного режима.

При воздействии на частоте сателлита, если порог автомодуляции в автономной системе не превышен, переход в режим синхронизации происходит в результате подавления колебаний основной моды. Однако, как и в случае воздействия на основную моду, синхронный режим устойчив, если амплитуда воздействия не превышает определенного порогового значения. Увеличение значения  $F$  выше этого порога приводит к убеганию решения на бесконечность. Если же воздействие осуществляется на систему в режиме автомодуляции, вначале происходит (в зависимости от расстройки) либо захват, либо подавление колебаний на собственной частоте автомодуляционной моды. Далее происходит подавление основной моды. При достаточно большом превышении порога автомодуляции область синхронизации разбивается на две изолированные части; в центральной части синхронизация вообще оказывается невозможной.

Полученные результаты развивают и дополняют теорию синхронизации колебаний в многомодовых системах.

## Список литературы

- [1] Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [2] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.
- [3] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [4] Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, no. 4, 046216, 4 pp.
- [5] Анищенко В. С., Николаев С. М. Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // *ПНД*, 2008, т. 16, № 2, с. 69–86.
- [6] Анищенко В. С., Астахов С. В., Вадивасова Т. Е., Феоктистов А. В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, с. 237–252.
- [7] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 603–717.
- [8] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 411–425.



- [9] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // ПНД, 2010, т. 18, № 4, с. 17–32.
- [10] Перегородова Е. Н., Рыскин Н. М., Усачева С. А. Синхронизация системы двух конкурирующих мод внешним гармоническим сигналом // ПНД, 2011, т. 19, № 3, с. 154–170.
- [11] Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Радиофизика, 1978, т. 21, № 7, с. 1037–1052.
- [12] Рыскин Н. М., Титов В. Н. Автомодуляционные и хаотические режимы генерации в релятивистской лампе обратной волны с отражениями // Радиофизика, 2001, т. 44, № 10, с. 860–874.
- [13] Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Клокотов Д. В., Рыскин Н. М. Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ, 2003, т. 73, № 7, с. 105–110.
- [14] Рыскин Н. М., Шигаев А. М. Сложная динамика двухрезонаторного клистрона — генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ, 2006, т. 76, № 1, с. 72–81.
- [15] Анисимова Ю. В., Дмитриев А. С., Залогин Н. Н., Калинин В. И., Кислов В. Я., Панас А. И. Об одном механизме перехода к хаосу в системе электронный пучок — электромагнитная волна // Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, № 8, с. 387–389.
- [16] Блюх Ю. П., Бородкин А. В., Любарский М. Г., Онищенко И. Н., Файнберг Я. Б. Применение метода функционального отображения для исследования ЛВВ — генератора с запаздывающей обратной связью // ПНД, 1993, т. 1, № 1–2, с. 34–49.
- [17] Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S., Booske J. H., Ryskin N. M., Titov V. N. Generation of chaotic radiation in a driven TWT amplifier with delayed feedback // Phys. Plasmas, 2006, vol. 13, № 1, 013104, 20 pp.
- [18] Рыскин Н. М., Усачева С. А. Синхронизация периодических колебаний автогенератора с запаздыванием внешним гармоническим сигналом // ПНД, 2009, т. 17, № 1, с. 3–12.
- [19] Usacheva S. A., Ryskin N. M. Forced synchronization of a delayed-feedback oscillator // Phys. D, 2012, vol. 241, no. 4, pp. 372–381.
- [20] Рыскин Н. М., Шигаев А. М. Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ, 2002, т. 72, № 7, с. 1–8.
- [21] Нусинович Г. С. Взаимодействие мод в лазерах на свободных электронах // Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, № 14, с. 848–852.
- [22] Бляхман Л. Г., Нусинович Г. С. Динамика многомодовых электронных мазеров // Радиотехника и электроника, 1982, т. 27, № 5, с. 996–1003.
- [23] Nusinovich G. S. Mode interaction in gyrotrons // Int. J. Electron., 1981, vol. 51, no. 4, pp. 457–474.
- [24] Трубецков Д. И., Рожнёв А. Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
- [25] Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Селезнев Е. П. Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // ПНД, 2010, т. 18, № 2, с. 62–78.

## On the theory of forced synchronization of self-modulated oscillations

Ekaterina N. Peregorodova<sup>1</sup>, Svetlana A. Usacheva<sup>2</sup>, Nikita M. Ryskin<sup>3</sup>

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky

Astrahanskaya st. 83, Saratov, 410026, Russia

<sup>1</sup>peregorodovakaterina@yandex.ru, <sup>2</sup>usasva@mail.ru, <sup>3</sup>RyskinNM@info.sgu.ru

Forced synchronization of a simple model of a three-mode self-oscillator which demonstrates appearance of self-modulation is considered. External driving at the fundamental frequency as well as at the self-modulation satellite frequency is considered. Structures of synchronization



domains on the driving frequency — driving amplitude parameter plane and mechanisms of transition to the synchronous regime are investigated for the cases of single-mode and self-modulated operation of the free-running oscillator.

MSC 2010: 34C15, 34D06

Keywords: nonlinear oscillations, automodulation, synchronization, mode competition

Received August 7, 2012, accepted September 10, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 913–929 (Russian)