Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 1. С. 51–58.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.36
MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18

Об уравнениях движения системы внутри катящегося шара

С. В. Болотин, Т. В. Попова

Рассматривается механическая система, стесненная идеальными связями и находящаяся внутри шара, катящегося без проскальзывания по плоскости. Показано, что если связи обладают сферической симметрией, то уравнения движения имеют лагранжеву форму. Без предположения симметрии это неверно.

Ключевые слова: неголономная связь, качение шара, уравнения Лагранжа, принцип Гамильтона

1. Уравнения движения

Тема настоящей заметки мотивирована задачей управления шаровым роботом. Рассмотрим шар, катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Внутри шара находится управляемая механическая система. Она может состоять, например, из нескольких роторов или маятников. Задача заметки — выяснить, когда уравнения движения такой системы имеют лагранжеву форму.

Пусть R — радиус шара, M — масса шара, I — момент инерции шара, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор центра O шара, $\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\rho}}$ — скорость центра шара, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости шара.

Получено 30 марта 2012 года
После доработки 21 ноября 2012 года

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор 11.G34.31.0039, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1, гранта РФФИ 12-01-00441.

Болотин Сергей Владимирович
bolotin@mi.ras.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Попова Татьяна Валентиновна
t.shahova@yandex.ru
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Россия, г. Москва, Ленинские горы

Считаем, что проскальзывания в точке P контакта шара с плоскостью нет: $\mathbf{v}_P = 0$. Тогда

$$\mathbf{v} = R\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_z, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вертикальный вектор.

Пусть система $\mathcal{M}$, состоящая из n материальных точек массы m_i, стесненных связями, движется относительно шара. Обозначим через $\mathbf{r}_i$ радиус-вектор точки m_i относительно центра O шара, через $\mathbf{G}_i$ — силу, действующую на точку m_i со стороны шара. Пусть $\mathbf{F}_{ij}$ — сила взаимодействия точек m_i, m_j. Полная сила, действующая на точку m_i, равна $m_i\mathbf{g} + \mathbf{F}_i + \mathbf{G}_i$, где $\mathbf{F}_i = \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ij}$. Поскольку силы $\mathbf{F}_{ij}$ внутренние,

$$\sum \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0.$$

Обозначим через $\mathbf{G} = \sum \mathbf{G}_i$ равнодействующую сил, действующих на систему $\mathcal{M}$ со стороны шара, а через $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{G}_i$ — их полный момент относительно O. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} I\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= -R\mathbf{e}_z \times \mathbf{F}_P - \mathbf{M} + \mathbf{M}_P, && (1.2)\\ M\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}_P - Mg\mathbf{e}_z - \mathbf{G}, && (1.3)\\ m_i(\dot{\mathbf{v}} + \ddot{\mathbf{r}}_i) &= -m_i g\mathbf{e}_z + \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i, \qquad i = 1, \ldots, n, && (1.4) \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}_P$ — сила реакции в точке P контакта шара с плоскостью, а $\mathbf{M}_P$ — момент сил реакции в точке контакта. Будем считать, что трения качения нет: $\mathbf{M}_P \parallel \mathbf{e}_z$.

Выразим $\mathbf{F}_P$ из уравнения (1.3) и подставим в (1.2). Векторно умножим уравнение (1.2) справа на $\mathbf{e}_z$. Используя (1.1), получим

$$\mu\dot{\mathbf{v}} = -\Pi\mathbf{G} + R^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}, \tag{1.5}$$

где $\mu = IR^{-2} + M$ и

$$\Pi\mathbf{G} = -\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} - G_z\mathbf{e}_z$$

— проекция $\mathbf{G}$ на горизонтальную плоскость.

Выразим $\dot{\mathbf{v}}$ из уравнения (1.5) и подставим в (1.4). Получим уравнение движения точки m_i относительно центра шара:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{P}_i = -m_i g\mathbf{e}_z + \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i + \frac{m_i}{\mu}(\Pi\mathbf{G} - R^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}). \tag{1.6}$$

Последний член имеет смысл силы инерции. В пределе $m_i/\mu \to 0$ уравнения (1.6) переходят в уравнения Ньютона в неподвижной системе отсчета

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -m_i g\mathbf{e}_z + \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i.$$

Складывая уравнения (1.6), получим

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{G} + \frac{m}{\mu}(\Pi\mathbf{G} - R^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}), \tag{1.7}$$

где $m = \sum m_i$ — масса системы $\mathcal{M}$, а $\mathbf{s} = \frac{1}{m}\sum m_i\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор ее центра масс относительно центра шара. В проекции на горизонтальную плоскость

$$\Pi\mathbf{G} = \frac{m}{\mu + m}(\mu\ddot{\mathbf{x}} + R^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{x} = \Pi\mathbf{s}$ — горизонтальная составляющая радиус-вектора центра масс. Подставляя (1.8) в (1.6) и (1.5), получим окончательно уравнения движения системы

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{P}_i = -m_i g\mathbf{e}_z + \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i + \frac{mm_i}{\mu+m}\ddot{\mathbf{x}} - \frac{m_i}{R(\mu+m)}\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}, \tag{1.9}$$

$$(\mu+m)\dot{\mathbf{v}} + m\ddot{\mathbf{x}} = R^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}. \tag{1.10}$$

2. Первые интегралы

Если $\Pi\mathbf{M} = 0$, то уравнение (1.10) дает первый интеграл типа импульса

$$\mathbf{v} + \frac{m}{\mu+m}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}. \tag{2.1}$$

Если движение системы $\mathcal{M}$ относительно центра шара известно, то движение центра шара имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{c}t - \frac{m}{\mu+m}\mathbf{x}(t). \tag{2.2}$$

Первый интеграл (2.1) впервые получен С. А. Чаплыгиным [4] для случая, когда система $\mathcal{M}$ — сферический маятник с точкой подвеса в центре шара. Когда система $\mathcal{M}$ — волчок Лагранжа, интеграл (2.1) получен А. В. Борисовым, А. А. Килиным и И. С. Мамаевым [3]. Отметим, что сферический маятник — предельный случай волчка Лагранжа. Чаплыгин получил похожий интеграл также для случая, когда система $\mathcal{M}$ — шар, катящийся по шаровой полости с центром O внутри катящегося шара. Сферический маятник — предельный случай и этой системы.

Пусть $\mathbf{K} = \sum m_i\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$ — кинетический момент системы $\mathcal{M}$ в системе отсчета центра шара. В силу (1.9),

$$\dot{\mathbf{K}} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = -mg\mathbf{s} \times \mathbf{e}_z + \mathbf{M} + \frac{m^2}{\mu+m}\mathbf{s} \times \ddot{\mathbf{x}} - \frac{m}{R(\mu+m)}\mathbf{s} \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}). \tag{2.3}$$

Рассмотрим модифицированный кинетический момент

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \frac{m^2}{\mu+m}\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}.$$

Из (2.3) получим

$$\frac{d}{dt}\widehat{K}_z = M_z - \frac{m\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\rangle}{R(\mu+m)}. \tag{2.4}$$

Если $\mathbf{M} = 0$, имеет место интеграл модифицированного кинетического момента относительно оси z:

$$\widehat{K}_z = K_z - \frac{m^2}{\mu+m}\langle \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_z\rangle = k = \mathrm{const}. \tag{2.5}$$

Продифференцируем кинетическую энергию $T = \frac{1}{2}\sum m_i|\dot{\mathbf{r}}_i|^2$ системы $\mathcal{M}$ в системе отсчета центра шара в силу уравнений (1.9):

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \sum \langle \mathbf{P}_i, \dot{\mathbf{r}}_i\rangle = \\ &= -mg\dot{z} + \sum \langle \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i\rangle + \frac{m^2}{\mu+m}\langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\rangle - \frac{m}{R(\mu+m)}\langle \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}, \dot{\mathbf{x}}\rangle, \end{aligned}$$

где $z = \langle \mathbf{s}, \mathbf{e}_z \rangle$ — высота центра масс системы $\mathcal{M}$. Положим

$$\widehat{T} = T - \frac{m^2}{2(\mu + m)} |\dot{\mathbf{x}}|^2. \tag{2.6}$$

Получим теорему об изменении модифицированной кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\widehat{T} = -mg\dot{z} + \sum \langle \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle - \frac{m}{R(\mu + m)} \langle \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}, \dot{\mathbf{x}} \rangle. \tag{2.7}$$

Если связи, наложенные на систему, идеальные, а активные силы — потенциальные с потенциальной энергией $V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$, причем $\Pi \mathbf{M} = 0$, то имеет место закон сохранения модифицированной энергии

$$\widehat{H} = \widehat{T} + mgz + V = h = \text{const}. \tag{2.8}$$

Пример. Пусть система $\mathcal{M}$ — волчок Лагранжа с точкой подвеса в центре O шара. Тогда

$$\mathbf{s} = r\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{s}} = r\dot{\mathbf{n}} = r\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{K} = J\boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль оси динамической симметрии волчка, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости волчка, а J – тензор инерции относительно центра O. Имеем

$$J\mathbf{n} = C\mathbf{n}, \quad K_n = \langle \mathbf{K}, \mathbf{n} \rangle = C\omega_n, \quad \langle \mathbf{K}, \dot{\mathbf{n}} \rangle = \langle J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \rangle = 0,$$

где C — осевой момент инерции волчка. Отсюда и из (2.3) получаем

$$\frac{d}{dt} K_n = \langle \dot{\mathbf{K}}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{M}, \mathbf{n} \rangle = M_n.$$

Если связь в точке подвеса идеальная, $\mathbf{M} = 0$, то получим первые интегралы $\widehat{K}_z$ и K_n. Имеет место также интеграл модифицированной энергии $\widehat{H}$, где

$$\widehat{T} = \frac{1}{2} \langle J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle - \frac{m^2 r^2}{2(\mu + m)} |\mathbf{e}_z \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega})|^2. \tag{2.9}$$

Ниже волчок Лагранжа внутри шара обсуждается в лагранжевом представлении.

3. Приведение уравнений движения к лагранжеву виду

Будем предполагать, что связи, наложенные на систему $\mathcal{M}$ в системе отсчета центра шара, голономны и идеальны. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^{3n}$ — пространство положений системы $\mathcal{M}$ относительно центра шара. В общем случае сила, действующая на точку m_i со стороны шара, имеет вид $\mathbf{G}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{U}_i$, где $\mathbf{N}_i$ — сила реакции, а $\mathbf{U}_i$ — активная сила, которая может включать, например, управляющую силу. Предположим, что активных сил $\mathbf{U}_i$ нет. Поскольку связи идеальные,

$$\sum \langle \mathbf{N}_i, \delta\mathbf{r}_i \rangle = 0,$$

где $\delta\mathbf{r}_i$ — вектор возможного перемещения точки m_i относительно центра шара:

$$\delta\mathbf{r} = (\delta\mathbf{r}_1, \ldots, \delta\mathbf{r}_n) \in T_{\mathbf{r}}\Sigma.$$

Предположим, что связи обладают симметрией $SO(3)$:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \in \Sigma \Rightarrow (A\mathbf{r}_1, \ldots, A\mathbf{r}_n) \in \Sigma, \qquad A \in SO(3).$$

Тогда

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{N}_i = 0,$$

и уравнение (1.9) принимает вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{P}_i = -m_i g \mathbf{e}_z + \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i + \frac{m m_i}{\mu + m}\ddot{\mathbf{x}}. \tag{3.1}$$

Можно рассматривать последний член в (3.1) как силу инерции, получающуюся из модифицированной кинетической энергии (2.6). Действительно, обобщенный импульс, соответствующий кинетической энергии (2.6), имеет вид

$$\widehat{\mathbf{p}}_i = \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \frac{m m_i}{\mu + m}\dot{\mathbf{x}}. \tag{3.2}$$

Для любой вариации решения $\mathbf{r}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, совместимой со связями $\delta\mathbf{r}(t) \in T_{\mathbf{r}(t)}\Sigma$, и удовлетворяющей граничным условиям $\delta\mathbf{r}(0) = \delta\mathbf{r}(\tau) = 0$, получим

$$\delta \int\limits_0^\tau \widehat{T}\,dt = \int\limits_0^\tau \sum \langle \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}, \delta\dot{\mathbf{r}}_i\rangle\,dt = -\int\limits_0^\tau \sum \langle m_i\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{m m_i}{\mu + m}\ddot{\mathbf{x}}, \delta\mathbf{r}_i\rangle\,dt. \tag{3.3}$$

В силу (3.1),

$$\delta \int\limits_0^\tau (\widehat{T} - mgz)\,dt = -\int\limits_0^\tau \sum \langle \mathbf{F}_i, \delta\mathbf{r}_i\rangle\,dt. \tag{3.4}$$

Из принципа Гамильтона вытекает

Предложение 1. *Движение системы $\mathcal{M}$ относительно центра шара описывается лагранжевой системой с пространством положений Σ, кинетической энергией $\widehat{T}$, потенциальной энергией mgz и формой работы*

$$\delta A = \sum \langle \mathbf{F}_i, \delta\mathbf{r}_i\rangle.$$

Здесь $\mathbf{F}_i$ — внутренние активные силы системы $\mathcal{M}$. Силы взаимодействия шара и системы $\mathcal{M}$ не входят в уравнения: их вклад включен в метрику измененной кинетической энергии

$$ds^2 = \sum m_i |d\mathbf{r}_i|^2 - \frac{m^2 |d\mathbf{x}|^2}{\mu + m}. \tag{3.5}$$

Если на конфигурационном пространстве Σ введены локальные координаты $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_N)$, так что

$$\widehat{T} = \widehat{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \delta A = \langle \mathbf{Q}, \delta\mathbf{q}\rangle,$$

то уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \mathbf{q}} = -mg\frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}. \tag{3.6}$$

Поскольку внутренние силы $\mathbf{F}_i$ не совершают работы при повороте $\delta\mathbf{r}_i = \delta\theta\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_i$ системы $\mathcal{M}$ как твердого тела относительно оси $O\mathbf{e}_z$, а $\widehat{T}$ инвариантна при таком повороте, то уравнения (3.6) имеют нётеров интеграл [1]

$$\widehat{K}_z = \sum \langle \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_i, \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \rangle = k = \mathrm{const}.$$

Это интеграл модифицированного кинетического момента (2.5) относительно оси $\mathbf{e}_z$.

Если внутренние силы $\mathbf{F}_i$ потенциальны с потенциальной энергией $V(\mathbf{r})$, то система имеет функцию Лагранжа

$$\widehat{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \widehat{T} - mgz - V.$$

Тогда движения системы — экстремали функционала

$$\mathcal{A} = \int_0^\tau \widehat{L}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))\, dt.$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0,$$

и имеется интеграл модифицированной энергии (2.8).

Отметим, что лагранжевость уравнений движения не очевидна заранее, поскольку качение без проскальзывания — неголономная связь. Она важна по многим причинам. Например, лагранжева система может быть переписана в гамильтоновой форме, так что имеет место интегральный инвариант Пуанкаре: дифференциальная форма

$$\widehat{\omega} = \sum d\widehat{\mathbf{p}}_i \wedge d\mathbf{r}_i = \sum m_i d\dot{\mathbf{r}}_i \wedge d\mathbf{r}_i - \frac{m^2}{\mu + m} d\dot{\mathbf{x}} \wedge d\mathbf{x}$$

инвариантна относительно фазового потока.

Следствие 1. $\widehat{\omega}^N = \widehat{\omega} \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}$ *— инвариантная форма объема на фазовом пространстве.*

Лагранжевость системы позволяет применить вариационные методы. Предположим, что пространство положений Σ — компактное многообразие.

Следствие 2. *Пусть заданы начальное и конечное положения $\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^1 \in \Sigma$ системы и промежуток времени τ. Тогда существует движение $\mathbf{r}(t)$, такое, что $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}^0$, $\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}^1$. Аналогичное утверждение справедливо для движений с фиксированной модифицированной энергией $\widehat{H} = h > \max(V + mgz)$, но тогда время τ зависит от граничных условий $\mathbf{r}^0$, $\mathbf{r}^1$.*

Первое утверждение вытекает из теоремы Тонелли, а второе — из принципа Мопертюи [1] и теоремы Хопфа–Ринова. Если заданы, кроме того, начальное и конечное положения $\boldsymbol{\rho}^0$, $\boldsymbol{\rho}^1$ центра шара, то интеграл Чаплыгина (2.1) позволяет найти движение центра $\boldsymbol{\rho}(t)$.

4. Примеры

Сферический маятник. Пусть система $\mathcal{M}$ состоит из n сферических маятников длины r_i с точкой подвеса в центре шара. Пусть $S^2_{r_i}$ — сфера радиуса r_i. Пространство положений системы $\mathcal{M}$ – произведение сфер $\Sigma = S^2_{r_1} \times \ldots \times S^2_{r_n}$ с метрикой (3.5).

Кроме интеграла модифицированной энергии $\widehat{H} = \widehat{T} + mgz$, имеется интеграл $\widehat{K}_z$ модифицированного кинетического момента относительно оси z. При $n \geqslant 2$ система не интегрируема: (3.5) не является метрикой прямого произведения. Система становится интегрируемой при $m/\mu \to 0$. Тогда получаем n несвязанных сферических маятников.

Для одного сферического маятника (3.5) — метрика вращения на сфере, так что система интегрируема:

$$\widehat{T} = \frac{m(\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 + m\dot{z}^2)}{2(\mu + m)}. \tag{4.1}$$

В сферических координатах ψ, θ, где $z = r\cos\theta$, функция Лагранжа имеет вид

$$\widehat{L} = \frac{m\mu r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta)}{2(m+\mu)} + \frac{m^2r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta}{2(m+\mu)} - mgr\cos\theta. \tag{4.2}$$

Интеграл модифицированного кинетического момента является циклическим:

$$p_\psi = \frac{\partial\widehat{L}}{\partial\dot{\psi}} = \frac{m\mu r^2\dot{\psi}\sin^2\theta}{m+\mu} = \widehat{K}_z = k.$$

Функция Рауса (функция Лагранжа приведенной системы) имеет вид

$$R_k(\theta, \dot{\theta}) = \widehat{L} - k\dot{\psi} = \frac{mr^2(\mu + m\sin^2\theta)\dot{\theta}^2}{2(m+\mu)} - \widetilde{V}_k(\theta), \tag{4.3}$$

причем приведенная потенциальная энергия

$$\widetilde{V}_k(\theta) = \frac{(\mu+m)k^2}{2m\mu r^2\sin^2\theta} + mgr\cos\theta$$

имеет ту же форму, что и для обычного сферического маятника с неподвижной точкой подвеса. Движение общего положения приведенной системы периодическое, а полной — условно периодическое с двумя частотами. Чтобы найти движение центра шара, остается воспользоваться уравнением (2.2).

Волчок Лагранжа. Получим лагранжеву систему с пространством положений $\Sigma = SO(3)$. Если ввести на $SO(3)$ углы Эйлера ϕ, ψ, θ, то согласно (2.9)

$$\widehat{T} = \frac{1}{2}C(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) - \frac{m^2r^2}{2(\mu+m)}(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\cos^2\theta).$$

Кинетическая $\widehat{T}$ и потенциальная $V = mgr\cos\theta$ энергии инвариантны при поворотах относительно оси $\mathbf{e}_z$, а также относительно оси $\mathbf{n}$ симметрии волчка. Нётеровы интегралы $\widehat{K}_z$ и K_n циклические:

$$K_n = p_\phi = C(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta) = c, \quad \widehat{K}_z = p_\psi = c\cos\theta + \Big(A - \frac{m^2r^2}{\mu+m}\Big)\dot{\psi}\sin^2\theta = k.$$

Понизив порядок по Раусу, получим лагранжеву систему с одной степенью свободы с лагранжианом

$$R_{kc}(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}\Big(A - \frac{m^2r^2\cos^2\theta}{\mu+m}\Big)\dot\theta^2 - \widetilde V_{kc}(\theta), \tag{4.4}$$

где приведенная потенциальная энергия

$$\widetilde V_{kc}(\theta) = \frac{(k - c\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta\Big(A - \frac{m^2r^2}{\mu+m}\Big)} + mgr\cos\theta$$

почти такая же, как для обычного волчка Лагранжа с неподвижной точкой подвеса. Отметим, что всегда

$$A > \frac{m^2r^2}{\mu+m}.$$

Движение волчка общего положения условно периодическое с тремя частотами, а движение центра шара имеет вид (2.2), то есть является суперпозицией линейных и квазипериодических функций.

При $C = 0$ и $A = mr^2$ волчок Лагранжа превращается в сферический маятник: координата ϕ исчезает и (4.4) переходит в (4.3).

Авторы благодарны А. В. Борисову и Д. В. Трещеву за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

[2] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338.

[3] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 465–483.

[4] Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1948. С. 26–56.

On the motion of a mechanical system inside a rolling ball

Sergey V. Bolotin[1], Tatiana V. Popova[2]

[1]Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
[2]M. V. Lomonosov Moscow State University
Leninskie gory, Moscow, 119899, Russia
[1]bolotin@mi.ras.ru, [2]t.shahova@yandex.ru

We consider a mechanical system inside a rolling ball and show that if the ideal constraints have spherical symmetry, the equations of motion have a Lagrangian form. Without symmetry, this is not true.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18
Keywords: nonholonomic constraint, rolling ball, Lagrange equations, Hamilton principle

Received March 30, 2012, accepted November 21, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 51–58 (Russian)